ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 517.977.56

Е.В. ВАСИЛЬЕВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КЛАССИФИКАЦИИ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В данной статье рассматривается задача классификации допустимых мгновенных управлений для динамической системы параболического типа. Критерием классификации является знак производной времени быстродействия в направлении локального сдвига системы, соответствующего данному постоянному управлению. Задачи подобного типа исследуются в рамках теории чувствительности оптимального управления и параметрической оптимизации ([1]).

Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) + u(t,x), && t\in\theta=[0,T_0], \quad x\in\Omega=(0,l), \\ v(0,x) &= v_0(x), && x\in\Omega, \quad v_0\in L_2(\Omega), \\ v(t,0) &= v(t,l)=0, && t\in\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

В качестве допустимых управлений используются функции $u(t,x)$ из множества $\mathcal{U}=\{u(\cdot,\cdot)\in L_2(\theta\times\Omega): u(t,\cdot)\in U$ почти для всех $t\in\theta\}$, где $U=\{f\in L_2(\Omega): |f(x)|\le 1$ почти для всех $x\in\Omega\}$, что соответствует поточечному ограничению на управление. Возможен и другой выбор множества допустимых управлений, соответствующий интегральному ограничению $\mathcal{U}_*=\{u(\cdot,\cdot)\in L_2(\theta\times\Omega): u(t,\cdot)\in U_*$ почти для всех $t\in\theta\}$, где $U_*=\{f\in L_2(\Omega): \|f(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}\le 1\}$. Этот случай рассмотрен в замечании в конце статьи.

Будем пользоваться обычными обозначениями и понятиями (см., напр., [2]). В частности, через $H^1(\Omega)$ обозначается пространство Соболева $W^{1,2}(\Omega)$, а через $H_0^1(\Omega)$ — замыкание в метрике пространства $H^1(\Omega)$ множества гладких функций, определенных на $\overline{\Omega}$ и равных нулю на $\partial\Omega$. Используются обозначения $H=L_2(\Omega)$, $V=H_0^1(\Omega)$, $|h|=\|h\|_H$. Пространство H можно отождествить со своим сопряженным $H=H^*$, поэтому справедливо включение $V\subset H\subset V^*$. Как обычно, через $\langle w,v\rangle$ обозначается значение функционала $w\in V^*$ на элементе $v\in V$.

Пусть A — оператор, действующий из V в V^* по правилу $\langle Av,w\rangle=-\int\limits_0^l v'(x)w'(x)dx\ \forall v,w\in V$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\dot v(t)=Av(t)+u(t), \quad t\in\theta, \qquad v(0)=v_0\in H, \tag{2}$$

где $\dot v(\cdot)$ — производная от $v(\cdot)$ в смысле распределений ([3], с. 43). Как показано в ([2], с. 115), существует единственная функция $v(\cdot)=v(\cdot;u(\cdot),v_0)$, удовлетворяющая соотношениям (2) и условию $v(\cdot)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(\cdot)\in L_2(\theta\times\Omega)$. При этом функция $v(t)$ непрерывна в пространстве H.

Пусть $s\in V$, $s>0$, $As\in H$ и $c\ge(s,v_0)$. Здесь и далее через (h_1,h_2) обозначается скалярное произведение элементов h_1, h_2 в пространстве H. Заметим, что функция $t\to(s,v(t;u(\cdot),v_0))$ непрерывна на промежутке θ для любых $v_0\in H$, $u(\cdot)\in L_2(\theta;H)$. Пусть $T(v_0)\in\theta$ — наименьший момент времени такой, что $(s,v(T(v_0);u(\cdot),v_0))\ge c$ для некоторого $u(\cdot)\in\mathcal{U}$. Если для данного

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-01060) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0816).

v_0 такого момента не существует, положим $T(v_0) = +\infty$. Таким образом, получим функцию $T : H \to [0, +\infty]$.

Далее, рассмотрим для произвольных $v_0, w_0 \in H$ функцию

$$\beta(\delta; v_0, w_0) = [T(v(\delta; w(\cdot), v_0)) - T(v_0)]/\delta,$$

где $w(t) = w_0$ для всех $t \geq 0$. Если предел $\lim\limits_{\delta \to 0} \beta(\delta; v_0, w_0)$ существует, обозначим его $T'(v_0, w_0)$. Величина $T'(v_0, w_0)$ является производной времени быстродействия в направлении локального сдвига системы (1), соответствующего постоянному управлению w_0. Требуется исследовать множества

$$U_+(v_0) = \{u \in U : T'(v_0, u) > 0\},$$
$$U_0(v_0) = \{u \in U : T'(v_0, u) = 0\},$$
$$U_-(v_0) = \{u \in U : T'(v_0, u) < 0\}.$$

Цель этой работы — получить явные формулы для описания множеств $U_+(v)$, $U_0(v)$ и $U_-(v)$.

Для поставленной задачи возможна следующая интерпретация. Пусть функция $v(t, x)$ описывает распределение некоторого вредного вещества в какой-то среде (воздухе, водоеме и т. д.) в момент времени t; $u(t, x)$ — интенсивность источника загрязнения. Предполагается, что интенсивность источника не может превышать в каждой точке заданного значения; это соответствует выбору управлений из множества $\mathcal{U}$ (интегральному ограничению соответствует множество $\mathcal{U}_*$). Уравнение (1) описывает динамику распространения примеси $v(t, x)$ при наличии источника загрязнения $u(t, x)$. Если показатель (s, v) достигнет критического значения c, то наступит экологическая катастрофа. Значение $T(v)$ можно интерпретировать как время до наступления катастрофы при наиболее неблагоприятной для нас интенсивности источника загрязнения, а величину $T'(v, u)$ — как скорость изменения этого времени при данной постоянной интенсивности источника $u(t) \equiv u$. Ситуация $T'(v, u) > 0$ благоприятна, т. к. время до наступления катастрофы увеличивается; в случае $T'(v, u) < 0$ ситуация неблагоприятна. Таким образом, критерием для разбиения множества возможных мгновенных интенсивностей источника U при данном распределении примеси v является знак $T'(v, u)$.

Приступим к решению сформулированной задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad x \in [0, l]; \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Функции $e_k(x) = \sqrt{2/l}\,\sin(\pi k x/l)$ являются решениями этой задачи, соответствующими собственным значениям $\lambda_k = -(\pi k/l)^2$, и образуют в пространстве H полную ортонормированную систему, а в пространствах V и V^* — полную ортогональную систему. Поэтому справедливы следующие утверждения:

1) для любого элемента $h \in H$ существует и единственно разложение $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k e_k$, ряд сходится в пространстве H; при этом $h_k = (h, e_k)$, $|h|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k^2$;
2) для любого элемента $v \in V$ существует и единственно разложение $v = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k e_k$, ряд сходится в пространстве V; при этом $v_k = (v, e_k)$, $\|v\|_V^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda_k) v_k^2$;
3) для любого элемента $w \in V^*$ существует и единственно разложение $w = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k e_k$, ряд сходится в пространстве V^*; при этом $w_k = \langle w, e_k \rangle$, $\|w\|_{V^*}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k^2/(1 - \lambda_k)$.

Далее нетрудно доказать следующие факты.

1. Для любых элементов $w \in V^*$, $v \in V$ верно равенство $\langle w, v\rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k v_k$, где $w_k = \langle w, e_k\rangle$, $v_k = (v, e_k)$.
2. Для любого элемента $v \in V$ верно равенство $\frac{\partial v}{\partial x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k \frac{\partial e_k}{\partial x}$, ряд сходится в пространстве H. При этом $|\frac{\partial v}{\partial x}|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k^2$.
3. Для любого элемента $v \in V$ верно равенство $Av = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k e_k$, ряд сходится в пространстве V^*. При этом $\|\frac{\partial v}{\partial x}\|_{V^*}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 v_k^2/(1-\lambda_k)$.
4. Для любого элемента $v \in V$, если $A^2 v \in H$, то верно равенство $A^2 v = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 v_k e_k$, ряд сходится в пространстве H.

Приведенные факты используются ниже без явных ссылок на них.

Лемма 1. *Пусть $A^2 v_0 \in H$. Если $T(v_0) \in \theta$, функция $T(v)$ дифференцируема по Фреше в точке v_0, то производная $T'(v_0, w)$ определена для любого $w \in H$ такого, что $Aw \in H$, и имеет место формула*

$$T'(v_0, w) = (DT(v_0), Av_0 + w). \tag{3}$$

Здесь символ $DT(v_0)$ означает производную Фреше функции $T(v)$ в точке v_0.

Доказательство. Применим метод Фурье по системе $\{e_k\}$ к уравнению (2). Получим систему уравнений

$$\dot{v}_k(t) = \lambda_k v_k(t) + u_k(t), \quad t \in \theta, \ \ k = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

с начальным условием $v_k(0) = v_{k,0}$. Здесь $v_k(t) = (v(t), e_k)$, $u_k(t) = (u(t), e_k)$, $v_{k,0} = (v_0, e_k)$ — коэффициенты Фурье соответствующих функций. Решение каждого из уравнений системы (4) записывается в виде

$$v_k(t) = e^{\lambda_k t} v_{k,0} + \int_0^t e^{\lambda_k (t-\tau)} u_k(\tau) d\tau, \tag{5}$$

поэтому

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} v_{k,0} e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} u_k(\tau) d\tau \, e_k. \tag{6}$$

Пусть теперь для всех $t \in \theta$ $u(t) = w$, $w \in H$. Тогда решение $v(t)$, соответствующее этому управлению, выражается формулой

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} v_{k,0} e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} w_k d\tau \, e_k,$$

где $w_k = (w, e_k)$. Следовательно,

$$v(\delta; w(\cdot), v_0) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k \delta} v_{k,0} e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} (e^{\lambda_k \delta} - 1) w_k e_k.$$

Учитывая соотношения

$$e^{\lambda_k \delta} = 1 + \lambda_k \delta + \lambda_k^2 \delta_k^2/2 \ \text{ для некоторого } \ \delta_k \in (0, \delta),$$

$$v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,0} e_k, \quad Av_0 = \sum_{k=1}^{\infty} v_{k,0} \lambda_k e_k, \quad w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k e_k,$$

заключаем, что

$$v(\delta; w(\cdot), v_0) = v_0 + \delta(Av_0 + w) + \eta,$$

где

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \delta_k^2 v_{k,0} e_k/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta_k^2 w_k e_k/2.$$

Отметим, что

$$|\eta| \le \frac{1}{2}\delta^2(|A^2 v_0| + |Aw|). \tag{7}$$

Функция $T(v)$ дифференцируема по Фреше в точке v_0, поэтому

$$T(v(\delta; w(\cdot), v_0)) - T(v_0) = (DT(v_0), \delta(Av_0 + w) + \eta) + o(|\delta(Av_0 + w) + \eta|).$$

Следовательно,

$$\beta(\delta; v_0, w_0) = (DT(v_0), Av_0 + w) + \lim_{\delta \to 0} \left\{ (DT(v_0), \eta/\delta) + \delta^{-1} o(|\delta(Av_0 + w) + \eta|) \right\},$$

откуда, используя (7), получаем равенство (3). $\square$

В формулировке следующей леммы используется решение системы

$$\dot{r}(t) = Ar(t), \quad r(0) = s. \tag{8}$$

Лемма 2. *Задача оптимального быстродействия для уравнения* (2) *разрешима тогда и только тогда, когда уравнение*

$$(r(T), v_0) + \int_0^T \|r(t)\|_{L_1(\Omega)} dt = c \tag{9}$$

имеет решение $T \in \theta$. При этом $T(v_0)$ — наименьший неотрицательный корень этого уравнения.

Доказательство. Пусть задача оптимального быстродействия разрешима, $T(v_0)$ — время быстродействия, $u_0(\cdot)$ — оптимальное управление. Тогда для любого $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ верно неравенство

$$(s, v(T(v_0); u_0(\cdot), v_0)) \ge (s, v(T(v_0); u(\cdot), v_0)).$$

Из ([2], с. 257) следует, что

$$u_0(t, x) = \operatorname{sgn} r(T(v_0) - t, x) \quad \text{почти для всех} \quad (t, x) \in (0, T(v_0)) \times \Omega. \tag{10}$$

Заметим, что решение системы (8) имеет вид

$$r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k t} e_k, \tag{11}$$

где $s_k = (s, e_k)$. Из равенства $(s, v(T(v_0); u_0(\cdot), v_0)) = c$, используя соотношения (6), (10) и (11), выводим равенство (9) с $T = T(v_0)$. Далее, предположим, что уравнение (9) имеет другой корень $T \in (0, T(v_0))$. Пусть $u(t, x) = \operatorname{sgn} r(T - t, x)$, $(t, x) \in \theta \times \Omega$. Тогда $(s, v(T; u(\cdot), v_0)) = c$, т.е. указанное управление $u(\cdot)$ переводит систему (2) на целевое множество за время, меньшее $T(v_0)$, что противоречит оптимальности $T(v_0)$. Таким образом, $T(v_0)$ — наименьший положительный корень уравнения (9).

Обратно, пусть уравнение (9) имеет корень $T \in \theta$. Определим управление в (1) по правилу $u(t, x) = \operatorname{sgn} r(T - t, x)$. Легко проверить, что определенное таким образом управление является допустимым. Для коэффициентов Фурье решения уравнения (2), порожденного этим управлением, справедливо следующее соотношение:

$$v_k(T) = e^{\lambda_k T} v_{k,0} + \int_0^T e^{\lambda_k (T-t)} \int_0^l u(t, x) e_k(x) dx\, dt,$$

откуда выводим

$$(s, v(T)) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k v_k(T) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k T} v_{k,0} + \int_0^T \int_0^l |r(T-t,x)| dx\, dt =$$

$$= (r(T), v_0) + \int_0^T \|r(t)\|_{L_1(\Omega)} dt = c,$$

следовательно, систему (2) можно привести на целевое множество за время T. Используя схему доказательства теоремы 17.1 ([2], с. 260), можно доказать, что в этом случае задача оптимального быстродействия разрешима, причем $T(v_0) \le T$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $u(\cdot)$ — оптимальное управление в задаче быстродействия для уравнения (2), $v(\cdot)$ — решение (2), соответствующее этому управлению, T — время быстродействия, $r(\cdot)$ — решение системы (8). Тогда функция*

$$f(t) = \langle Av(t), r(T-t)\rangle + \|r(T-t)\|_{L_1(\Omega)}$$

постоянна и неотрицательна на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Введем обозначения

$$f_1(t) = \langle Av(t), r(T-t)\rangle, \quad f_2(t) = \|r(T-t)\|_{L_1(\Omega)}.$$

Тогда $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$. Учитывая (5) и (11), выводим $f_1(t) = f_{11} + f_{12}(t)$, где

$$f_{11} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k s_k v_{k,0} e^{\lambda_k T}, \qquad f_{12}(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k s_k e^{\lambda_k (T-\tau)} u_k(\tau) d\tau.$$

Ряд, представляющий f_{11}, сходится, т. к.

$$\Big| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k s_k v_{k,0} e^{\lambda_k T} \Big| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \lambda_k^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} v_{k,0}^2 e^{2\lambda_k T} \Big)^{1/2} \le |As|\,|v_0|.$$

Далее, из принципа максимума для оптимального управления ([2], с. 257) следует

$$u(t,x) = u_T(t,x) \quad \text{почти для всех} \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega.$$

Здесь и далее принято обозначение

$$u_T(t,x) = \operatorname{sgn} r(T-t,x).$$

Следовательно,

$$f_{12}(t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k s_k e^{\lambda_k (T-\tau)} u_{T,k}(\tau) d\tau, \tag{12}$$

где $u_{T,k}(t) = (u_T(t), e_k)$. Из (12) следует, что почти для всех $t \in [0, T]$

$$f_{12}'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k s_k e^{\lambda_k (T-t)} u_{T,k}(t). \tag{13}$$

Пусть $t_1 > t_2,\ t_1, t_2 \in [0, T]$. Тогда

$$|f_2(t_2) - f_2(t_1)| = \big| \|r(T-t_2)\|_{L_1(\Omega)} - \|r(T-t_1)\|_{L_1(\Omega)} \big| \le$$

$$\le \|r(T-t_2) - r(T-t_1)\|_{L_1(\Omega)} = \Big\| \int_{T-t_1}^{T-t_2} \dot r(t) dt \Big\|_{L_1(\Omega)} \le \int_{T-t_1}^{T-t_2} \|\dot r(t)\|_{L_1(\Omega)} dt.$$

Используя оценку

$$\|\dot r(t)\|^2_{L_1(\Omega)} \le l|\dot r(t)|^2 = l\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2\lambda_k^2 e^{2\lambda_k t} \le l\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2\lambda_k^2 \le |As|^2,$$

заключаем, что

$$|f_2(t_2) - f_2(t_1)| \le (t_1 - t_2)l^{1/2}|As| \le (t_1 - t_2)l^{1/2}|As|.$$

В силу последней оценки функция $f_2(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$, поэтому она почти всюду дифференцируема.

Пусть в точке $t = t_1$ выполняется (13) и существует производная $f_2'(t_1)$. Для всех $t_2 \in (t_1, T)$ имеем

$$f(t_2) - f(t_1) = f_1(t_2) - f_1(t_1) + (r(T - t_2), u_T(t_2)) - (r(T - t_1), u_T(t_1)) \ge$$
$$\ge f_1(t_2) - f_1(t_1) + (r(T - t_2) - r(T - t_1), u_T(t_1)).$$

Поэтому

$$f'(t_1) \ge f_1'(t_1) + \lim_{t_2\to t_1}(r(T - t_2) - r(T - t_1), u_T(t_1))/(t_2 - t_1). \tag{14}$$

Рассмотрим функцию $m(t) = (r(T - t), u_T(t_1))$, $t \in [0, T]$. В силу (11)

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k(T-t)} h_k,$$

где $h_k = u_{T,k}(t_1)$. Используя оценку

$$\Big| -\sum_{k=1}^{\infty} s_k\lambda_k e^{\lambda_k(T-t)} h_k\Big| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2\lambda_k^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\lambda_k(T-t)} h_k^2\Big)^{1/2} \le |As|\,|u_T(t_1)|,$$

заключаем, что $m(t)$ дифференцируема всюду на $[0, T]$ и

$$m'(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k s_k e^{\lambda_k(T-t)} h_k.$$

Поэтому

$$\lim_{t_2\to t_1}(r(T - t_2) - r(T - t_1), u_T(t_1))/(t_2 - t_1) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k s_k e^{\lambda_k(T-t_1)} u_{T,k}(t_1). \tag{15}$$

Учитывая (13)–(15), выводим $f'(t_1) \ge 0$. Таким образом, $f'(t) \ge 0$ почти всюду на [0,T]. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $f'(t) \le 0$ почти всюду на $(0, T)$. Следовательно, $f(t)$ постоянна на $[0, T]$.

Докажем, что $f(t) \ge 0$. Для этого рассмотрим функцию $p(t) = (v(t), s)$, $t \in [0, T]$. В теореме 1.17 ([3], с. 177) доказано, что

$$(v(T) - v(t), s) = \int_t^T \langle \dot v(t), s\rangle\, dt.$$

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$p(T) - p(t) = \int_t^T q(\tau)d\tau, \tag{16}$$

где $q(t) = \langle Av(t) + u_T(t), s\rangle$.

Докажем, что $q(t)$ непрерывна при $t = T - 0$. Имеем

$$q(t) = (v(t), As) + (u_T(t), s).$$

Первое слагаемое непрерывно в силу свойств решения (2). Обратимся ко второму слагаемому:

$$(u_T(t), s) - (u_T(T), s) = (u_T(t), s - r(T-t)) + (u_T(t), r(T-t)) - (u_T(T), s) = \\ = (u_T(t), r(0) - r(T-t)) + \|r(T-t)\|_{L_1(\Omega)} - \|r(0)\|_{L_1(\Omega)}.$$

Поскольку

$$|(u_T(t), r(T-t) - r(0))| \leq l^{1/2} |r(T-t) - r(0)|,$$

а функция $r(t)$ непрерывна в пространстве H, то $q(t)$ непрерывна при $t = T - 0$. Поэтому из равенства (16) заключаем, что $p(t)$ дифференцируема слева в точке $t = T$ и $p'(T) = q(T)$.

По определению времени быстродействия $p(T) > p(t)$ для всех $t \in [0, T)$. Следовательно, $p'(T) \geq 0$. Учитывая равенства $p'(T) = q(T)$ и $q(T) = f(T)$, получаем $f(T) \geq 0$. $\square$

Заметим, что в силу уравнения (2) и свойств оптимального управления $f(t) = \langle \dot{v}(t), r(T-t) \rangle$ почти всюду на $[0, T]$.

Значение рассмотренной в лемме 3 постоянной функции будем обозначать символом $H(v_0)$. Таким образом,

$$H(v_0) = \langle Av_0, r(T) \rangle + \|r(T)\|_{L_1(\Omega)} = \langle Av(T), s \rangle + \|s\|_{L_1(\Omega)} \geq 0.$$

Лемма 4. *Пусть $Av_0 \in H$. Если $T(v_0) \in \theta$, функция $T(v)$ дифференцируема по Фреше в точке v_0 и $H(v_0) \neq 0$, то*

$$DT(v_0) = -(r(T(v_0)))/H(v_0).$$

Доказательство. Поскольку $T(v_0)$ — функционал в гильбертовом пространстве H, то его можно отождествить с элементом этого пространства. Разлагая этот элемент по системе $\{e_k\}$, получаем $DT(v_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. Найдем x_n. По определению производной Фреше

$$T(v_0 + \alpha e_n) - T(v_0) = (DT(v_0), \alpha e_n) + o(|\alpha e_n|) = \alpha x_n + o(\alpha), \quad \alpha > 0,$$

откуда $T_\alpha = T + \nu(\alpha)$, где $T_\alpha = T(v_0 + \alpha e_n)$, $T = T(v_0)$, $\nu(\alpha) = \alpha x_n + o(\alpha)$. В силу леммы 2 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k T} v_{k,0} + \int_0^T \|r(t)\|_{L_1(\Omega)} dt = c, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k T_\alpha} v_{k,0} + \alpha s_n e^{\lambda_n T_\alpha} + \int_0^{T_\alpha} \|r(t)\|_{L_1(\Omega)} dt = c. \tag{18}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k T_\alpha} v_{k,0} - \sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k T} v_{k,0} = (r(T_\alpha), v_0) - (r(T), v_0) = \\ = \int_T^{T_\alpha} \langle \dot{r}(t), v_0 \rangle \, dt = \int_T^{T_\alpha} \langle Ar(t), v_0 \rangle dt = \int_T^{T_\alpha} (r(t), Av_0) dt.$$

Функция $r(t)$ непрерывна в H, поэтому

$$\int_T^{T_\alpha} (Av_0, r(t)) dt = \nu(\alpha)(Av_0, r(T)) + o(\nu(\alpha)).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k T_\alpha} v_{k,0} - \sum_{k=1}^{\infty} s_k e^{\lambda_k T} v_{k,0} = \alpha x_n (Av_0, r(T)) + o(\alpha). \tag{19}$$

Далее, $r(t)$ непрерывна в H, поэтому

$$\int_T^{T_\alpha} \|r(t)\|_{L_1(\Omega)} dt = \nu(\alpha) \|r(T)\|_{L_1(\Omega)} + o(\nu(\alpha)) = \alpha x_n \|r(T)\|_{L_1(\Omega)} + o(\alpha). \tag{20}$$

Вычитая (17) из (18) и используя (19), (20), приходим к равенству

$$\alpha x_n(Av_0, r(T)) + \alpha s_n e^{\lambda_n T_\alpha} + \alpha x_n \|r(T)\|_{L_1(\Omega)} + o(\alpha) = 0.$$

Делим это равенство на $\alpha > 0$. Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получаем

$$x_n[(Av_0, r(T)) + \|r(T)\|_{L_1(\Omega)}] = -s_n e^{\lambda_n T}. \tag{21}$$

Заметим, что $\|r(T)\|_{L_1(\Omega)} = (u_T(0), r(T))$. Поэтому

$$(Av_0, r(T)) + \|r(T)\|_{L_1(\Omega)} = H(v_0).$$

Таким образом, равенство (21) принимает вид $x_n H(v_0) = -s_n e^{\lambda_n T}$, откуда

$$DT(v_0) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n T} e_n / H(v_0) = -r(T(v_0))/H(v_0). \quad \square$$

Следующая лемма является очевидным следствием лемм 1 и 4.

Лемма 5. *Пусть $A^2 v_0 \in H$, $Aw \in H$. Если $T(v_0) \in \theta$, функция $T(v)$ дифференцируема по Фреше в точке v_0 и $H(v_0) \neq 0$, то верна формула*

$$T'(v_0, w) = -(r(T(v_0)), Av_0 + w)/H(v_0).$$

Лемма 6. *Пусть $A^2 v_0 \in H$, $w \in H$. Если $T(v_0) \in \theta$, функция $T(v)$ липшицева в окрестности точки v_0, дифференцируема по Фреше в точке v_0 и $H(v_0) \neq 0$, то верна формула*

$$T'(v_0, w) = -(r(T(v_0)), Av_0 + w)/H(v_0). \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ такую, что для всех $n \geq 1$ $Aw_n \in H$ и $w_n \to w$ в H при $n \to \infty$. Оценим $r_n(t) = v(t; w_n) - v(t; w)$, где $v(t; u_0)$, $u_0 \in H$, обозначает решение (2) с управлением $u(t) \equiv u_0$. Заметим, что $r_n(t)$ — решение уравнения

$$\dot{r}_n(t) = Ar_n(t) + h_n, \quad r_n(0) = 0,$$

где $h_n = w_n - w$. Далее,

$$|r_n(t)|^2 = 2\int_0^t \langle \dot{r}_n(\tau), r_n(\tau)\rangle d\tau = 2\int_0^t \langle Ar_n(\tau), r_n(\tau)\rangle d\tau + 2\int_0^t \langle (h_n, r_n(\tau))\rangle d\tau \leq 2|h_n| \int_0^t |r_n(\tau)| d\tau.$$

Следовательно,

$$|r_n(t)| \leq (2|h_n|)^{1/2} g_n(t), \tag{23}$$

где $g_n(t) = \left(\int_0^t |r_n(\tau)| d\tau\right)^{1/2}$. Учитывая (23), выводим

$$g_n'(t) = |r_n(t)|/(2g_n(t)) \leq (|h_n|/2)^{1/2}.$$

Отсюда $g_n(t) \leq (|h_n|/2)^{1/2} t$, поэтому

$$|r_n(t)| \leq |h_n| t, \quad t \geq 0. \tag{24}$$

Пусть число δ_0 таково, что для всех $\delta \in (0, \delta_0) = \Delta$ точки $v(\delta; w_n)$ $(n \geq 1)$ лежат в указанной в условии окрестности точки v_0. Такое δ_0 существует в силу (24). Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_n(\delta) &= [T(v(\delta; w_n)) - T(v_0)]/\delta, \quad \delta \in \Delta, \\ F(\delta) &= [T(v(\delta; w)) - T(v_0)]/\delta, \quad \delta \in \Delta, \\ F_n(0) &= -(r(T(v_0)), Av_0 + w_n)/H(v_0). \end{aligned}$$

В силу леммы 5

$$\lim_{\delta \to 0} F_n(\delta) = F_n(0), \quad n \geq 1. \tag{25}$$

Далее,
$$|F_n(\delta) - F(\delta)| = |T(v(\delta; w_n)) - T(v(\delta; w))|/\delta \le K|r_n(\delta)|/\delta,$$
где K — константа Липшица функции $T(v)$. Учитывая (24), заключаем $|F_n(\delta) - F(\delta)| \le K|h_n|$. Следовательно,
$$F_n(\delta) \to F(\delta) \ \text{ при } \ n \to \infty \ \text{ равномерно по } \ \delta \in \Delta. \tag{26}$$
Из (25) и (26) следует, что $\lim\limits_{\delta \to 0} F(\delta) = \lim\limits_{n \to \infty} F_n(0)$, откуда выводим (22). □

Из леммы 6 следует основная

Теорема. *Пусть $A^2 v_0 \in H$. Если $T(v_0) \in \theta$, функция $T(v)$ липшицева в окрестности точки v_0, дифференцируема по Фреше в точке v_0 и $H(v_0) \ne 0$, то верны формулы*
$$U_+(v_0) = \{w \in U : (r(T(v_0)), Av_0 + w) < 0\},$$
$$U_0(v_0) = \{w \in U : (r(T(v_0)), Av_0 + w) = 0\},$$
$$U_-(v_0) = \{w \in U : (r(T(v_0)), Av_0 + w) > 0\}.$$

Замечание. В случае, когда в качестве множества допустимых управлений выбрано множество $\mathcal{U}_* = \{u(\cdot) \in L_2(\theta; H) : u(t) \in U_*$ почти для всех $t \in \theta\}$, где $U_* = \{f \in H : |f| \le 1\}$, в формулировки и доказательства лемм статьи необходимо внести указанные ниже изменения.

В случае интегрального ограничения оптимальное управление, определяемое из принципа максимума, имеет вид ([2], с. 269)
$$u_0(t) = r(T-t)/|r(T-t)| \quad \text{почти для всех} \quad t \in \theta.$$
В связи с этим уравнение для определения времени быстродействия в лемме 2 принимает вид
$$(r(T), v_0) + \int_0^T |r(t)| dt = c.$$
Далее, в лемме 3 следует рассмотреть функцию $f(t) = \langle Av(t), r(T-t)\rangle + |r(T-t)|$. Поэтому
$$H(v_0) = \langle Av_0, r(T)\rangle + |r(T)| = \langle Av(T), s\rangle + |s|.$$

Все доказанные в статье леммы и теорема в рассматриваемом случае остаются справедливыми. При этом в доказательства следует внести очевидные изменения.

Литература

1. Дончев А. *Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности.* – М.: Мир, 1987. – 156 с.
2. Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных.* – М.: Мир, 1972. – 414 с.
3. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила
15.06.1998