

П.К. ПАНДИ

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВНУТРЕННИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Аннотация. В статье предлагается конечно-разностный метод для численного решения общей краевой задачи третьего порядка. Исследуется сходимость метода при определенных условиях. Приводятся результаты численных экспериментов для тестовых задач, подтверждающие эффективность метода, дается теоретическое обоснование второго порядка точности метода.

Ключевые слова: краевая задача, разностный метод, нелинейность, сходимость второго порядка, трехточечная краевая задача.

УДК: 519.624

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы наблюдаются существенные изменения в развитии как естественных, так и гуманитарных наук. Для определения уровня сложности исследуемых проблем обычно применяются краевые задачи и уравнения с одним или несколькими граничными условиями. Такие задачи, как двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, а также вопросы их практического применения хорошо изучены и подробно описаны в литературе. Свойства краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка сильно отличаются от свойств задач второго порядка и потому все больше привлекают внимание исследователей. Среди последних работ по названной тематике наибольшего внимания заслуживает монография [1] (и использованные в этой книге источники). Краевые задачи третьего порядка возникают в естественных науках и технике, в частности, при моделировании электромагнитных волн, трехслойных пучков, в теории отклонения луча и в гидромеханике.

В статье рассматривается следующая краевая задача третьего порядка

$$u'''(x) = f(x, u, u', u''), \quad a < x < b, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha, \quad u'(a) = \beta \quad \text{и} \quad u'(b) = \gamma, \quad (2)$$

где α , β и γ – вещественные константы.

Теоретическое обоснование существования и единственности решения задачи (1) можно найти в литературе [2]–[5]. Ограниченность решения задачи (1) исследуется в [6]. Предположим [7], что

(i) функция $f(x, u, u', u'')$ непрерывна,

- (ii) существуют производные $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial u'}$ и $\frac{\partial f}{\partial u''}$,
 (iii) $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$, $|\frac{\partial f}{\partial u'}| \leq w_0$ и $|\frac{\partial f}{\partial u''}| \leq w_1$; $w_0, w_1 > 0$.

Далее не будем делать никаких дополнительных предположений, обеспечивающих существование и единственность решения задачи (1). Вообще говоря, решить нелинейные тестовые задачи из этого класса аналитически довольно сложно. Однако во многих случаях важно получить численное решение краевых задач. Этим вопросам и посвящена данная статья. Основным результатом работы является предложенный в ней конечно-разностный метод для точного численного решения краевых задач третьего порядка.

Краевые задачи третьего порядка решались рядом исследователей при разных граничных условиях различными методами: методом суперпозиции [8], конечно-разностным методом [9], методом квинтичных сплайнов [10], методом неполиномиальных сплайнов [11] и методом воспроизводящего ядра [12]. Цель данной работы состоит в том, чтобы предложить численный метод решения краевых задач третьего порядка (1).

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 описывается метод конечных разностей. В разделах 2 и 3 соответственно приводится вывод метода и доказывается его сходимость при определенных условиях. Раздел 4 посвящен вопросам применения данного метода для численного решения тестовых задач и анализу его эффективности. Раздел 5 содержит обсуждение полученных результатов и выводы относительно практической применимости предложенного метода.

1. МЕТОД РАЗНОСТЕЙ

Пусть N — конечное число узловых точек отрезка $[a, b]$, на котором отыскивается решение задачи (1), точки $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ получены с помощью равномерного шага длины h , т.е. $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Необходимо найти численную аппроксимацию аналитического решения $u(x)$ задачи (4) в узловых точках x_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Обозначим

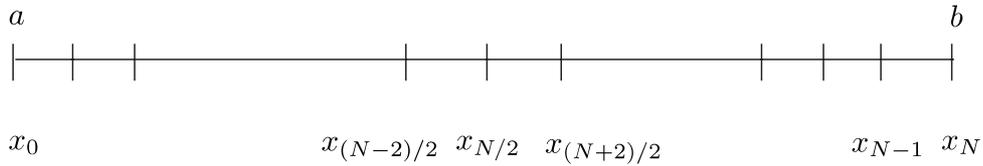


Рис. 1. Узловые точки

приближенное значение функции $u(x)$ в узле $x = x_i$ через u_i . Пусть f_i — приближенное значение функции источника $f(x, u(x), u'(x), u''(x))$ в узле $x = x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Таким образом, краевая задача (1) в узле $x = x_i$ принимает вид

$$u_i''' = f_i, \quad a \leq x_i \leq b, \quad (3)$$

при граничных условиях

$$u_{N/2} = \alpha, \quad u_0' = \beta \quad \text{и} \quad u_N' = \gamma. \quad (4)$$

Зададим узлы $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm h/2$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, и обозначим решение задачи (1) в этих узлах через $u_{i\pm 1/2}$. Определим аппроксимации

$$\bar{u}'_{i-3/2} = \begin{cases} \frac{-3u_{i-3/2} + 4u_{i-1/2} - u_{i+1/2}}{2h}, & N/2 \leq i < N-1; \\ \frac{u_{i-1/2} - u_{i-5/2}}{2h}, & i = N-1, \end{cases} \quad (5)$$

$$\bar{u}'_{i-1/2} = \begin{cases} \frac{4u_{i+1/2} - 3u_{i-1/2} - u_{i+3/2}}{2h}, & i = 1; \\ \frac{u_{i+1/2} - u_{i-3/2}}{2h}, & 1 < i < N - 1; \\ \frac{3u_{i-1/2} - 4u_{i-3/2} + u_{i-5/2}}{2h}, & i = N - 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{u}'_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{u_{i+3/2} - u_{i-1/2}}{2h}, & i = 1; \\ \frac{3u_{i+1/2} - 4u_{i-1/2} + u_{i-3/2}}{2h}, & 1 < i < N/2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\bar{u}''_{i-3/2} = \begin{cases} \frac{3u_{i-3/2} - 14u_{i-1/2} - 5u_{i+1/2} + 16u_i}{h^2}, & i = N/2; \\ \frac{u_{i-1/2} - 2u_{i-3/2} + u_{i-5/2}}{h^2}, & N/2 < i \leq N - 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{u}''_{i-1/2} = \begin{cases} \frac{-u_{i+3/2} + 26u_{i+1/2} - 25u_{i-1/2} - 24hu'_{i-1}}{23h^2}, & i = 1; \\ \frac{u_{i+1/2} - 2u_{i-1/2} + u_{i-3/2}}{h^2}, & 1 < i < N - 1; \\ \frac{-u_{i-1/2} - 22u_{i-3/2} + 23u_{i-5/2} + 24hu'_i}{48h^2}, & i = N - 1, \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{u}''_{i+1/2} = \frac{u_{i-1/2} - 2u_{i+1/2} + u_{i+3/2}}{h^2}, \quad 1 \leq i < N/2, \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+1/2} &= f(x_{i+1/2}, u_{i+1/2}, \bar{u}'_{i+1/2}, \bar{u}''_{i+1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N/2 - 1, \\ \bar{f}_{i-1/2} &= f(x_{i-1/2}, u_{i-1/2}, \bar{u}'_{i-1/2}, \bar{u}''_{i-1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \\ \bar{f}_{i-3/2} &= f(x_{i-1/2}, u_{i-1/2}, \bar{u}'_{i-1/2}, \bar{u}''_{i-1/2}), \quad i = N/2, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно принципу, предложенному в [13], с помощью аппроксимаций (3)–(9), дискретизируем задачу (2) в узлах $x_{i-1/2}$ отрезка $[a, b]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} 2u_{i-1/2} - 3u_{i+1/2} + u_{i+3/2} &= -hu'_{i-1} + \frac{h^3}{48}(21\bar{f}_{i-1/2} + 25\bar{f}_{i+1/2}) + t_i, \quad i = 1, \\ -u_{i-3/2} + 3u_{i-1/2} - 3u_{i+1/2} + u_{i+3/2} &= \frac{h^3}{2}(\bar{f}_{i-1/2} + \bar{f}_{i+1/2}) + t_i, \quad 1 < i < N/2, \\ -u_{i-3/2} + 6u_{i-1/2} + 3u_{i+1/2} &= 8u_i - \frac{h^3}{16}(\bar{f}_{i-3/2} - 9\bar{f}_{i-1/2}) + t_i, \quad i = N/2, \\ u_{i-5/2} - 3u_{i-3/2} + 3u_{i-1/2} - u_{i+1/2} &= -\frac{h^3}{2}(\bar{f}_{i-3/2} + \bar{f}_{i-1/2}) + t_i, \quad N/2 < i < N - 1, \\ 2u_{i-5/2} - 5u_{i-3/2} + 3u_{i-1/2} &= hu'_{i+1} - \frac{h^3}{48}(27\bar{f}_{i-3/2} + 115\bar{f}_{i-1/2}) + t_i, \quad i = N - 1, \end{aligned} \quad (12)$$

где t_i , $i = 1, 2, \dots, N - 1$, — ошибка округления. При разработке предлагаемого здесь метода естественным образом учтены граничные условия.

Пренебрегая значениями t_i в формуле (10) в узловых точках $x_{i-1/2}$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$, получим систему уравнений размерности $N - 1 \times N - 1$ относительно неизвестных $u_{i-1/2}$. Линейность (или нелинейность) уравнений этой системы и выбор метода ее решения зависят от вида функции источника $f(x, u, u', u'')$. В частности, для решения системы уравнений (10) в линейном и нелинейном случаях нами использовался соответственно метод Гаусса–Зейделя и метод Ньютона–Рафсона.

Вычислим значение u_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, N/2 - 1, N/2 + 1, \dots, N + 1$, с помощью следующих аппроксимаций второго порядка:

$$u_{i-1} = \begin{cases} u_{i-1/2} - 1/2u'_{i-1}, & i = 1; \\ 1/2(u_{i-1/2} + u_{i+1/2}), & i = 2, \dots, N/2 - 1, N/2 + 1, \dots, N - 1; \\ u_{N-3/2} + \frac{h}{2}(i - N + 1/2)u'_N, & i = N, N + 1. \end{cases} \quad (13)$$

2. ВЫВОД РАЗНОСТНОГО МЕТОДА

Выведем конечно-разностный метод (10). Согласно формулам (3) величины $\bar{u}'_{i-1/2}$ имеют порядок аппроксимации $O(h^2)$ для $u'_{i-1/2}$, т. е.

$$\bar{u}'_{i-1/2} = u'_{i-1/2} + O(h^2). \quad (14)$$

Из аппроксимаций (4) следует, что $\bar{u}''_{i-1/2}$ имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$ для $u''_{i-1/2}$, т. е.

$$\bar{u}''_{i-1/2} = u''_{i-1/2} + O(h^2). \quad (15)$$

Подставляя соотношения (12) и (13) в (9), получим

$$f(x_{i-1/2}, u_{i-1/2}, \bar{u}'_{i-1/2}, \bar{u}''_{i-1/2}) = f(x_{i-1/2}, u_{i-1/2}, u'_{i-1/2} + O(h^2), u''_{i-1/2} + O(h^2)).$$

Линеаризуя $f_{i-1/2}$, найдем

$$f(x_{i-1/2}, u_{i-1/2}, \bar{u}'_{i-1/2}, \bar{u}''_{i-1/2}) = f(x_{i-1/2}, u_{i-1/2}, u'_{i-1/2}, u''_{i-1/2}) + O(h^2) \left(\frac{\partial f}{\partial u'} + \frac{\partial f}{\partial u''} \right)_{i-1/2}.$$

Наконец, можно утверждать, что $\bar{f}_{i-1/2}$ имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$ для $f_{i-1/2}$, т. е.

$$\bar{f}_{i-1/2} = f_{i-1/2} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

Аналогично можно показать, что $\bar{f}_{i+1/2}$, $\bar{f}_{i-3/2}$ имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$ соответственно для $f_{i+1/2}$ и $f_{i-3/2}$, т. е.

$$\bar{f}_{i+1/2} = f_{i+1/2} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, N/2-1, \quad (17)$$

$$\bar{f}_{i-3/2} = f_{i-3/2} + O(h^2), \quad i = N/2, \dots, N-1. \quad (18)$$

Следовательно, согласно аппроксимациям (14)–(16)

$$2u_{i-1/2} - 3u_{i+1/2} + u_{i+3/2} = -hu'_{i-1} + \frac{h^3}{48}(21f_{i-1/2} + 25f_{i+1/2}) + t_i + O(h^5), \quad i = 1, \quad (19)$$

$$-u_{i-3/2} + 3u_{i-1/2} - 3u_{i+1/2} + u_{i+3/2} = \frac{h^3}{2}(f_{i-1/2} + f_{i+1/2}) + t_i + O(h^5), \quad 1 < i < N/2,$$

$$-u_{i-3/2} + 6u_{i-1/2} + 3u_{i+1/2} = 8u_i - \frac{h^3}{16}(f_{i-3/2} - 9f_{i-1/2}) + t_i + O(h^5), \quad i = N/2,$$

$$u_{i-5/2} - 3u_{i-3/2} + 3u_{i-1/2} - u_{i+1/2} = -\frac{h^3}{2}(f_{i-3/2} + f_{i-1/2}) + t_i + O(h^5), \quad N/2 < i < N-1,$$

$$2u_{i-5/2} - 5u_{i-3/2} + 3u_{i-1/2} = hu'_{i+1} - \frac{h^3}{48}(27f_{i-3/2} + 115f_{i-1/2}) + t_i + O(h^5), \quad i = N-1.$$

Таким образом, из формулы (17) вытекает, что порядок дискретизации для метода (10) применительно к задаче (1) в узлах $x_{i-1/2}$ равен $O(h^2)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$.

где $\mathbf{e} = [e_{1/2}, e_{3/2}, \dots, e_{N-1/2}]^\top$ представляет собой $(N-1)$ -мерный вектор-столбец.

Диагональные элементы матрицы \mathbf{D} положительны. Предположим, что \mathbf{D} — матрица смежности некоторого графа G . Нетрудно показать, что граф G является сильно связным. Тогда матрица смежности \mathbf{D} является неприводимой [14], а значит, она обратима. Пусть матрица $\mathbf{B} = (b_{l,m})_{M \times M}$ совпадает с точной обратной матрицей для \mathbf{D} , где для простоты вместо $N-1$ используется буква M ,

$$b_{l,m} = \begin{cases} 1/2(l(l-1)b_{2,m} - (l+1)(l-2)b_{1,m}), & l < m; \\ \frac{1}{4}(((M-l)^2 + 3(M-l))b_{M-1,m} - ((M-l)^2 + 3(M-l) - 4)b_{M,m}), & l \geq m, \end{cases}$$

причем

$$b_{1,m} = \begin{cases} \frac{m(3M(M+2)+4(1-mM-m))}{8(M+1)}, & m < \frac{M+1}{2}; \\ \frac{1}{8}, & m = \frac{M+1}{2}; \\ \frac{-M(M+2)(M-m+2)}{8(M+1)}, & \frac{M+1}{2} < m < M; \\ \frac{-M(M+2)}{8(M+1)}, & m = M, \end{cases}$$

$$b_{2,m} = \begin{cases} \frac{(mM(3M-4m+6)-4(2M+(m-1)(m-2)))}{8(M+1)}, & m < \frac{M+1}{2}; \\ \frac{1}{8}, & m = \frac{M+1}{2}; \\ \frac{-(M^2+2M-8)(M-m+2)}{8(M+1)}, & \frac{M+1}{2} < m < M; \\ \frac{-(M^2+2M-8)}{8(M+1)}, & m = M, \end{cases}$$

$$b_{M-1,m} = \begin{cases} \frac{-m(M-4)(M+6)}{8(M+1)}, & m < \frac{M+1}{2}; \\ \frac{1}{8}, & m = \frac{M+1}{2}; \\ \frac{8((M+1)^2 - m(M+3)+2) + (M-m+2)(4mM - M^2 - 14M + 4m - 4)}{8(M+1)}, & \frac{M+1}{2} < m < M; \\ \frac{(3M-2)(M-4)}{8(M+1)}, & m = M, \end{cases}$$

$$b_{M,m} = \begin{cases} \frac{-m(M+4)(M-2)}{8(M+1)}, & m < \frac{M+1}{2}; \\ \frac{1}{8}, & m = \frac{M+1}{2}; \\ \frac{(M-m+2)(4mM - M^2 - 6M + 4m) - 4(M+m)}{8(M+1)}, & \frac{M+1}{2} < m < M; \\ \frac{3((M-1)^2 - 1)}{8(M+1)}, & m = M. \end{cases}$$

Пусть задана матрица $\mathbf{R} = (R_l)_{M \times 1}$, состоящая из сумм строк матрицы $\mathbf{B} = (b_{l,m})_{M \times M}$, т. е.

$$R_l = \sum_{m=1}^M b_{l,m}, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (24)$$

$$R_l = \frac{1}{192}(64l(l+1)(l-1) + (M-1)(5M^2 + 14M + 3(2l-1)^2 + 9) + 24(1-2l(l-1)(M-2l-1))) + \frac{1}{64(M+1)}(2l+M)(2l-M-2)(M^2+4M-13), \quad l < \frac{M+1}{2},$$

$$R_l = \frac{1}{64(M+1)}(4l(l-1)((M-2l)(3M-2l) + 2(5M-6l+4)) + 8(M+1) + (2l+M)(2l-M-2)(M^2+4M-13)), \quad l = \frac{M+1}{2},$$

$$\begin{aligned}
 R_l = & \frac{1}{192}(M^3 + 21M^2 + 74M + 24 + 12(M-1)(M-l)(M-l+3) - 16l(l+1)(2l+1)) + \\
 & + \frac{1}{64(M+1)}((M+2l+3)(2l-M-1)((M-2l+6)(M+2l) + 4(1+2lM)) + \\
 & + 4(2l-M-1)(4l(l-2M-3) - M(M+2)^2) + 4(2l+M)(2l-M-2)(M^2+3M-2+l(l-2M-3))), \\
 & \frac{M+1}{2} < l < M,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_l = & \frac{1}{64(M+1)}(((M+2l)(M-2l+6) + 4(1+2lM))(M-3)(3M+1) + \\
 & + 4(M-3)(4l(l-2M-3) - M(M+2)^2) + 24M(M-2)) + \\
 & + \frac{1}{192}(12(M-1)(M-l)(M-l+3) - M(31M^2 - 69M - 58) + 24), \quad l = M.
 \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\max_{1 \leq l \leq M} (R_l) = R_M = -\frac{1}{192}(19M^3 + 2M^2 + 425M - 537) - \frac{183}{64(M+1)}.$$

Пусть

$$Mu = \max_{x \in [a,b]} |u^{(5)}(x)|. \quad (25)$$

Таким образом, для больших значений M [15] справедливо соотношение

$$\|\mathbf{B}\| = \max_{1 \leq l \leq M} |R_l| = |R_M| < \frac{19}{192} \left(\frac{b-a}{h} \right)^3.$$

Тогда из формул (22), (23) и (24) имеем

$$\|\mathbf{e}\| \leq \frac{19h^2(b-a)^3}{192} Mu.$$

Из уравнения (25) вытекает, что $\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Следовательно, метод (10) сходится, причем порядок сходимости не меньше $O(h^2)$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проиллюстрируем работу метода и продемонстрируем его вычислительную эффективность на примере четырех тестовых задач. В каждой задаче будем использовать один и тот же шаг сетки h . В табл. 1–4 приведены значения величины МАЕ — максимальной абсолютной погрешности решения u задачи (1) для различных значений N . Величина МАЕ рассчитывалась по формуле

$$\text{МАЕ} = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i|.$$

Для решения системы уравнений (3) в линейном и нелинейном случаях использовался метод Гаусса–Зейделя и метод Ньютона–Рафсона соответственно. Все вычисления проводились на персональном компьютере с операционной системой Windows 2007 (процессор Intel Core i3-2330M, 2.20 GHz), программа была составлена на языке FORTRAN. Работа метода (для N узлов) прекращается, когда максимальная разность между двумя последовательными итерациями станет меньше $10^{(-10)}$ или когда число итераций достигнет 10^3 .

ТАБЛИЦА 1. Максимальная абсолютная погрешность (Ех-1)

MAE		
N	с учетом u_N	без учета u_N
8	.12908615(-2)	.85954519(-3)
16	.35606002(-3)	.25350484(-3)
32	.91508060(-4)	.66704801(-4)
64	.19697036(-4)	.13647554(-4)
128	.35325747(-5)	.21016101(-5)
256	.82285175(-6)	.50418214(-6)
512	.16898936(-6)	.16898936(-6)
1024	.12707984(-6)	.12707984(-6)

ТАБЛИЦА 2. Максимальная абсолютная погрешность (Ех-2)

MAE			MAE		
$r = 1.0, K = 15.0$			$r = 1.0, K = 15.0$		
N	с учетом u_N	без учета u_N	N	с учетом u_N	без учета u_N
8	.27754970(-2)	.15150103(-2)	8	.10986542(-2)	.56223013(-3)
16	.79102098(-3)	.44336705(-3)	16	.35706599(-3)	.19682293(-3)
32	.20979003(-3)	.11833712(-3)	32	.10100351(-3)	.56892430(-4)
64	.52287553(-4)	.28824041(-4)	64	.26516334(-4)	.14922179(-4)
128	.13284694(-4)	.73414976(-5)	128	.66093135(-5)	.36358426(-5)
256	.33540016(-5)	.18584460(-5)	256	.16826172(-5)	.92965968(-6)
512	.84315599(-6)	.46737219(-6)	512	.62440035(-6)	.23495733(-6)
1024	.21358194(-6)	.11951836(-6)	1024	.10588803(-6)	.58424224(-7)

Задача 1. Линейная тестовая задача, предложенная в работе [16], имеет вид

$$u'''(x) + 2u''(x) - 4u'(x) + u(x) = \frac{1}{4}(8x - x^2) + \frac{9 \exp(-2x) + 2x - 9}{4(1 - \exp(-2))}, \quad 0 < x < 1,$$

при граничных условиях $u(1/2) = 0$, $u'(0) = 0$ и $u'(1) = 0$. Аналитическим решением задачи является

$$u(x) = c_1 \exp x + c_2 \exp\left(-\frac{x}{2}(3 - \sqrt{13})\right) + c_3 \exp\left(-\frac{x}{2}(3 + \sqrt{13})\right) + \frac{1}{4}(4 - x^2) + \frac{\exp(-2x) + 2x - 1}{4(1 - \exp(-2))},$$

причем значения c_1 , c_2 и c_3 обеспечивают выполнение граничных условий для аналитического решения. Значения MAE, вычисленные для метода (10) при различных значениях N , представлены в табл. 1.

Задача 2. Линейная тестовая задача, исследуемая в [17], имеет вид

$$u'''(x) = K^2 u'(x) - r, \quad 0 < x < 1,$$

ТАБЛИЦА 3.

МАЕ		
$r = 1, 0, K = 15, 0$		
N	с учетом u_N	без учета u_N
8	.58073428(-3)	.27603691(-3)
16	.20875796(-3)	.11124527(-3)
32	.63473512(-4)	.35463450(-4)
64	.17283053(-4)	.97452466(-5)
128	.43674709(-5)	.24101541(-5)
256	.11118001(-5)	.61295486(-6)
512	.28175882(-6)	.15581871(-6)
1024	.71047090(-7)	.39392351(-7)

ТАБЛИЦА 4. Максимальная абсолютная погрешность (Ех-3)

МАЕ		
N	с учетом u_N	без учета u_N
8	.57939291(-2)	.37553906(-2)
16	.14628768(-2)	.96416473(-2)
32	.31989813(-3)	.19651651(-3)
64	.70273876(-4)	.39577484(-4)
128	.17285347(-4)	.96559525(-5)
256	.43511391(-5)	.24437904(-5)
512	.11324883(-5)	.74505806(-6)
1024	.50663948(-6)	.50663948(-6)

при граничных условиях

$$u(1/2) = 0, \quad u'(0) = 0 \quad \text{и} \quad u'(1) = 0.$$

Аналитическим решением задачи является $u(x) = \frac{r(\cosh(K(1-x)) - \cosh(Kx))}{K^3 \sinh(K)} + \frac{r}{K^2}(x - 1/2)$. Значения МАЕ, вычисленные методом (10) для различных значений N и для $K = 5, 10, 15$ и $r = 1$, представлены в табл. 2.

Задача 3. Нелинейная тестовая задача, исследуемая в [18], имеет вид

$$u'''(x) = -2 \exp(-3u(x)) + 4(1+x)^{-3}, \quad 0 < x < 1,$$

при граничных условиях

$$u'(0) = 1, \quad u'(1) = 1/2 \quad \text{и} \quad u(1/2) = \ln(3/2).$$

Аналитическим решением задачи является $u(x) = \ln(1+x)$. Значения МАЕ, вычисленные методом (10) при различных значениях N , представлены в табл. 3.

Как показывают результаты численных экспериментов для примера 1, проведенных при различных значениях N (см. табл. 1), максимальная абсолютная погрешность решения убывает при уменьшении длины шага h . Найдена оценка порядка точности. Сделаны некоторые выводы из анализа результатов, полученных для других тестовых задач. Очевидно, что метод (10) сходится, причем скорость сходимости не менее квадратичной.

5. ВЫВОДЫ

Предложен конечно-разностный метод численного решения краевых задач третьего порядка. Для узловых точек $x = x_{i-1/2}, i = 1, 2, \dots, N - 1$, получена система алгебраических уравнений (10). В случае, когда функция источника $f(x, u, u', u'')$ является линейной, эта система состоит из линейных уравнений, иначе – из нелинейных. Для линейного случая предложенный метод позволяет получить хорошую численную аппроксимацию решения тестовых задач, т.е. является достаточно эффективным и точным. Концепция, изложенная в данной статье, является теоретической основой для создания конечно-разностных методов численного решения краевых задач высоких нечетных порядков.

Автор выражает благодарность рецензенту и редактору за ценные замечания, позволившие улучшить качество данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gregus M. *Third order linear differential equations*, Math. and Appl. (East European Series) (D. Reidel Publ. Company, Dordrecht–Boston–Lancaster–Tokyo 1987).
- [2] Jackson L.K. *Existence and uniqueness of solutions of boundary-value problems for third order differential equations*, J. Diff. Eqs. **13**, 432–437 (1973).
- [3] Gupta C.P. and Lakshmikantham V. *Existence and uniqueness theorems for a third-order three point boundary-value problem*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Appl. **16** (11), 949–957 (1991).
- [4] Murty K.N. and Rao Y.S. *A theory for existence and uniqueness of solutions to three-point boundary-value problems*, J. Math. Anal. and Appl. **167** (1), 43–48 (1992).
- [5] Henderson J. and Prasad K.R. *Existence and uniqueness of solutions of three-point boundary-value problems on time scales*, Nonlin. Studies **8**, 1–12 (2001).
- [6] Gregus M. and Abdel Karim R.I.I. *Boundedness of the solutions of the differential equation $(py')'' + (py')' + ry = 0$* , Proc. Math. and Phys. Soc., U.A.R. **32**, 107–110 (1968).
- [7] Agarwal R.P. *Boundary-value problems for higher order differential equations* (World Scientific, Singapore, 1986).
- [8] Na T.Y. *Computational methods in engineering boundary-value problems* (Academic Press, New York, 1979).
- [9] Al-Said E.A. *Numerical solutions for system of third-order boundary-value problems*, International J. Computer Math. **78** (1), 111–121 (2001).
- [10] Khan A. and Aziz T. *The numerical solution of third-order boundary-value problems using quintic splines*, Appl. Math. and Comput. **137** (2–3), 253–260 (2003).
- [11] Islam S., Khan M.A., Tirmizi I.A., and Twizell E.H. *Non-polynomial splines approach to the solution of a system of third-order boundary-value problems*, Appl. Math. and Comput. **168** (1), 152–163 (2005).
- [12] Li X. and Wu B. *Reproducing kernel method for singular multi-point boundary-value problems*, Math. Sci. **6** (16), Article ID doi:10.1186/2251-7456-6-16 (2012).
- [13] Pandey P.K. *The numerical solution of third order differential equation containing the first derivative*, Neural Parallel & Scientific Comp. **13**, 297–304 (2005).
- [14] Вара Р.С. *Матричный итерационный анализ* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2002).
- [15] Horn R.A. and Johnson C.R. *Matrix analysis* (Cambridge University Press, New York, NY 10011, USA, 1990).
- [16] Jator S.N. *On the numerical integration of third order boundary-value problems by a linear multistep method*, International J. Pure and Appl. Math. **46** (3), 375–388 (2008).
- [17] Krajcinovic D. *Sandwich beam analysis*, J. Appl. Mech., 773–778 (1971).
- [18] Ghazala A., Muhammad T., Shahid S.S., and Hamood U.R. *Solution of a linear third order multi-point boundary value problem using RKM*, British J. Math. & Comp. Sci. **3** (2), 180–194 (2013).

П.К. Панди

*Колледж Дуала Сингха (Университет Дели),
ул. Лодхи, Нью-Дели, 110003, Индия,*

e-mail: pramod_10p@hotmail.com

P.K. Pandey

A finite difference method for the numerical solving general third-order boundary-value problem with an internal boundary condition

Abstract. In this paper we have proposed a finite difference method for the numerical solving general third-order boundary-value problem. Under appropriate conditions we have discussed the convergence of the proposed method. The computational results in experiment on test problems verify the efficiency and theoretically established second order accuracy of the proposed method.

Keywords: boundary-value problem, difference method, nonlinear, second order convergence, three-point BVP.

P.K. Pandey

*Dyal Singh College (University of Delhi),
Lodhi Road, New-Delhi, 110003, India,*

e-mail: pramod_10p@hotmail.com