ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.764.2

О.С. ГЕРМАНОВ

ПСЕВДОЛИУВИЛЛЕВЫ ПОВЕРХНОСТИ

В 1846 г. Ж. Лиувилль ввел [1] интересный класс римановых поверхностей, названных впоследствии его именем — поверхности Лиувилля. Их метрика при надлежащем выборе координат u^1, u^2 приводится к виду ([2], с. 151)

$$ds^2 = [X(u^1) + Y(u^2)] \cdot [(du^1)^2 + (du^2)^2],$$

где $X(u^1), Y(u^2)$ — некоторые функции указанных переменных. Уравнения геодезических линий поверхностей Лиувилля допускают первый (квадратичный) интеграл вида $a_{ij} du^i du^j = \mathrm{const}$ $(i, j = 1, 2)$, где $a_{11} = (X+Y)Y$, $a_{22} = -(X+Y)X$, $a_{12} = 0$, причем в случае собственно римановых (положительно определенной метрической формы) поверхностей это свойство характеризует поверхности Лиувилля ([2], с. 192). Характеристическое уравнение

$$|a_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0, \tag{1}$$

где a_{ij} — компоненты тензора, определяющего первый интеграл геодезических, имеет два действительных не равных нулю корня $\lambda_1 = Y$, $\lambda_2 = -X$.

Возникает естественный вопрос: существуют ли поверхности, отличные от поверхностей Лиувилля, уравнения геодезических линий которых также допускают первый квадратичный интеграл? Разумеется, если такие поверхности есть, то искать их следует отказавшись от положительной определенности основной формы поверхности. Понятно, что при этом характеристическое уравнение (1) может иметь как комплексно сопряженные корни, так и один действительный, но, разумеется, кратный корень, чего в случае поверхностей Лиувилля быть не может. Решению этого вопроса и посвящена данная работа. Полученные при этом результаты оказалось возможным обобщить и построить поверхности Вейля ([3], с. 153), уравнения геодезических линий которых допускают в качестве первого интеграла дробно-квадратичный [4].

1. Характеристическое уравнение поверхности

Пусть V_2 — псевдориманова поверхность неопределенной, вообще говоря, метрической формы, отнесенная к координатам u^i $(i, j, k = 1, 2)$, $ds^2 = g_{ij}(u^k) du^i du^j$ — ее линейный элемент, определяемый тензором g_{ij}. Предположим, что эта поверхность допускает существование некоторой невырожденной сети линий ([2], с. 65), определяемой (невырожденным) тензором a_{ij}, и рассмотрим характеристическое уравнение (1) тензора этой сети. Прежде всего выясним, при каких условиях корни этого уравнения будут комплексно сопряжены. Заметим, что эти корни никогда не равны нулю в силу невырожденности тензора сети.

Как легко видеть, если $\lambda_{1,2} = U(u^k) \pm iV(u^k)$, $i^2 = -1$, являются корнями уравнения (1), то функции U, V и координаты тензоров g_{ij} и a_{ij} должны удовлетворять двум условиям:

$$\begin{gathered} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (U^2 + V^2)(g_{11}g_{22} - g_{12}^2), \\ a_{11}g_{22} - 2a_{12}g_{12} + a_{22}g_{11} = 2U(g_{11}g_{22} - g_{12}^2). \end{gathered} \tag{2}$$

Эти условия можно записать в более простом виде следующим образом. Как известно ([3], с. 300), любая риманова поверхность является конформно-плоской, поэтому в специальной (изотермической) системе координат ее линейный элемент может быть записан в виде

$$ds^2 = g[(du^1)^2 + \varepsilon(du^2)^2], \quad g = g(u^i), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

В случае собственно римановой поверхности ($\varepsilon = +1$) исследование уравнений (2) дает нам, что компоненты тензора a_{ij} являются, вообще говоря, комплексными, например, $a_{22} = Ug \pm \sqrt{-(a_{12}^2 + V^2 g^2)}$, что из рассмотрения мы исключаем. Таким образом, получен известный ([5], с. 249) результат, состоящий в том, что характеристическое уравнение (1) в собственно римановом пространстве не имеет комплексных корней. Заметим, что в рассматриваемом случае уравнение (1) может иметь действительный корень кратности 2 (равной размерности поверхности), но при этом, как легко проверить, тензоры a_{ij} и g_{ij} пропорциональны.

Если же рассматриваемая поверхность псевдориманова ($\varepsilon = -1$), то решением (2) являются следующие функции:

$$a_{11} = Ug \pm \sqrt{U^2 + y^2 - (U^2 + V^2)g^2}, \quad a_{12} = y, \quad a_{22} = -Ug \pm \sqrt{U^2 + y^2 - (U^2 + V^2)g^2},$$

однако исследование этих решений вызывает очевидные неудобства. Чтобы их обойти, поступим так: введем на рассматриваемой поверхности новую систему координат x^1, x^2, положив $x^1 = u^1 + u^2$, $x^2 = u^1 - u^2$. В этой системе координат основная форма поверхности запишется следующим образом:

$$ds^2 = 2g_{12}(x^1, x^2)dx^1 dx^2, \tag{3}$$

а тензорное поле a_{ij}, как показывают (2), примет вид

$$a_{11} = a_{11}(x^1, x^2), \quad a_{12} = Ug_{12}, \quad a_{22} = -\frac{V^2}{a_{11}} g_{12}^2. \tag{4}$$

Итак, если характеристическое уравнение (1) псевдоримановой поверхности имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda = U \pm iV$, $i^2 = -1$, то в специальной системе координат основную форму поверхности можно привести к виду (3), а форму, определяющую сеть линий, — к виду

$$a_{ij}dx^i dx^j = a_{11}(dx^1)^2 + 2Ug_{12}dx^1 dx^2 + a_{22}(dx^2)^2,$$

причем $a_{11}a_{22} = -V^2 g_{12}^2$.

Достаточность этого утверждения проверяется непосредственно.

Заметим, что если $V = 0$ (т. е. уравнение (1) имеет действительный корень кратности 2, равной размерности поверхности), то $a_{11}a_{22} = 0$. Поскольку предполагается, что основной тензор поверхности и тензор сети не пропорциональны, то равна нулю только одна из компонент a_{11} и a_{22}.

2. Вейлево-геодезическая сеть линий на поверхности

До сих пор мы не налагали никаких условий на геометрические свойства сети. Допустим далее, что ее тензор удовлетворяет соотношениям

$$\nabla_{(k} a_{ij)} = M_{(k} a_{ij)} + R_{(k} g_{ij)}, \tag{5}$$

где ∇_k — символ ковариантного дифференцирования в связности, определяемой тензором g_{ij}, M_k, R_k — некоторые векторные поля (поля "дополнительных" векторов), скобки обозначают симметрирование по индексам, содержащимся в них. Такую сеть будем называть вейлево-геодезической. Причина подобного названия будет пояснена ниже в § 4.

Отметим здесь также два обстоятельства, касающиеся формы условий (5). Во-первых, очевидно, что тензор сети определяется с точностью до произвольного множителя, но форма уравнений (5) при нормировании тензора не меняется. Действительно, полагая $a_{ij} = \alpha a_{ij}^*$, из (5) получим $\nabla_{(k}a^*_{ij)} = M^*_{(k}a^*_{ij)} + R^*_{(k}g_{ij)}$, где $M^*_k = M_k - \partial_k \ln\alpha$, $R^*_k = \alpha^{-1}R_k$. Следовательно, при градиентном векторе M_k за счет выбора нормировки тензора a_{ij} уравнение (5) можно привести к виду $\nabla_{(k}a^*_{ij)} = R^*_{(k}g_{ij)}$.

Во-вторых, форма условий (5) инвариантна относительно конформных преобразований ([3], с. 160) связности. Непосредственные вычисления дают, что в связности, определяемой тензором $\widetilde{g}_{ij} = \beta^2(x^k)g_{ij}$, уравнения (5) записываются следующим образом: $\widetilde{\nabla}_{(k}a_{ij)} = \widetilde{M}_{(k}a_{ij)} + \widetilde{R}_{(k}\widetilde{g}_{ij)}$, где $\widetilde{\nabla}_k$ — оператор ковариантного дифференцирования относительно $\widetilde{g}_{ij}$, $\widetilde{M}_k = M_k - 2\partial_k\ln\beta^2$, $\widetilde{R}_k = \beta^{-2}R_k + a_{ki}\widetilde{g}^{ij}\partial_j\ln\beta^2$. Поэтому в случае градиентного вектора R_k всегда можно найти такое $\widetilde{V}_2$, конформное данному V_2, в котором сеть тензора (5) является геодезической ([2], с. 165). Заметим, что линии такой сети являются геодезическими линиями данной связности ([2], с. 65). Если к тому же вектор геодезической сети градиентен ($M_k = \partial_k\ln m^2$, $m = m(x^i)$, — некоторая функция координат), то для тензора $b_{ij} = m^{-2}a_{ij}$ имеют место равенства $\nabla_{(k}b_{ij)} = 0$, означающие ([6], с. 158), что соотношения $b_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = \text{const}$, в которых x^i рассматриваются как текущие координаты геодезической линии, зависящие от аффинного параметра s, являются первым (квадратичным) интегралом дифференциальных уравнений геодезических линий данной поверхности. О тензоре a_{ij} в этом случае говорят, что он порождает этот интеграл.

Предполагая, что характеристическое уравнение (1) тензора вейлево-геодезической сети имеет два комплексных корня, введем систему координат x^1, x^2, в которой основной тензор поверхности и тензор вейлево-геодезической сети имеют вид (3) и (4) соответственно. В этой системе координат (5) перепишутся так:

$$\partial_i a_{ii} = (\partial_i \ln g_{12}^2 + M_i)a_{ii}, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{6}$$
$$\partial_i a_{jj} + 2\partial_j a_{ij} - 2(\partial_j \ln g_{12} + M_j)a_{ij} - M_i a_{jj} - 2R_j g_{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Откуда, интегрируя, получаем

$$a_{ii} = (-1)^{i+1}(m_i g_{12}\pi_{ii})^2 \quad (a_{11}a_{22} < 0\,!), \tag{7}$$

и к тому же, как дают (4), $a_{12} = Ug_{12}$. При этом

$$M_i = \partial_i \ln m_i^2, \quad R_i = m_i^2\partial_i\frac{U}{m_i^2} + \frac{m_j^2}{2g_{12}}\partial_j\frac{a_{ii}}{m_j^2}, \quad i \neq j. \tag{8}$$

Здесь U, g_{12}, m_1, m_2 — некоторые функции переменных x^1, x^2 (U — действительная часть корня уравнения (1), мнимая его часть равна $\sqrt{-a_{11}a_{22}g_{12}^{-2}}$), π_{ii} не зависят от координат x^j ($i \neq j$).

Непосредственная проверка показывает, что тензорное поле a_{ij} (4), (7) действительно определяет вейлево-геодезическую сеть с "дополнительными" векторами M_k, R_k (8), причем характеристическое уравнение (1) этого поля в метрике (3) имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda = U \pm i\sqrt{-a_{11}a_{22}g_{12}^{-2}}$.

Если же корни уравнения (1) действительны, то a_{11} или a_{22} обращаются в нуль. Будем считать, что $a_{22} = 0$. Тогда $\pi_{22} = 0$, и из (6) при сохранении (7) имеем $M_1 = \partial_1\ln m_1^2$, $M_2 = \partial_2\ln[m_1 f(x^1)]^2$, $m_2 = m_1 f(x^1)$, где f — произвольная функция переменной x^1, R_k имеет тот же вид (8), где положим a_{22} равным нулю.

Отметим, что третий возможный случай — корни уравнения (1) чисто мнимые — описывается формулами (7)–(8) при U равном нулю.

Обратимся теперь к случаю квадратичного интеграла геодезических. Положив в (5) $R_k = 0$ и считая $M_k = \text{grad}$ (не уменьшая общности, при этом можно считать, что в (8) $m_1 = m_2 = m$), из (8) будем иметь

$$\partial_1\frac{U}{m^2} = -\pi_{11}\partial_2(\pi_{11}g_{12}), \quad \partial_2\frac{U}{m^2} = \pi_{22}\partial_1(\pi_{22}g_{12}). \tag{9}$$

Напомним, что здесь π_{ii} $(i=1,2)$ — произвольные функции, и π_{ii} не зависят от x^i. Если одна из них, например, π_{22}, обращается в нуль (это условиями задачи не запрещается), то из (4) получаем $V=0$, а в силу (9) получаем $U=m^2\Phi(x^1)$, где Φ — такая функция от x^1, для которой (как требует первое условие (9)) $\Phi'=-\pi_{11}\partial_2(\pi_{11}g_{12})$. Последнее позволяет определить g_{12}: т.к. $\partial_2(\pi_{11}g_{12})=-\frac{\Phi'(x^1)}{\pi_{11}}$, то $g_{12}=\frac{1}{\pi_{11}}\Big[-\Phi'\int\frac{dx^2}{\pi_{11}}+G\Big]$, где G — произвольная функция переменной x^1.

Итак, в рассматриваемом случае (корень уравнения (1) действительный и кратный) линейный элемент (3) рассматриваемой поверхности определяется компонентой $g_{12}=\frac{1}{\pi_{11}(x^2)}\cdot\Big[-\Phi'(x^1)\int\frac{dx^2}{\pi_{11}}+G(x^1)\Big]$, где Φ, G — произвольные функции переменной x^1, координаты тензора сети приводятся к виду $a_{11}=m^2\Big[-\Phi'\int\frac{dx^2}{\pi_{11}}+G\Big]^2$, $a_{12}=m^2\Phi g_{12}$, $a_{22}=0$, а первый интеграл геодезических — к виду

$$\frac{1}{m^2}\left[2a_{12}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds}+a_{11}\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2\right]=\mathrm{const}\,.$$

Функция $U=m^2\Phi$ при этом является действительным и кратным корнем характеристического уравнения (1).

Случай $\pi_{11}=0$, $\pi_{22}\neq 0$ принципиально ничем не отличается от рассмотренного.

Далее, рассматривая уравнения (9), будем считать $\pi_{11}\pi_{22}\neq 0$. Это позволяет нам ввести новую функцию $A(x^1,x^2)$, полагая $A=\pi_{11}\pi_{22}g_{12}$, и записать линейный элемент (3) рассматриваемой поверхности в виде $ds^2=2A\frac{dx^1}{\pi_{22}}\frac{dx^2}{\pi_{11}}$. При этом уравнения (9) примут вид

$$\partial_1\frac{U}{m^2}=-\frac{\pi_{11}}{\pi_{22}}\partial_2 A,\quad \partial_2\frac{U}{m^2}=\frac{\pi_{22}}{\pi_{11}}\partial_1 A,$$

а уравнение геодезической сети — вид

$$a_{ij}dx^idx^j=\left[mA\frac{dx^1}{\pi_{22}(x^1)}\right]^2+2UA\frac{dx^1}{\pi_{22}}\frac{dx^2}{\pi_{11}}-\left[mA\frac{dx^2}{\pi_{11}(x^2)}\right]^2=0.$$

Следует отметить, что функции $\frac{U}{m^2}$ и A являются решениями одного и того же уравнения 2-го порядка в частных производных

$$\pi_{22}^2\partial_1\partial_1 z+\pi_{11}^2\partial_2\partial_2 z+\tfrac{1}{2}[(\pi_{22}^2)'\partial_1 z+(\pi_{11}^2)'\partial_2 z]=0,\quad \partial_i\partial_i\equiv\tfrac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^i}.$$

Введем новые координаты y^1, y^2, полагая $dy^1=\frac{dx^1}{\pi_{22}}$, $dy^2=\frac{dx^2}{\pi_{11}}$. Непосредственные вычисления показывают, что в новой системе координат

$$ds^2=2Ady^1dy^2,\quad a_{ij}dy^idy^j=(mAdy^1)^2+2UAdy^1dy^2-(mAdy^2)^2 \tag{10}$$

(где, напомним, A, m — произвольные функции переменных y^1, y^2 и, по-прежнему, $M_i=\partial_i\ln m^2$), а уравнения (9), обеспечивающие наличие первого интеграла геодезических, принимают вид уравнений Коши–Римана для функций A и $\frac{U}{m^2}$

$$\frac{\partial A}{\partial y^1}=\frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{U}{m^2}\right),\quad \frac{\partial A}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y^1}\left(\frac{U}{m^2}\right).$$

Следовательно, во введенных координатах $\pi_{11}=\pi_{22}=1$, а функции A и $\frac{U}{m^2}$ являются действительной и мнимой частями аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного y^1+iy^2 соответственно.

Итак, получено следующее: *если характеристическое уравнение* (1) *тензора вейлево-геодезической сети, порождающей первый интеграл геодезических псевдоримановой поверхности, имеет пару комплексно сопряженных корней* $\lambda_{1,2}=U(y^1,y^2)\pm iV(y^1,y^2)$ $(i^2=-1,\ V\neq 0)$, *то в специальной системе координат основная форма этой поверхности и форма, определяемая тензором сети, могут быть приведены к виду* (10), *где* A, U, m *— некоторые функции переменных* y^1, y^2 *такие, что* U *— действительная часть корня характеристического уравнения*

(1), *функции* A *и* $\frac{U}{m^2}$ *являются соответственно действительной и мнимой частями аналитической функции переменного* y^1+iy^2, *при этом* $M_i=\partial_i \ln m^2$, *а мнимая часть корня уравнения* (1) *удовлетворяет соотношению* $V^2=(mA)^2$.

Непосредственные вычисления показывают, что *представление* (10) *основной формы* V_2 *и некоторого тензорного поля* a_{ij} *достаточны для того, чтобы это поле определяло геодезическую сеть на этой поверхности с "дополнительным" вектором* $M_k=\partial_k \ln m^2$, *а характеристическое уравнение* (1) *имело пару комплексно-сопряженных корней.*

В этой системе координат первый интеграл геодезических линий записывается в виде

$$\left(A\frac{dy^1}{ds}\right)^2+2A\frac{U}{m^2}\frac{dy^1}{ds}\frac{dy^2}{ds}-\left(A\frac{dy^2}{ds}\right)^2=\mathrm{const}=k.$$

Отсюда выводим, что направление касательного вектора геодезической линии задается следующим образом:

$$\frac{dy^2}{dy^1}=\frac{1}{A}\left(\frac{U}{m^2}-k\right)\pm\sqrt{\frac{1}{A^2}\left(\frac{U}{m^2}-k\right)^2+1},$$

следовательно, для нахождения конечных уравнений геодезических линий достаточно, как и для поверхностей Лиувилля ([2], с. 152), выполнить две квадратуры.

Заметим, что если корни уравнения (1) в этом случае чисто мнимые, то $A=\mathrm{const}$.

3. Некоторые частные случаи

Рассмотрим на поверхности с фундаментальной формой (3) сеть, определяемую невырожденным тензорным полем a_{ij}, удовлетворяющим следующим более сильным условиям:

$$\nabla_k a_{ij}=H_i a_{kj}+H_j a_{ik}+M_k a_{ij}+F_i g_{kj}+F_j g_{ik}+R_k g_{ij}, \tag{11}$$

где H_k, M_k, F_k, R_k — некоторые векторные поля.

Отметим, как и для условия (5), те же два обстоятельства, касающиеся формы уравнений (11). Их форма не зависит от нормирования тензорного поля a_{ij} и инвариантна относительно конформных преобразований связности, допускающих эти поля.

При новом нормировании тензора сети $a_{ij}=\alpha(x^k)a^*_{ij}$ форма уравнений (11), как легко видеть, не меняется, "дополнительные" векторы преобразуются следующим образом: $H^*_k=H_k$, $M^*_k=M_k-\partial_k\ln\alpha$, $F^*_k=\alpha^{-1}F_k$, $R^*_k=\alpha^{-1}R_k$, а в связности, конформной данной ($\widetilde{g}_{ij}=\beta^2(x^k)g_{ij}$) при той же форме уравнений (11) эти векторы имеют вид $H^*_j=H_j-\partial_j\ln\beta$, $\widetilde{M}_k=M_k-\partial_k\ln\beta^2$, $\widetilde{R}_k=\beta^{-2}R_k$, $\widetilde{F}_k=\beta^{-2}F_k-a_{ki}\widetilde{g}^{ij}\partial_j\ln\beta$, поэтому в случае, когда $M_k=2H_k$ — градиент (случай интересный своими приложениями) в связности, конформной данной, уравнения поля (11) приводятся к виду $\widetilde{\nabla}_k a_{ij}=\widetilde{F}_i\widetilde{g}_{kj}+\widetilde{F}_j\widetilde{g}_{ik}+\widetilde{R}_k\widetilde{g}_{ij}$.

Очевидно, что рассматриваемая сеть является вейлево-геодезической сетью с "дополнительными" векторами $\mathring{M}_k=2H_k+M_k$, $\mathring{R}_k=2F_k+R_k$, поэтому в том случае, когда характеристическое уравнение тензора a_{ij} имеет комплексно-сопряженные корни, для компонент этого тензора и для векторов $\mathring{M}_k$, $\mathring{R}_k$ в специальной системе координат (см. § 2) имеют место представления (7) и (8) соответственно. Следовательно, для определения тензорного поля a_{ij} остается найти лишь "дополнительные" векторы этой сети и конкретизировать вид функций m_i, π_{ii}, входящих в эти представления.

Рассмотрим (11), считая, что корни уравнения (1) комплексно-сопряжены ($a_{11}a_{22}\neq 0$), в специальной системе координат, введенной в § 2. При $i=j$ из (11) получаем $\partial_i a_{ii}=\partial_i\ln(g_{12}m_i)^2 a_{ii}$,

$$\partial_k a_{ii}=H_k a_{ii}+2(UH_i+F_i)g_{ik},\quad i\neq k,$$

где, напомним, $\partial_i \ln m_i^2 = \overset{\circ}{M}_i = 2H_i + M_i$. Введем четыре векторных поля A_{ij} и B_{ij} $(i, j = 1, 2,$ второй индекс обозначает номер поля), положив $A_{ii} = \partial_i \ln(g_{12} m_i)^2$, $A_{ki} = M_k$ $(i \neq k)$, $B_{ii} = 0$, $B_{ki} = 2(UH_i + F_i) g_{ik}$ $(i \neq k)$, и с их помощью запишем предыдущую систему уравнений так:

$$\partial_k a_{ii} = A_{ki} a_{ii} + B_{ki}, \quad i, k = 1, 2. \tag{12}$$

Условия ее интегрируемости требуют, чтобы поля A_{i1} и A_{i2} были градиентными векторными полями. В силу их строения получаем $M_i = \partial_i \ln(g_{12} m_j \mu_j)^2$ $(i \neq j$, μ_j не зависят от "своих" переменных $x^j)$, а т. к. $2H_i + M_i = \partial_i \ln m_i^2$, то $H_i = \partial_i \ln \frac{m_i}{m_j \mu_j g_{12}}$, $i \neq j$. Из самих уравнений (12) в этом случае следует, что $B_{ki} = \partial_k a_{ii} - A_{ki} a_{ii} = (g_{12} m_i \mu_i)^2 \partial_k \frac{a_{ii}}{(g_{12} m_i \mu_i)^2}$. Поскольку $B_{ii} = 0$, а $B_{ki} = 2(UH_i + F_i) g_{12}$ $(k \neq i)$, то (12) запишется в виде

$$(g_{12} m_i \mu_i)^2 \partial_i \frac{a_{ii}}{(g_{12} m_i \mu_i)^2} = 0,$$
$$(g_{12} m_i \mu_i)^2 \partial_k \frac{a_{ii}}{(g_{12} m_i \mu_i)^2} = 2(UH_i + F_i) g_{12}, \quad i \neq k,$$

отсюда $a_{ii} = (-1)^{i+1} (g_{12} m_i \mu_i \pi_{ii})^2$, где π_{ii} не зависят от "своих" координат x^i, $F_i = \frac{a_{ii}}{g_{12}} (\ln \pi_{ii})' - UH_i$.

Оставшиеся уравнения (11) при $i \neq j$ приводятся к виду

$$\partial_i a_{12} = (\partial_i \ln g_{12} + H_i + M_i) a_{12} + H_j a_{ii} + (F_i + R_i) g_{12}, \quad i \neq j,$$

и позволяют определить поле R_k. Отсюда, учитывая, что $a_{12} = U g_{12}$, получаем

$$R_i = (m_i m_j \mu_i \mu_j g_{12}) \partial_i \frac{U}{m_i m_j \mu_i \mu_j g_{12}} - \frac{a_{ii}}{g_{12}} H_j - F_i \quad (i, j = 1, 2, \ \ i \neq j).$$

Выполнение условий $\overset{\circ}{M}_k = 2H_k + M_k$, $\overset{\circ}{R}_k = 2F_k + R_k$ проверяется непосредственно.

Таким образом, *если характеристическое уравнение* (1) *тензорного поля* a_{ij} *в* (11) *имеет комплексно-сопряженные корни* $\lambda_{1,2} = U \pm iV$, *причем* $V \neq 0$, *то в специальной системе координат основная форма поверхности приводится к виду* (3) *с произвольной компонентой* $g_{12}(x^1, x^2)$, *тензор поля сети имеет вид* (7), *где* $m_i(x^1, x^2)$ *— произвольные функции, а "постоянные интегрирования" в* (7) *являются произведением двух функций, каждая из которых не зависит от "своей" координаты* $a_{ii} = (-1)^{i+1} (g_{12} m_i \mu_i \pi_{ii})^2$, *"дополнительные" векторы в этой системе координат приводятся к виду* $M_k = \partial_k \ln(g_{12} m_j \mu_j)^2$, $H_k = \partial_k \ln \frac{m_k}{m_j \mu_j g_{12}}$, $R_k = (m_k m_j \mu_k \mu_j g_{12}) \cdot \partial_k \frac{U}{m_k m_j \mu_k \mu_j g_{12}} - \frac{a_{kk}}{g_{12}} H_j - F_k$, $k \neq j$, $F_k = \frac{a_{kk}}{g_{12}} (\ln \pi_{kk})' - UH_k$.

Достаточность этих условий проверяется непосредственно.

Заметим, что рассмотренный случай включает в себя и тот, при котором корни уравнения (1) являются чисто мнимыми. Для его описания надо здесь всюду положить $U = 0$.

Рассмотрим оставшийся случай $V = 0$. Так как $a_{11} a_{22} = -(V g_{12})^2$ и $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, то для определенности будем считать, что $a_{22} = 0$. В этом случае из (11) при $i = j = 1$ получаем

$$\partial_1 a_{11} = (\partial_1 \ln g_{12}^2 + 2H_1 + M_1) a_{11}, \quad \partial_2 a_{11} = M_2 a_{11} + 2(H_1 a_{12} + F_1 g_{12}),$$

откуда $a_{11} = [m_1(x^1, x^2) \mu_1(x^1) \pi_{11}(x^2) g_{12}]^2$, $M_2 = \partial_2 \ln(m_1 \mu_1 g_{12})^2$, $2H_1 + M_1 = \partial_1 \ln m_1^2$, $F_1 = \frac{a_{11}}{g_{12}} (\ln \pi_{11})' - UH_1$.

При $i = j = 2$ уравнения (11) дают $0 = 2(UH_2 + F_2) g_{12}$, следовательно, $F_2 = -UH_2$.

И, наконец, при $i = 1$, $j = 2$ из (11) выводим

$$\partial_1 a_{12} = (\partial_1 \ln g_{12} + H_1 + M_1) a_{12} + H_2 a_{11} + (F_1 + R_1) g_{12},$$
$$\partial_2 a_{12} = (\partial_2 \ln g_{12} + H_2 + M_2) a_{12} + (F_2 + R_2) g_{12}.$$

Отсюда, учитывая уже определенное и то, что $a_{12} = Ug_{12}$, получаем $M_1 = \partial_1 \ln\left(\frac{A}{m_1}\right)^2$, $H_1 = \partial_1 \ln \frac{m_1^2}{A}$, $H_2 = \partial_2 \ln \frac{A}{(m_1\mu_1 g_{12})^2}$, $R_1 = A\partial_1 \frac{U}{A} - H_2 \frac{a_{11}}{g_{12}} - F_1$, $R_2 = A\partial_2 \frac{U}{A} - F_2$, где $A(x^1, x^2)$ — произвольная функция переменных x^1, x^2, а $F_1 = \frac{a_{11}}{g_{12}}(\ln \pi_{11})' - UH_1$.

И в этом случае достаточность полученных условий проверяется непосредственно.

Далее рассмотрим некоторые специальные случаи уравнений (11).

1°. Пусть $\nabla_k a_{ij} = M_k a_{ij}$ ($H_k = F_k = R_k = 0$). Как легко теперь проверить, $\partial_k \ln \frac{m_k}{m_j \mu_j g_{12}} = 0$, $\partial_k \frac{U}{m_k m_j \mu_k \mu_j g_{12}} = 0$ ($k \neq j$) при $V \neq 0$. В силу первого из этих условий $m_1 = \Phi(x^1) G(x^2) m_2$, где $\Phi(x^1)$, $G(x^2)$ — произвольные функции указанных переменных. Полученное же, как легко проверить, приводит к градиентности поля M_k. Таким образом, приходим к исследованному случаю, когда геодезические линии исследуемой поверхности допускают первый квадратичный интеграл, определяемый полем $b_{ij} = [g_{12} m_2 \mu_1 \mu_2 G(x^2)]^{-2} a_{ij}$.

Если же $V = 0$, то, считая по-прежнему $a_{22} = 0$, из условий $H_k = 0$ получаем $\mu_1 g_{12} = \Phi(x^1) G(x^2)$, где $\Phi(x^1)$, $G(x^2)$ — произвольные функции переменных x^1, x^2 соответственно, что опять-таки приводит к градиентности вектора M_k и снова приходим к исследованному случаю квадратичного интеграла геодезических.

2°. В связи с приложениями ([7], гл. VIII, сс. 322, 349) особый интерес представляют уравнения (11) следующих двух типов:

$$\text{а)}\ \ M_k = 2H_k, \ \ F_k = R_k = 0, \qquad \text{б)}\ \ M_k = H_k = 0, \ \ R_k = 2F_k.$$

Однако одно лишь требование $M_k = 2H_k$ сразу приводит, как легко проверить, к градиентности этих векторных полей. Поэтому, как уже отмечалось, можно указать связность, конформную рассматриваемой, при которой $H_k = M_k = 0$.

Второй случай ($M_k = H_k = 0$, $R_k = 2F_k$) также приводит к градиентности полей R_k и F_k.

4. Сети на поверхностях Вейля

На поверхности Вейля W_2 с основным тензором g_{ij} и дополнительным вектором ω_k ($\overset{w}{\nabla}_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}$, где $i, j, k = 1, 2$, $\overset{w}{\nabla}_k$ — символ ковариантного дифференцирования в W_2) рассмотрим сеть, порожденную невырожденным тензорным полем a_{ij}, геометрические свойства которого задаются условиями

$$\overset{w}{\nabla}_{(k} a_{ij)} = P_{(k} a_{ij)} + Q_{(k} g_{ij)}, \tag{13}$$

где P_k, Q_k — некоторые векторы.

Заметим, что эта сеть при $Q_k = 0$ является геодезической ([3], с. 186). Если к тому же разность векторов P_k и $2\omega_k$ градиентна ($P_k - 2\omega_k = \partial_k \Phi$), то тензорное поле $b_{ij} = e^{-\Phi} a_{ij}$ удовлетворяет, как легко проверить, условиям $\overset{w}{\nabla}_{(k} b_{ij)} = 2\omega_{(k} b_{ij)}$, которые показывают [4], что соотношение $g_{ij} dx^i dx^j / b_{ij} dx^i dx^j = \mathrm{const}$ является первым (дробно-квадратичным) интегралом дифференциальных уравнений геодезических линий рассматриваемой поверхности Вейля.

Форма уравнений (13) инвариантна относительно конформных отображений ([3], с. 160) поверхности Вейля. В самом деле, в связности Вейля W_2^* с основным тензором $g_{ij}^* = g_{ij}$ и дополнительным вектором $\omega_k^* = \omega_k + p_k$ (p_k — вектор конформного преобразования) условия (13) принимают вид $\nabla^*_{(k} a_{ij)} = P^*_{(k} a_{ij)} + Q^*_{(k} g^*_{ij)}$, где $P_k^* = P_k + 4p_k$, $Q_k^* = Q_k - 2p_m g^{lm} a_{lk}$. Более того, если поверхность W_2^* риманова ($p_k = -\omega_k$), то в ее связности сеть, определяемая тензорным полем a_{ij}, является вейлево-геодезической (см. (5)) с "дополнительными" векторами $M_k = P_k - 4\omega_k$, $R_k = Q_k + 2\omega_l g^{lm} a_{mk}$. Поскольку риманова поверхность V_2 является вейлевой поверхностью (с нулевым дополнительным вектором), то, в свою очередь, V_2 можем конформно отобразить на некоторую поверхность Вейля W_2 ($g_{ij} = g_{ij}$, $\omega_k = p_k$), причем, если исходная V_2 допускала вейлево-геодезическую сеть, описываемую уравнениями (5), то в построенном W_2 геометрия этой сети будет описываться уравнениями (13) при $P_k = M_k + 4p_k$, $Q_k = R_k - 2p_m g^{lm} a_{lk}$. Но уравнения $R_k - 2p_m g^{lm} a_{lk} = 0$ разрешимы относительно $2\omega_k$: $2\omega_k = g_{ki} a^{ij} R_j$, поэтому, отправляясь от римановой поверхности, допускающей вейлево-геодезическую сеть, всегда можем построить поверхность Вейля, в которой указанная сеть будет геодезической. Это обстоятельство и является причиной, по которой сеть, описываемая уравнениями (5), была названа вейлево-геодезической.

Для построения связности Вейля W_2, в которой разрешимы уравнения (13), зафиксируем нормирование основного тензора поверхности и рассмотрим риманову поверхность V_2, метрический тензор которой совпадает с основным тензором поверхности Вейля. В связности V_2 уравнения (13) запишутся в виде (5) при $M_k = P_k - 4\omega_k$, $R_k = Q_k + 2\omega_j g^{ij} a_{ik}$.

Исследование полученных уравнений уже проведено в § 2, поэтому выделим лишь тот случай, когда уравнения геодезических линий W_2 допускают первый дробно-квадратичный интеграл, а характеристическое уравнение (1) поля a_{ij} имеет пару комплексно-сопряженных корней. Как следует из предыдущих рассуждений (см. § 2), при этом ($Q_k = 0$!)

$$g_{ij} dx^i dx^j = 2g_{12} dx^1 dx^2, \quad a_{ii} = (-1)^{i+1}(m_i \pi_{ii} g_{12})^2, \quad a_{12} = U g_{12},$$
$$M_k = P_k - 4\omega_k = \partial_k \ln m_k^2, \quad R_k = 2\omega_i g^{ij} a_{jk} = m_k^2 \partial_k \frac{U}{m_k^2} + \frac{m_j^2}{2g_{12}} \partial_j \frac{a_{kk}}{m_j^2},$$

$k \neq j$, где g_{12}, U, m_1, m_2 — произвольные функции переменных x^1, x^2, π_{ii} не зависят от x^j ($i \neq j$), $2\omega_k = R_j a^{ij} g_{jk}$, $P_k = \partial_k \ln m_k^2 + 4\omega_k$. Если к тому же $P_k - 2\omega_k = \partial_k \ln \Phi^2$, то $2\omega_k = \partial_k \ln \left(\frac{\Phi}{m_k}\right)^2$, и первый интеграл геодезических записывается в виде

$$(2\Phi g_{12} dx^1 dx^2) \cdot [(m_1 \pi_{11} g_{12} dx^1)^2 + 2U g_{12} dx^1 dx^2 - (m_2 \pi_{22} g_{12} dx^2)^2]^{-1} = \mathrm{const}\,.$$

Достаточность полученного проверяется непосредственно.

Если уравнение (1) допускает действительный кратный корень ($V = 0$ за счет обращения в нуль a_{22}), то $\pi_{22} = 0$, $a_{12} = U g_{12}$, $a_{11} = [m_1 g_{12} \pi_{11}(x^2)]^2$, $M_k = P_k - 4\omega_k = \partial_k \ln [m_1 f(x^2)]^2$ (т. е. $m_2 = m_1 f(x^2)$, что ведет к градиентности вектора M_k) и $R_k = m_k^2 \partial_k \frac{U}{m_k^2} + \frac{m_j^2}{2g_{12}} \partial_j \frac{a_{kk}}{m_j^2}$ ($j \neq k$). В этом же случае условие существования первого интеграла $P_k - 4\omega_k = \partial_k \ln \Phi^2$ приводит к градиентности дополнительного вектора связности Вейля $2\omega_k = \partial_k \ln \left[\frac{\Phi}{m_1 f(x^2)}\right]^2$.

В заключение выясним вопрос: могут ли геодезические линии некоторой W_2 допускать первый квадратичный интеграл?

Как уже отмечалось выше, для этого необходимо и достаточно, чтобы в данной связности Вейля были разрешимы уравнения $\overset{w}{\nabla}_{(k} a_{ij)} = 0$, которые в соответствующей V_2 имеют вид (5) при $M_k = 4p_k$, $R_k = -2p_i g^{ij} a_{jk}$. Результаты § 2 дают следующее: если $V \neq 0$, то $M_k = -4\omega_k = \partial_k \ln m_k^2$, $R_k = 2\omega_i g^{ij} a_{jk} = m_k^2 \partial_k \frac{U}{m_k^2} + \frac{m_j^2}{2g_{12}} \partial_j \frac{a_{kk}}{m_j^2}$, $k \neq j$. Первое из этих условий дает $2\omega_k = -\partial_k \ln m_k$ (заметим, что ω_k градиентен, если корень уравнения (1) действительный и кратный, т. к. при этом $m_2 = m_1 f(x^2)$). Второе же условие можно переписать в виде

$$\partial_1 U = U \partial_1 \ln m_1 + \frac{1}{2g_{12}} \left[m_2^2 \partial_2 \frac{a_{22} - a_{11}}{m_2^2} - \partial_2 a_{22} \right], \quad \partial_2 U = U \partial_2 \ln m_2 + \frac{1}{2g_{12}} \left[m_1^2 \partial_1 \frac{a_{11} - a_{22}}{m_1^2} - \partial_1 a_{11} \right].$$

Условия интегрируемости этой системы требуют, чтобы $m_1 = m_2 G \Phi$, где $\Phi(x^1)$ и $G(x^2)$ — произвольные функции указанных аргументов. Как легко проверить, при этом дополнительный вектор рассматриваемой связности Вейля градиентен.

Осталось рассмотреть в этой связи случай, вообще говоря, исключенный из рассмотрения в данной работе, при котором характеристическое уравнение (1) имеет два действительных не равных нулю и друг другу корня. При этом основной тензор W_2 и тензор сети, определяющей квадратичный интеграл, можно (см. § 1) привести соответственно к виду $g_{11} = g_{22} = g(x^1, x^2)$, $a_{ii} = \lambda_i g$, $i = 1, 2$, λ_i — корни уравнения (1), $a_{12} = g_{12} = 0$. На соответствующей рассматриваемой

W_2 римановой поверхности V_2 уравнения $\overset{w}{\nabla}_{(k}a_{ij)} = 0$, определяющие наличие первого квадратичного интеграла геодезических линий связности Вейля, принимают вид (5) при $M_k = -4\omega_k$, $R_k = 2\omega_i g^{ij} a_{jk}$ и во введенных координатах приводятся к виду

$$2\omega_i = -\partial_i \ln \lambda_i, \quad (\lambda_i - \lambda_j)\partial_i g + g\partial_i \lambda_j = 2\omega_i g(\lambda_i - 2\lambda_j), \quad i \neq j, \ \ i = 1, 2.$$

Обозначив $z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, последнюю пару уравнений можно записать в следующем виде:

$$\partial_1 \ln g = 2\omega_1 - \frac{\partial_1 z}{1 - z}, \quad \partial_2 \ln g = 2\omega_2 - \frac{\partial_2 z}{z(1 - z)}.$$

Условия интегрируемости этой системы требуют, чтобы $z = \Phi(x^1)G(x^2)$, где Φ, G — произвольные функции указанных переменных. Это снова приводит к градиентности дополнительного вектора связности Вейля.

Итак, доказано, что уравнения геодезических линий связности Вейля W_2 не допускают в качестве первого интеграла квадратичный.

Литература

1. Liouville J. *Thèorème concernant l'integration de l'èquation des lignes geodèsiques.* В кн. Monge G. *Application de l'analyse à la gèomètrie.* – Paris, 1850. – 620 p.
2. Норден А.П. *Теория поверхностей.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 260 с.
3. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
4. Писарева Н.М. *О дробно-квадратичном интеграле геодезических линий пространства аффинной связности* // Матем. сб. – 1955. – Т. 36. – № 1. – С. 169–200.
5. Широков П.А. *Тензорное исчисление.* Ч. I. *Алгебра тензоров.* – М.–Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934. – 464 с.
6. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: ГИИЛ, 1948. – 316 с.
7. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 496 с.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила 15.06.1998