ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 517.95

В.Н. ЗАХАРОВ

МЕТОД РИМАНА ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В [1]–[3] решение задачи Гурса для уравнений третьего порядка в трехмерном пространстве выражается через большое количество слагаемых, что затрудняет использование этого решения при исследовании других краевых задач. В данной работе выведен компактный вид этого решения.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}) \equiv \mathcal{U}_{xyz} + a_1\mathcal{U}_{xy} + a_2\mathcal{U}_{xz} + a_3\mathcal{U}_{yz} + b_1\mathcal{U}_x + b_2\mathcal{U}_y + b_3\mathcal{U}_z + c\mathcal{U} = 0 \tag{1}$$

в первом октанте $G = \{(x,y,z) : 0 < x,y,z < +\infty\}$. Будем предполагать, что $a_{1xy}, a_{2xz}, a_{3yz}, b_{1x}, b_{2y}, b_{3z}, c \in \mathbb{C}(G)$.

Задача Гурса. *Найти решение уравнения* (1) *в области* G, *непрерывное в* $\overline{G}$ *и удовлетворяющее краевым условиям*

$$\mathcal{U}(0,y,z) = \varphi_1(y,z), \quad 0 \le y,z < +\infty, \tag{2}$$

$$\mathcal{U}(x,0,z) = 0, \quad 0 \le x,z < +\infty, \tag{3}$$

$$\mathcal{U}(x,y,0) = 0, \quad 0 \le x,y < +\infty. \tag{4}$$

Теорема. *Если* $\varphi_{1ts}(t,s) \in \mathbb{C}[0,+\infty;\ 0,+\infty]$, *то единственное решение задачи Гурса определяется формулой*

$$\mathcal{U}(x,y,z) = \int_0^y dt \int_0^z [\varphi_{1ts}(t,s) + a_1(0,t,s)\varphi_{1t}(t+s) + a_2(0,t,s)\varphi_{1s}(t,s) + b_1(0,t,s)\varphi_1(t,s)]R(0,t,s;x,y,z)ds. \tag{5}$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения докажем методом Римана. Функция Римана для уравнения (1) существует [4] и определяется единственным образом. Непосредственным дифференцированием легко доказать тождество

$$R\mathcal{L}(\mathcal{U}) - \mathcal{U}\mathcal{L}^*(R) = \frac{1}{6}(P_x + Q_y + H_z),$$

где $\mathcal{L}^*(R)$ — оператор, сопряженный к оператору $\mathcal{L}(\mathcal{U})$,

$$P = 2(\mathcal{U}R)_{yz} - 3[(R_z - a_1R)\mathcal{U}]_y - 3[(R_y - a_2R)\mathcal{U}]_z + 6[R_{yz} - (a_1R)_y - (a_2R)_z + b_1R]\mathcal{U},$$

$$Q = 2(\mathcal{U}R)_{xz} - 3[(R_z - a_1R)\mathcal{U}]_x - 3[(R_x - a_3R)\mathcal{U}]_z + 6[R_{xy} - (a_1R)_x - (a_3R)_z + b_2R]\mathcal{U},$$

$$H = 2(\mathcal{U}R)_{xy} - 3[(R_y - a_2R)\mathcal{U}]_x - 3[(R_x - a_3R)\mathcal{U}]_y + 6[R_{xy} - (a_2R)_x - (a_3R)_y + b_3R]\mathcal{U}.$$

Заметим, что функции P, Q, H могут быть записаны в виде

$$P = -4(\mathcal{U}R)_{yz} + 3[(R_z - a_1R)\mathcal{U}]_y + 3[(R_y - a_2R)\mathcal{U}]_z + 6(\mathcal{U}_{yz} + a_1\mathcal{U}_y + a_2\mathcal{U}_z + b_1\mathcal{U})R,$$

$$Q = -4(\mathcal{U}R)_{xz} + 3[(R_z - a_1R)\mathcal{U}]_x + 3[(R_x - a_3R)\mathcal{U}]_z + 6(\mathcal{U}_{xz} + a_1\mathcal{U}_x + a_3\mathcal{U}_z + b_2\mathcal{U})R,$$

$$H = -4(\mathcal{U}R)_{xy} + 3[(R_y - a_2R)\mathcal{U}]_x + 3[(R_x - a_3R)\mathcal{U}]_y + 6(\mathcal{U}_{xy} + a_2\mathcal{U}_x + a_3\mathcal{U}_y + b_3\mathcal{U})R.$$

Пусть $\mathcal{U}(x,y,z)$ — решение задачи Гурса, $R(x,y,z;\,x_0,y_0,z_0)$ — функция Римана для оператора $\mathcal{L}(\mathcal{U})$. Тогда последнее тождество можно записать в виде

$$P_x + Q_y + H_z = 0.$$

Интегрируя его по области $G_0 = \{(x,y,z) : 0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0,\ 0 < z < z_0\}$, приходим к соотношению

$$\iiint\limits_{G_0} (P_x + Q_y + H_z)dx\,dy\,dz = 0,$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты произвольной точки $M_0 \in G$. Применим к левой части этого равенства формулу Остроградского [5]. Получим тождество

$$\sum_{i=1}^{6} \mathcal{J}_i = \sum_{i=1}^{6} \iint\limits_{\mathcal{S}_i} (P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + H\,dx\,dy) = 0,$$

где $\mathcal{S}_i$, $i = \overline{1,6}$, — грани параллелепипеда G_0.

Пусть уравнение грани $\mathcal{S}_i$ есть $x = x_0$. Тогда

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{y_0} dy + \int_0^{z_0} \{2(\mathcal{U}R)_{yz} - 3[(R_z - a_1R)\mathcal{U}]_y - 3[(R_y - a_2R)\mathcal{U}]_z + 6[R_{yz} - (a_1R)_y - (a_2R)_z + b_1R]\mathcal{U}\}|_{x=x_0} dz.$$

С учетом дифференциальных свойств функции Римана и краевых условий (2)–(4) получаем

$$\mathcal{J}_1 = 2\mathcal{U}(x_0,y_0,z_0).$$

Вычисляя аналогичным образом интегралы по плоскостям $y = y_0$ и $z = z_0$, имеем

$$\mathcal{J}_2 = 2\mathcal{U}(x_0,y_0,z_0) - 2\varphi_1(y_0,z_0)R(0,y_0,z_0;x_0,y_0,z_0) +$$
$$+3\int_0^{z_0} [R_z(0,y_0,z;x_0,y_0,z_0) - a_1(0,y_0,z)R(0,y_0,z;x_0,y_0,z_0)]\varphi_1(y_0,z)dz,$$
$$\mathcal{J}_3 = 2\mathcal{U}(x_0,y_0,z_0) - 2\varphi_1(y_0,z_0)R(0,y_0,z_0;x_0,y_0,z_0) +$$
$$+3\int_0^{y_0} [R_y(0,y_0,z_0;x_0,y_0,z_0) - a_2(0,y,z_0)R(0,y_0,z_0;x_0,y_0,z_0)]\varphi_1(y,z_0)dy.$$

Пусть уравнение плоскости $\mathcal{S}_4$ есть $x = 0$. Тогда, воспользовавшись вторым представлением функции P, получим

$$\mathcal{J}_4 = -\int_0^{y_0} dy \int_0^{z_0} \{-4(\mathcal{U}R)_{yz} + 3[(R_z - a_1R)\mathcal{U}]_y + 3[(R_y - a_2R)\mathcal{U}]_z +$$
$$+6(\mathcal{U}_{yz} + a_1\mathcal{U}_y + a_2\mathcal{U}_z + b_1\mathcal{U})R\}|_{x=0} dz =$$
$$= 4\varphi_1(y_0,z_0)R(0,y_0,z_0;x_0,y_0,z_0) - 6\int_0^{y_0} dy \int_0^{z_0} [\varphi_{1yz}(y,z) + a_1(0,y,z)\varphi_{1y}(y,z) +$$
$$+a_2(0,y,z)\varphi_{1z}(y,z) + b_1(0,y,z)\varphi_1(y,z)]R(0,y,z;x_0,y_0,z_0)dz -$$
$$-3\int_0^{z_0} [R_z(0,y_0,z;x_0,y_0,z_0) - a_1(0,y_0,z)R(0,y_0,z;x_0,y_0,z_0)]\varphi_1(y_0,z)dz -$$
$$-3\int_0^{y_0} [R_y(0,y,z_0;x_0,y_0,z_0) - a_2(0,y,z_0)R(0,y,z_0;x_0,y_0,z_0)]\varphi_1(y,z_0)dy.$$

Из условий (3) и (4) следует $\mathcal{J}_5 = \mathcal{J}_6 = 0$. Подставляя найденные значения интегралов $\mathcal{J}_i$, $i = \overline{1,6}$, в тождество (6), выражая из полученного функцию $\mathcal{U}(x_0,y_0,z_0)$ и меняя переменные x_0 на x, y_0 на y, z_0 на z, y на t, z на s, приходим к формуле (5).

Если в постановке задачи Гурса на плоскостях $y = 0$ и $z = 0$ функция $\mathcal{U}(x, y, z)$ принимает значение $\varphi_2(x, z)$ и $\varphi_3(x, y)$ соответственно, то решение имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(M) = \varphi_1(0,0)R(0,0,0;M) + \int_0^x [\varphi_{3_t}(t,0) + a_3(t,0,0)\varphi_3(t,0)]R(t,0,0;M)dt +\\
+ \int_0^y [\varphi_{1_t}(t,0) + a_2(0,t,0)\varphi_1(t,0)]R(0,t,0;M)dt +\\
+ \int_0^z [\varphi_{2_s}(0,s) + a_1(0,0,s)\varphi_2(0,s)]R(0,0,s;M)ds +\\
+ \int_0^y dt + \int_0^z [\varphi_{1_{t,s}}(t,s) + a_1(0,t,s)\varphi_{1_t}(t,s) + a_2(0,t,s)\varphi_{1_s}(t,s) +\\
+ b_1(0,t,s)\varphi_1(t,s)]R(0,t,s;M)ds +\\
+ \int_0^x dt + \int_0^z [\varphi_{2_{t,s}}(t,s) + a_1(t,0,s)\varphi_{2_t}(t,s) + a_3(0,0,s)\varphi_{2_s}(t,s) +\\
+ b_2(t,0,s)\varphi_2(t,s)]R(t,0,s;M)ds +\\
+ \int_0^x dt + \int_0^y [\varphi_{3_{t,s}}(t,s) + a_1(t,s,0)\varphi_{3_t}(t,s) + a_3(t,s,0)\varphi_{3_s}(t,s) +\\
+ b_3(t,s,0)\varphi_3(t,s)]R(t,s,0;M)ds.
\end{aligned}$$

Литература

1. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассич. уравнения и уравнения смешан. типа. – Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. – С. 94–98.
2. Волкодавов В.Ф., Кадиров Г.Н. *Задачи Гурса и Дарбу для некоторых дифференциальных уравнений в трехмерных пространствах* // Куйбышевск. пед. ин-т. – Куйбышев, 1991. – Деп. в ВИНИТИ 1991. – № 3857-В91.
3. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Ф. *Функции Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и их применение.* – Самара: Изд-во Самарск. пед. ун-та, 1996. – 52 с.
4. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. *Таблицы функции Римана и Римана–Адамара для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерных евклидовых пространствах.* – Самара: Изд-во Самарск. пед. ун-та, 1994. – 32 с.
5. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 3. – М.: Наука, 1996. – 656 с.

Самарский государственный педагогический университет

Поступила 27.07.2000