ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 517.929

Т.Л. САБАТУЛИНА, В.В. МАЛЫГИНА

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данной работе изучаются вопросы устойчивости решения уравнения с *распределенным запаздыванием*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) + ax(t) + b\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ &x(\xi) = 0, \quad \xi < 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в котором параметры a, b, τ и h предполагаются постоянными.

Отметим, что в большинстве работ, посвященных устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), рассматривались уравнения с сосредоточенным запаздыванием, для которых и были получены эффективные признаки устойчивости (см. [1]–[7] и библиографию к ним). Для уравнений вида (1) признаков устойчивости значительно меньше. В работе [8] для уравнения (1) при $a = 0$ и вещественном b был получен (по-видимому, впервые) критерий асимптотической устойчивости решения. В [9]–[12] приводятся достаточные признаки устойчивости для уравнений (1) с переменными коэффициентами a, b и $\tau = 0$. Подстановка постоянных коэффициентов в их теоремы дает признаки, весьма далекие от точных.

Целью данной работы является получение критериев асимптотической устойчивости решений уравнения (1) в терминах коэффициентов исходной задачи.

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{C}$ — пространство комплексных чисел.

Определение 1. *Решением уравнения* (1) называется функция $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, абсолютно непрерывная на любом конечном отрезке и удовлетворяющая (1) почти всюду.

Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (1) однозначно разрешимо и его решение имеет представление

$$x(t) = C(t,0)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)ds, \tag{2}$$

где функция $C(t,s)$ называется *функцией Коши* уравнения (1) ([1], с. 84).

Функцию $x_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, являющуюся решением задачи

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0(t) + ax_0(t) + b\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x_0(s)ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+; \\ &x_0(0) = 1, \quad x_0(\xi) = 0, \quad \xi < 0, \end{aligned} \tag{3}$$

называют *фундаментальным решением* ([1], с. 34).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований - Урал (проект № 01-96069).

Заметим, что в силу независимости a, b, τ и h от t функции $x_0(t)$ и $C(t,s)$ связаны соотношением

$$x_0(t-s) = C(t,s). \tag{4}$$

Как следует из (2) и (4), решение уравнения (1) полностью определяется фундаментальным решением $x_0(t)$. Поэтому дальше будем изучать свойства функции $x_0(t)$, среди которых наиболее важным для нас является свойство экспоненциальной устойчивости.

Определение 2 ([1], с. 89–90). Будем говорить, что уравнение (1) *экспоненциально устойчиво*, если при некоторых положительных N и γ для любого положительного t справедлива оценка

$$|x_0(t)| \le Ne^{-\gamma t}. \tag{5}$$

Заметим, что в силу равенства (4) выполнение условия (5) эквивалентно наличию экспоненциальной оценки у функции Коши, что в свою очередь совпадает с устойчивостью уравнения (1) по правой части из пространств L_p (при $p>1$) ([2], теорема 3.3.1).

Применив к задаче (3) преобразование Лапласа, получим

$$\begin{gathered} X(p) = (g(p))^{-1}, \\ g(p) = p + a + \frac{b}{p}e^{-p\tau}(1-e^{-ph}). \end{gathered} \tag{6}$$

Согласно формуле обратного преобразования Лапласа

$$x_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{y\to\infty}\int_{\lambda-iy}^{\lambda+iy} e^{pt}\big(g(p)\big)^{-1}dp, \tag{7}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\lambda = \operatorname{Re} p$ так, чтобы $e^{pt}X(p)$ была аналитической в области $\operatorname{Re} p > \lambda$. Такая область найдется вследствие оценки на фундаментальное решение уравнения (1) ([2], с. 98, свойство 2)

$$|x_0(t)| \le e^{(|a|+|b|h)t}.$$

Заметим, что функция $g(p)$ имеет устранимую особенность при $p=0$, а при $p\ne 0$ функция $g(p)$ является аналитической. Следовательно, $X(p)$ имеет особенности (полюсы) только в тех точках, где функция $g(p)=0$.

Найдем эффективные признаки экспоненциальной устойчивости для уравнения (1), подчинив коэффициенты a и b некоторым дополнительным условиям.

Случай I. $a=0$, $b=\beta e^{i\psi}\in\mathbb{C}$.

Полагая в равенствах (1) и (6) $a=0$, получим

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + b\int\limits_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)ds = f(t), \quad t\in\mathbb{R}_+; \\ x(\xi)=0, \quad \xi<0, \end{cases} \tag{8}$$

$$g(p) = p + \frac{b}{p}e^{-p\tau}(1-e^{-ph}). \tag{9}$$

Отметим два простых свойства интегралов от функции $\frac{e^{pt}}{g(p)}$. Для доказательства этих свойств достаточно провести оценку интегралов вдоль прямых, параллельных соответственно мнимой и вещественной оси.

Лемма 1. *Для любого вещественного* μ *справедлива оценка*

$$\left| \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{e^{pt}}{g(p)} dp \right| \le N e^{\mu t}.$$

Лемма 2. *Для любых вещественных* λ *и* μ *таких, что* $\mu < \lambda < 0$, *справедливо соотношение*

$$\left| \int_{\mu+iy}^{\lambda+iy} \frac{e^{pt}}{g(p)} dp \right| \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} 0.$$

Наиболее важное для данного исследования свойство функции (9) отражает

Лемма 3. *Для того чтобы все нули функции* (9) *лежали слева от мнимой оси, необходимо и достаточно, чтобы* $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ *и выполнялось неравенство*

$$0 < \frac{\beta h^2}{2} < \left(\frac{\pi/2 - |\psi|}{2\tau/h + 1} \right)^2 \left(\sin\left(\frac{\pi/2 - |\psi|}{2\tau/h + 1} \right) \right)^{-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточность. Воспользуемся принципом аргумента ([13], с. 82). Пусть p движется по контуру K_R комплексной плоскости, состоящему из полуокружности $C_R : p = Re^{iy}$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, и отрезка $I_R : p = -iy$, $-R \le y \le R$, $R \to \infty$. Исследуем $\operatorname{Arg} g(-iy)$, где

$$\begin{aligned} v(y) &= -y + 2(\beta/y)\sin(yh/2)\sin(\psi + y(\tau + h/2)), \\ u(y) &= 2(\beta/y)\sin(yh/2)\cos(\psi + y(\tau + h/2)). \end{aligned} \tag{11}$$

При условии, что годограф не проходит через начало координат, для отсутствия нулей функции (9) справа от мнимой оси необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \operatorname{Arg} g(p) = 0$. Очевидно, что при достаточно большом R при движении по полуокружности $\Delta \operatorname{Arg} g(p) = \pi$.

Заметим, что $\Delta \operatorname{Arg} g(0) = \psi$ и докажем, что из (10) следует $\Delta \operatorname{Arg} g(p) = -\psi - \pi/2$ при движении переменной p по мнимой полуоси $0 \le y < \infty$. Здесь и далее, если не оговорено противное, приращение аргумента функции считается при изменении y от 0 до ∞.

Пусть (y_j) — монотонно возрастающая последовательность нулей функции u: для любого $j \in \mathbb{N}$ $u(y_j) = 0$, $y_{j+1} > y_j > 0$; пусть $v_j = v(y_j)$. Ввиду того, что $\lim\limits_{y\to+\infty} v(y) = -\infty$ и u — ограниченная функция от y, утверждение, что $v_j < 0$ при всех $j \in \mathbb{N}$, влечет $\Delta \operatorname{Arg} g(-iy) = -\pi/2$.

Рассмотрим предельное положение годографа $g(-iy)$, т. е. положение, при котором первое пересечение годографа с мнимой осью происходит в начале координат. Из (11) следует, что в этом случае

$$y_1 = \frac{2}{h}\left(\frac{\pi/2 - |\psi|}{2\tau/h + 1} \right) \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2}{h^2}\left(\frac{\pi/2 - |\psi|}{2\tau/h + 1} \right)^2 \left(\sin\left(\frac{\pi/2 - |\psi|}{2\tau/h + 1} \right) \right)^{-1}.$$

Покажем, что если выполняется (10), то $v_j < 0$ при любом $j \in \mathbb{N}$. Пересечения годографа с мнимой осью происходят в точках вида $y_n^* = \frac{\pi(1+2n) - 2\psi}{2\tau + h}$, $n \in \mathbb{N}_0$, а также $y_k^{**} = 2\pi k/h$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $v(y_n^*) = v_n^*$, $v(y_k^{**}) = v_k^{**}$. Очевидно, $v_k^{**} < 0$ при любых $k \in \mathbb{N}$, β, h и τ. Условие $v_n^* < 0$ равносильно условию

$$(-1)^n \sin\left(\frac{(\pi/2)(1+2n) - \psi}{2\tau/h + 1} \right) < \frac{(\pi(1+2n) - 2\psi)^2}{2\beta(2\tau + h)^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{12}$$

Пусть, например, $\sin\left(\frac{(\pi/2)(1+2n) - \psi}{2\tau/h + 1}\right) > 0$ (противоположное неравенство рассматривается аналогично), тогда при нечетных n неравенство (12), очевидно, выполняется. Если $n = 0$, то справедливость (12) следует непосредственно из условия леммы 1. При $n \ne 0$, используя условия леммы, получим

$$\beta \sin\left(\frac{(\pi/2)(1+2n) - \psi}{2\tau/h + 1} \right) < \frac{4(\pi/2 - |\psi|)^2}{2h^2(2\tau/h + 1)^2} \frac{\sin\left(\frac{(\pi/2)(1+2n) - \psi}{2\tau/h + 1} \right)}{\sin\left(\frac{\pi/2 - |\psi|}{2\tau/h + 1} \right)} = A.$$

В силу условия $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$ имеем $\frac{\pi/2-|\psi|}{2\tau/h+1} \in (0, \pi/2]$ и $\frac{(\pi/2)(1+2n)-\psi}{2\tau/h+1} > \frac{\pi/2-|\psi|}{2\tau/h+1}$ при любых $h > 0$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, нетрудно видеть, что функция $\sin x/x^2$ убывает при $x \in (0, 3\pi/2)$ и $\sin\xi/\xi^2 > \sin\zeta/\zeta^2$ при $\xi \in (0, \pi/2)$ и $\zeta \in [\pi/2, \infty)$. Поэтому

$$A < \frac{2((\pi/2)(1+2n)-\psi)^2}{h^2(2\tau/h+1)^2}.$$

Значит, (12) выполняется при любых $n \in \mathbb{N}_0$.

Таким образом, $v_n^* < 0$ при любых $n \in \mathbb{N}_0$. Итак, при условии (10) $v_j < 0$ при любом $j \in \mathbb{N}$, а значит, $\Delta \operatorname{Arg} g(-iy) = -\psi - \pi/2$ при изменении аргумента y от 0 до ∞. Аналогично доказывается, что при изменении y от $-\infty$ до 0 $\Delta \operatorname{Arg} g(-iy) = \psi - \pi/2$. Поэтому при изменении y от $-\infty$ до ∞ имеем $\Delta \operatorname{Arg} g(-iy) = -\pi$. Следовательно, при движении по рассматриваемому контуру $\Delta \operatorname{Arg} g(p) = 0$, и в правой полуплоскости и на мнимой оси функция (9) не имеет нулей.

Необходимость. Возьмем контур K_R, описанный в доказательстве достаточности. Известно, что внутри него нет нулей функции $g(p)$, значит, $\Delta \operatorname{Arg} g(p) = 0$. Очевидно, что при достаточно большом R при движении по полуокружности $\Delta \operatorname{Arg} g(p) = \pi$. Поэтому при движении по отрезку I_R имеем $\Delta \operatorname{Arg} g(-iy) = -\pi$, что возможно лишь при справедливости условия (10). В этом можно убедиться, проведя рассуждения из доказательства достаточности в обратную сторону. $\square$

Лемма 4. *Уравнение* (8) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда все нули функции* (9) *лежат слева от мнимой оси, при этом существует такое* $\mu < 0$, *что справедлива оценка*

$$|x_0(t) - F(t)| \le N e^{\mu t},$$

$$F(t) = \sum_{k=1}^{s_1} M_k e^{\operatorname{Re} z_k t} + \sum_{l=1}^{s_2} (A_l t + B_l) e^{\operatorname{Re} z_l t} + \sum_{m=1}^{s_3} (C_m t^2 + D_m t + E_m) e^{\operatorname{Re} z_m t}, \tag{13}$$

где M_k, A_l, B_l, C_m, D_m, E_m, N *— некоторые константы,* z_k *— простые полюсы,* z_l *— полюсы второго порядка,* z_m *— полюсы третьего порядка.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что уравнение (8) экспоненциально устойчиво. Тогда для $x_0(t)$ справедлива оценка (5), а значит, ее преобразование Лапласа $X(p)$ является аналитической функцией в правой полуплоскости, включая мнимую ось. Следовательно, особые точки $X(p)$, т. е. нули функции (9), лежат только слева от мнимой оси.

Достаточность. Предположим, что все нули функции (9) лежат слева от мнимой оси. Введем прямоугольник $ABCD$, содержащий в себе первые s нулей (9) с одинаковой наибольшей действительной частью. Сторона AB задается уравнением $\operatorname{Re} p = \lambda < 0$ и проводится так, чтобы эти нули оказались слева от нее (это возможно в силу [3], с. 446, теорема 12.8), A находится ниже действительной оси. Сторона CD задается уравнением $\operatorname{Re} p = \mu < \lambda$.

Разобьем интеграл $\int\limits_{ABCD} X(p)e^{pt}dp$ на четыре интеграла:

$$I_1 = \int_{AB} X(p)e^{pt}dp, \quad I_2 = \int_{BC} X(p)e^{pt}dp, \quad I_3 = \int_{CD} X(p)e^{pt}dp, \quad I_4 = \int_{DA} X(p)e^{pt}dp.$$

Применив лемму 2 к I_2 и I_4, получим $|I_2| \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ и $|I_4| \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$. Для интеграла I_3 справедлива лемма 1. По теореме о вычетах ([13], с. 79) можно записать

$$\int_{ABCD} e^{pt} X(p)dp = 2\pi i \sum_{n=1}^{s} \operatorname{res}_{z_n} e^{zt} X(z),$$

где z_n — особые точки (нули функции (9)), лежащие внутри $ABCD$.

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что нули функции (9) z_n не выше третьего порядка. Используя формулы вычисления вычетов с учетом кратности полюсов ([13], с. 78), имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = F(t). \tag{14}$$

Из (7) видно, что $x_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim\limits_{y\to\infty} I_1$. Учитывая оценку для I_3, из (14) получим

$$|x_0(t) - F(t)| \le Ne^{\mu t} + |I_2| + |I_4|.$$

Наконец, устремляя y к бесконечности, получим оценку (13). $\square$

Из лемм 3, 4 и равенства (4) вытекает

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

a) *уравнение* (8) *экспоненциально устойчиво*;
b) *существуют* $N > 0$ *и* $\gamma > 0$ *такие, что при всех* t *и* s, *удовлетворяющих неравенству* $t \ge s \ge 0$, *для функции Коши уравнения* (1) *справедлива оценка*

$$|C(t,s)| \le Ne^{-\gamma(t-s)};$$

c) *для коэффициента* $b = \beta e^{i\psi}$ *выполнены неравенства* $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ *и* (10).

На рис. 1 изображена в параметрах bh^2, τ область экспоненциальной устойчивости уравнения (8). Видно, что она симметрична относительно действительной оси и ее граница гладкая за исключением точек, принадлежащих области при $\psi = 0$, но $bh^2 \ne 0$.

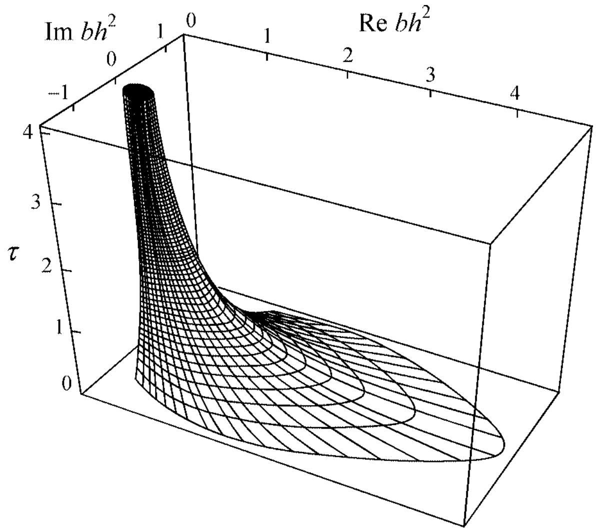

Рис. 1

Теорему 1 нетрудно обобщить на случай системы линейных автономных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) + B\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)ds = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+; \\ &x(\xi) = 0, \quad \xi < 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2 ([14]). *Система дифференциальных уравнений* (15) *экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда для любого собственного числа* $\lambda = |\lambda|e^{i\psi}$ *матрицы* B *выполнены неравенства* $-\pi/2 < \psi < \pi/2$ *и* (10) *при* $\beta = |\lambda|$.

Сравним критерий, полученный в теореме 1, с известными результатами. Перепишем уравнение (8), положив $b = \varepsilon/h$ и $f(t) \equiv 0$,

$$\dot{x}(t) + \frac{\varepsilon}{h}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{16}$$

Если ε — вещественное число, то из теоремы 1 получается известный критерий асимптотической устойчивости скалярного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием.

Следствие 1 ([8]). Уравнение (16) экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 < \varepsilon < \pi^2 h \Big/ \left(2(2\tau + h)^2 \sin\frac{\pi h}{2(2\tau + h)}\right).$$

Если в (16) перейти к пределу при $h \to 0$, то теорема 1 переходит в другой известный критерий экспоненциальной устойчивости линейного дифференциального уравнения с постоянным сосредоточенным запаздыванием.

Следствие 2 ([15]). Уравнение $\dot{x}(t)+\varepsilon x(t-\tau) = 0$ экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда для коэффициента $\varepsilon = |\varepsilon|e^{i\psi}$ справедливы неравенства

$$-\pi/2 < \psi < \pi/2, \quad 0 < |\varepsilon|\tau < \pi/2 - |\psi|.$$

Случай II. $a \in \mathbb{R}$, $b = \beta e^{i\psi} \in \mathbb{C}$.

Поверхность

$$\Gamma_1 = \begin{cases} ah = \frac{2\theta}{2\tau/h+1}\operatorname{ctg}(\psi - \theta), \\ \beta h^2 = -\frac{2\theta^2}{(2\tau/h+1)^2 \sin\left(\frac{\theta}{2\tau/h+1}\right)\sin(\psi-\theta)}, \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R},$$

разбивает пространство параметров ah, bh^2, τ/h на отдельные открытые множества. Множество, содержащее в себе область экспоненциальной устойчивости решения уравнения (8), обозначим D_1 (не содержит Γ_1). При $\tau = 0$ на рис. 2 изображено множество D_1, при этом закрашена область экспоненциальной устойчивости решения уравнения (8) (при $\tau > 0$ вид криволинейного конуса D_1 существенно не изменится: его вершина сдвигается вверх, а сам конус непрерывно деформируется).

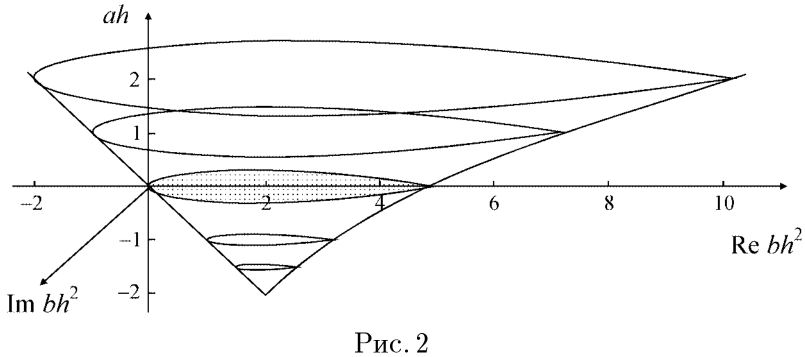

Рис. 2

Лемма 5. *Для того чтобы все нули функции $g(p)$ лежали слева от мнимой оси, необходимо и достаточно, чтобы точка с координатами $\{ah, bh^2, \tau/h\}$ принадлежала D_1.*

Доказательство. Снова воспользуемся принципом аргумента. В данном случае

$$v(y) = -y + 2(\beta/y)\sin(yh/2)\sin(\psi + y(\tau + h/2)),$$
$$u(y) = a + 2(\beta/y)\sin(yh/2)\cos(\psi + y(\tau + h/2)).$$

Заметим, что $v = 0$ и $u = 0$ тогда и только тогда, когда совокупность параметров ah, bh^2, τ/h принадлежит Γ_1.

Допустим, что при некоторых параметрах ah, bh^2, τ/h (из D_1) функция $g(p)$ имеет хотя бы один нуль справа от мнимой оси. Так как $g(p)$ непрерывна и D_1 содержит область экспоненциальной устойчивости решения уравнения (8) (для этой области нули лишь слева от мнимой оси), то найдутся ah, bh^2, τ/h (из D_1), для которых нули функции $g(p)$ ($v = 0$, $u = 0$) лежат на мнимой оси, т. е. точка с координатами $\{ah, bh^2, \tau/h\}$ принадлежит Γ_1. Но Γ_1 не содержится в D_1, значит, допущение неверно. □

Для данного случая нетрудно установить справедливость аналогов лемм 1,2 и 4. Поэтому с учетом леммы 5 и равенства (4) получается

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

a) *уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво;*
b) *существуют $N > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что при всех t и s, удовлетворяющих неравенству $t \geq s \geq 0$, для функции Коши уравнения* (1) *справедлива оценка*

$$|C(t,s)| \leq Ne^{-\gamma(t-s)};$$

c) *параметры a, b, h, τ уравнения* (1) *таковы, что $\{ah, bh^2, \tau/h\} \in D_1$.*

Проведем сравнение с известными результатами. В уравнении (1) снова положим $b = \varepsilon/h$ и $f(t) \equiv 0$:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \frac{\varepsilon}{h}\int_{t-\tau-h}^{t-\tau} x(s)ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{17}$$

Если ε — вещественное число, то перейдя в (17) к пределу при $h \to 0$, из теоремы 3 получим известный критерий асимптотической устойчивости скалярного дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием.

Следствие 3 ([5], с. 57; [16]). Уравнение $\dot{x}(t) + ax(t) + \varepsilon x(t - \tau) = 0$ экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда параметры a, ε, τ таковы, что $\{a\tau, \varepsilon\tau\} \in D$, где D — область, содержащая положительную полуось $a\tau$ и ограниченная линиями $a + \varepsilon = 0$ и $a\tau = -\theta\operatorname{ctg}\theta$, $\varepsilon\tau = \theta/\sin\theta$ $(0 \leq \theta < \pi)$.

Случай III. $a = \alpha e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$.

Поверхность

$$\Gamma_2 = \begin{cases} \alpha h = -\frac{2\theta}{2\tau/h+1}\,\frac{\cos\theta}{\sin(\varphi+\theta)}, \\ bh^2 = \frac{2\theta^2\cos\varphi}{(2\tau/h+2)^2\sin\left(\frac{\theta}{2\tau/h+1}\right)\sin(\varphi+\theta)}, \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R},$$

разбивает пространство параметров ah, bh^2, τ/h на отдельные открытые множества. Множество, содержащее в себе область экспоненциальной устойчивости решения задачи (8) при $b \in \mathbb{R}$, а также область экспоненциальной устойчивости решения обыкновенного дифференциального уравнения ($b = 0$), обозначим D_2 (не содержит Γ_2). На рис. 3 изображена область D_2 при фиксированных bh^2.

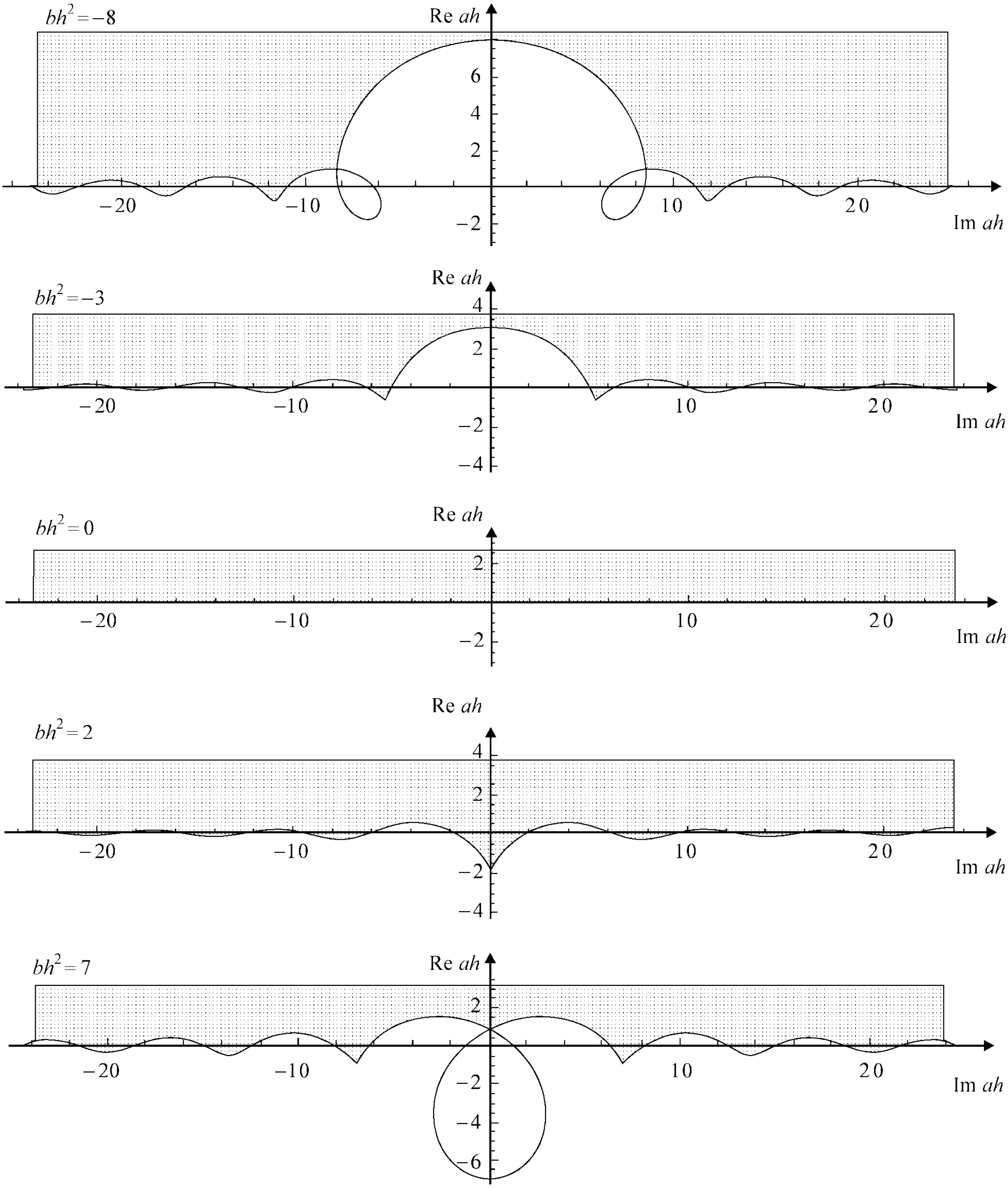

Рис. 3.

Повторив рассуждения, проведенные в лемме 5, и доказав аналоги лемм 1, 2 и 4, получим итоговый результат.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны*:

a) *уравнение* (1) *экспоненциально устойчиво*;

b) *при некоторых положительных* N *и* γ *для любых* t *и* s *таких, что* $t \geq s \geq 0$, *справедлива* *оценка на функцию Коши*

$$|C(t,s)| \le Ne^{-\gamma(t-s)};$$

c) *параметры a, b, h, τ уравнения* (1) *таковы, что* $\{ah, bh^2, \tau/h\} \in D_2$.

В работе ([4], с. 92, следствие 3.4) был получен критерий асимптотической устойчивости уравнения $\dot{x}(t) + ax(t) + \varepsilon x(t-\tau) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, с комплексными коэффициентами a и ε, которое, как уже отмечалось выше, может быть получено из уравнения (17) предельным переходом при $h \to 0$. Этот критерий совпадает с признаками устойчивости, которые дают теоремы 3 и 4, если положить в них $b = \varepsilon/h$ и перейти к пределу при $h \to 0$.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными.* – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.
3. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М: Мир, 1967. – 548 с.
4. Кирьянен А.И. *Устойчивость систем с последействием и их приложения.* – СПб.: Изд-во С.-Петербургс. ун-та, 1994. – 240 с.
5. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Stability of functional differential equations.* – London: Academic Press, Inc., 1986. – 232 p.
6. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М.: Наука, 1972. – 352 с.
7. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
8. Вагина М.Ю. *Логистическая модель с запаздывающим усреднением* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 4. – С. 167–173.
9. Burton T.A. *Liapunov's direct method for delay equations* // Proc. 11^{th} International Conference nonlinear oscillations. – Budapest, 1987. – P. 26–33.
10. Burton T.A., Hatvani L. *On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations* // Diff. and Integral Equat. – 1990. – V. 3. – P. 285–293.
11. Sugie J. *Oscillation solutions of scalar delay-differential equations with state dependence* // Applic. Anal. – V. 27. – P. 217–227.
12. Щеглов В.А. *Устойчивость линейного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 12. – С. 1665–1669.
13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*: Учеб. пособие для ун-тов. – М: Наука, 1987. – 688 с.
14. Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. *Об асимптотической устойчивости одного класса систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием* // Вычислит. механ. – Сб. научн. тр. – Изд. ПГТУ. – 2006. – № 4. – С. 27–34.
15. Рехлицкий З.И. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – № 1. – С. 29–32.
16. Андронов А.А., Майер А.Т. *Простейшие линейные системы с запаздыванием* // Автоматика и телемеханика. – 1946. – Т. 7. – № 2, 3. – С. 95–106.

Пермский государственный технический университет

Поступила 21.03.2006