И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 517.956

В.А. ТЕРЛЕЦКИЙ

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Введение

Методы исследования задач оптимального управления системами с распределенными параметрами во многом определяются свойствами решения этих систем. Так, например, возможность применения широко известного метода приращений обусловлена наличием оценки приращения состояния управляемой системы в точках области независимых переменных через величину вариации управления. Такие, как говорят, поточечные оценки, к сожалению, справедливы не всегда. В частности, их невозможно получить (напр., [1], с. 305) для решений гиперболических систем многомерных (число пространственных переменных не меньше двух) полулинейных (линейный дифференциальный оператор, нелинейная правая часть) дифференциальных уравнений. Известные оценки роста решения, построенного Фридрихсом [2]–[4] и его последователями [5]–[8], имеют форму энергетических неравенств. Они позволяют оценить рост решения в среднем, что вполне достаточно для доказательства существования и единственности решения гиперболической системы в соответствующих функциональных пространствах. Однако, оценки в среднем не выявляют даже с качественной точки зрения характер взаимодействия между различными типами вариаций входных параметров (управлений) начально-краевой задачи (управляемой системы) и соответствующими им возмущениями решения. С позиций теории оптимального управления недостаток оценок в среднем по сравнению с поточечными оценками объясняется невозможностью обоснования на основе метода приращений, например, по схеме работы [9], принципа максимума Понтрягина, численных методов решения, идущих от формулы приращения целевого функционала, вариационного принципа максимума.

Широко известно (напр., [10]–[12]), что наиболее эффективным инструментом исследования гиперболических систем одномерных дифференциальных уравнений служит метод характеристик, берущий свое начало от работы [13]. В то же время для многомерного варианта гиперболических систем этот метод, по-видимому, использовался лишь в [14]. Здесь результаты статьи [14] существенно уточняются и развиваются. Вначале так же, как и в [14], с помощью многомерного аналога инвариантов Римана выписывается континуальное семейство дифференциальных систем. Параметром этого семейства является вектор, определяющий направление по пространственным переменным. Путем интегрирования инвариантного семейства систем решение исходной гиперболической системы записывается как решение некоторой интегродифференциальной системы. В ней в качестве области интегрирования выступает совокупность характеристик, каждая из которых построена по соответствующему собственному значению дифференциального оператора из произвольной фиксированной точки области определения как коническая поверхность в обратном времени. Устанавливается эквивалентность исходной дифференциальной и построенной интегродифференциальной систем на гладких решениях. К сожалению, интегродифференциальная система непосредственно не может служить основой метода последовательных приближений, т. к. она содержит частные производные по пространственным переменным

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 05-01-00187, 06-01-81016).

от инвариантов. В [14] это обстоятельство было проанализировано очень поверхностно, что привело к отчасти неверным утверждениям.

Здесь предлагается следующий выход. Специфика интегродифференциальной системы допускает возможность перехода от производных по пространственным переменным решения в инвариантах к их производным по направлениям, если конические характеристики сделать “телесными” (т. е. охватывающими ненулевую по мере область пространственных переменных) на всем их протяжении по времени. Этого можно добиться “усечением” телесных конусов сверху по времени на произвольную (малую) величину и заменой бестелесных конусов (кривых) на охватывающие их цилиндрические поверхности. Описанная процедура проводит “усреднение” интегродифференциального эквивалента. Показывается, что решение каждой “усредненной” интегральной системы существует, единственно и служит приближенным решением исходной дифференциальной системы. Кроме того, приближенные решения удовлетворяют поточечной оценке роста, их инварианты являются абсолютно непрерывными функциями вдоль соответствующих бихарактеристик, а их норма Лебега не зависит от величины параметра усреднения. В совокупности это позволяет определить обобщенное решение как предел усредненных (приближенных) решений и обосновать наследование обобщенным решением свойств приближенных решений в некоторой сколь угодно близкой подобласти заданной области независимых переменных.

1. Постановка задачи

Пусть в вещественном $(m+1)$-мерном пространстве R^{m+1} задана область $\Pi = S\times T$ независимых переменных (s,t), причем S — ограниченное односвязное множество с кусочно-гладкой границей ∂S, $T=(t_0,t_1)$. В цилиндре Π рассмотрим систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$x_t + \sum_{j=1}^{m} A_j(s,t)x_{s_j} = f(x,s,t). \tag{1.1}$$

Здесь матричные функции $A_j = A_j(s,t)$, $j=1,2,\dots,m$, размерности $n\times n$ и векторная функция $f=f(x,s,t)$ размерности n — заданные входные параметры, а $x=x(s,t)$ — искомое n-мерное решение системы (1.1).

Предположим, что для произвольных векторов $\nu\in\mathrm{R}^m$ все собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(\nu,s,t)$, $i=1,2,\dots,n$, матрицы

$$\mathcal{A}(\nu,s,t) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j A_j(s,t)$$

являются вещественными, а матрица $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\nu,s,t)$ не дефектная, т. е. алгебраическая и геометрическая кратность ее собственных значений одинакова. Тогда (напр., [15]) существуют матрица $\mathcal{L}=(\ell^{(1)},\ell^{(2)},\dots,\ell^{(n)})$ из левых $\ell^{(i)}=\ell^{(i)}(\nu,s,t)$ и матрица $\mathcal{P}=(p^{(1)},p^{(2)},\dots,p^{(n)})$ из правых $p^{(i)}=p^{(i)}(\nu,s,t)$ собственных векторов матрицы $\mathcal{A}$ такие, что справедливы равенства

$$\mathcal{L}'\mathcal{A}=\Lambda\mathcal{L}', \quad \mathcal{A}\mathcal{P}=\mathcal{P}\Lambda, \quad \mathcal{L}'\mathcal{P}=\mathrm{E}, \tag{1.2}$$

где $'$ — знак транспонирования, $\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$, E — единичная матрица. Как известно ([11], с. 23; [12], с. 140), в этом случае дифференциальный оператор

$$Dx = x_t + \sum_{j=1}^{m} A_j(s,t)x_{s_j}$$

и система (1.1) будут гиперболическими.

Дополнительно предположим, что матричные функции Λ, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$ непрерывны вместе со своими производными на множестве $\mathrm{R}^m\times\overline{\Pi}$, $\overline{\Pi}=\Pi\cup\partial\Pi$, $\partial\Pi$ — граница области Π. Кроме того, λ_i,

$i = 1, 2, \ldots, n$, не меняют знак, а две различных по номеру функции λ_i и λ_j, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, либо тождественно равны всюду в $\mathrm{R}^m \times \overline{\Pi}$, либо не совпадают ни в одной точке области.

Будем считать вектор-функцию $f(x, s, t)$ непрерывной по Липшицу по переменной x при фиксированных $(s, t) \in \Pi$ и интегрируемой по Лебегу в Π при фиксированных $x \in \mathrm{R}^n$.

Требуется построить корректные начально-граничные условия и такое обобщенное решение системы (1.1), которое обладало бы свойствами, позволяющими применять метод приращений в задачах оптимального управления гиперболическими системами вида (1.1).

2. Многомерные инварианты Римана и интегродифференциальный эквивалент

Введем многомерные инварианты Римана $r = r(\nu, s, t)$ для системы (1.1), связав их линейным невырожденным преобразованием

$$r(\nu, s, t) = \mathcal{L}'(\nu, s, t)x(s, t), \quad x(s, t) = \mathcal{P}(\nu, s, t)r(\nu, s, t) \tag{2.1}$$

с решением x системы (1.1) всюду в области $\mathrm{R}^m \times \overline{\Pi}$.

Можно показать ([14], с. 72), что гладкая вектор-функция x является решением системы (1.1) тогда и только тогда, когда соответствующая ей в смысле равенств (2.1) вектор-функция r удовлетворяет для любого $\nu \in \mathrm{R}^m$ инвариантной системе

$$r_t + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{\nu_j}(\nu, s, t) r_{s_j} - \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{s_j}(\nu, s, t) r_{\nu_j} = g(r, \nu, s, t) - \sum_{j=1}^{m} M_j(\nu, s, t) r_{s_j}, \tag{2.2}$$

в которой вектор-функция $g = g(r, \nu, s, t)$ и матричные функции $M_j = M_j(\nu, s, t)$ определяются по формулам

$$\begin{gathered} g = \mathcal{L}'(f - D\mathcal{P} \cdot r) - \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{s_j} r_{\nu_j}, \\ M_j = \mathcal{L}' A_j \mathcal{P} - \Lambda_{\nu_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Дифференциальный оператор

$$D_\Lambda r = r_t + \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{\nu_j} r_{s_j} - \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{s_j} r_{\nu_j}$$

ввиду диагональности матрицы Λ содержит в каждой i-й строке частные производные по t, s_j и ν_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, только от i-го инварианта r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это позволяет рассматривать i-ю компоненту дифференциального оператора $D_\Lambda r$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ в качестве полной производной по t функции $r_i(\nu, s, t)$ вдоль бихарактеристики $s = s^{(i)}(\mu, \xi, \tau; t)$, $\nu = \nu^{(i)}(\mu, \xi, \tau; t)$, определяемой [14] как решение системы $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial}{\partial \nu} \lambda_i(\nu, s, t), \quad \frac{d\nu}{dt} = -\frac{\partial}{\partial s} \lambda_i(\nu, s, t), \tag{2.4}$$

проходящее в момент $t = \tau$ через точку $s = \xi$ и вектор $\nu = \mu$.

Пусть $\check{s}^{(i)}(\nu, s, t)$, $\check{\nu}^{(i)}(\nu, s, t)$, $\check{t}^{(i)}(\nu, s, t)$ — значения параметров ξ, μ, τ бихарактеристики $\check{s}^{(i)}(\nu, s, t; \cdot)$ в ее начальной точке, т. е. точка $(\check{s}^{(i)}(\nu, s, t), \check{t}^{(i)}(\nu, s, t)) \in \partial\Pi$ и $\check{t}^{(i)}(\nu, s, t) < t$ при $(s, t) \in \Pi$, $\nu \in \mathrm{R}^m$. Система (2.2) после интегрирования вдоль соответствующих бихарактеристик приобретает вид

$$\begin{aligned} r_i(\nu, s, t) = r_i(\check{\nu}^{(i)}, \check{s}^{(i)}, \check{t}^{(i)}) + \int_{\check{t}^{(i)}}^{t} \Big[g_i(r, \mu, \xi, \tau) - \\ - \sum_{j=1}^{m} \langle M_j^{(i)}(\mu, \xi, \tau), r_{\xi_j} \rangle \Big] \Big|_{\substack{\xi = s^{(i)}(\nu, s, t; \tau) \\ \mu = \nu^{(i)}(\nu, s, t; \tau)}} d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu \in \mathrm{R}^m, \quad (s, t) \in \Pi, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение в R^m, $M_j^{(i)}$ — i-я строка матрицы M_j.

Отметим, что справедливость обратного перехода от системы (2.5) к системе (2.2) проверяется непосредственной подстановкой правых частей равенств (2.5) в уравнения (2.2). При этом существенно используются тождества

$$s_t^{(i)}(\nu,s,t;\tau)+s_s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{i_\nu}(\nu,s,t)-s_\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{i_s}(\nu,s,t)\equiv 0,$$
$$\nu_t^{(i)}(\nu,s,t;\tau)+\nu_s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{i_\nu}(\nu,s,t)-\nu_\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\lambda_{i_s}(\nu,s,t)\equiv 0,$$

вытекающие из очевидных соотношений

$$\xi\equiv s^{(i)}(\nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),t;\tau),$$
$$\mu\equiv \nu^{(i)}(\nu^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),s^{(i)}(\mu,\xi,\tau;t),t;\tau),\quad \mu\in\mathrm{R}^m,\quad (\xi,\tau)\in\Pi,\quad t\in T,$$

после их дифференцирования по переменной t с учетом равенств (2.4).

Система интегродифференциальных уравнений (2.5), вообще говоря, не может служить основой для построения обобщенного решения исходной системы (1.1), т. к. в ее последнее слагаемое входят частные производные инвариантов r по пространственным переменным ξ_j, $j=1,2,\ldots,m$, что не позволяет задействовать метод последовательных приближений и обосновать сжимающее свойство отображения (2.5). Единственным исключением здесь являются гиперболические системы многомерных дифференциальных уравнений, у которых матрицы A_j, $j=1,2,\ldots,m$, формирующие оператор Dx, образуют коммутативное семейство, т. е. удовлетворяют равенствам $A_jA_i=A_iA_j$, $i,j=1,2,\ldots,m$. В этом случае существуют [15] матрицы $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}$, не зависящие от ν и диагонализирующие одновременно все матрицы A_j, $j=1,2,\ldots,m$. Другими словами, для коммутативных матриц выполняются равенства

$$\mathcal{L}'(s,t)A_j(s,t)\mathcal{P}(s,t)=\Lambda_{\nu_j}(\nu,s,t),\quad j=1,2,\ldots,m,$$

что в силу второго обозначения в (2.3) приводит к тождествам $M_j=0$, $j=1,2,\ldots,m$. Тогда метод последовательных приближений можно применить к интегральной системе (2.5) по практически той же схеме, что и в работах [16], [17], где он использовался для построения и обоснования свойств обобщенного решения гиперболических систем одномерных ($m=1$) дифференциальных уравнений. Поэтому далее будем рассматривать систему (1.1), считая, что не все матрицы M_j, $j=1,2,\ldots,m$, тождественно равны нулю.

Заметим, что в силу равенств (2.1) система (2.5) приобретает форму интегродифференциальной системы

$$x(s,t)=\frac{1}{\operatorname{mes}\aleph}\int_\aleph\sum_{i=1}^n \mathrm{p}^{(i)}(\nu,s,t)\Big\{r_i(\check\nu^{(i)},\check s^{(i)},\check t^{(i)})+$$
$$+\int_{\check t^{(i)}}^t\Big[g_i(r,\mu,\xi,\tau)-\sum_{k=1}^n\langle M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau),r_{k_\xi}(\mu,\xi,\tau)\rangle\Big]\Big|_{\substack{\mu=\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\\ \xi=s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)}}d\tau\Big\}d\omega_\nu,\quad (s,t)\in\Pi,\qquad (2.6)$$

в которой $\aleph=\{\nu\in\mathrm{R}^m:\|\nu\|=1\}$ — единичный шар в R^m, а через $\operatorname{mes}\aleph$ обозначена площадь его поверхности, т. е. $\operatorname{mes}\aleph=2\pi$ при $m=2$, $\operatorname{mes}\aleph=4\pi$ при $m=3,\ldots$ В общем случае, как известно,

$$\operatorname{mes}\aleph=\frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}.$$

Векторы $M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)$, $i,k=1,2,\ldots,n$, состоят из компонент

$$M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)=\begin{cases}\ell^{(i)\prime}(\mu,\xi,\tau)\mathrm{A}_j(\xi,\tau)\mathrm{p}^{(k)}(\mu,\xi,\tau), & i\ne k;\\ 0,\quad i=k,\quad j=1,2,\ldots,m.\end{cases}\qquad (2.7)$$

3. Усреднение интегродифференциальной системы

Как уже отмечалось выше, построению метода последовательных приближений на основе интегродифференциальной системы уравнений (2.6) существенно препятствуют производные по пространственным переменным от инвариантов r. Цель данного параграфа заключается в конструировании такого однопараметрического семейства интегральных систем, которые, с одной стороны, свободны от этого недостатка, а, с другой стороны, являются в некотором смысле сходящимися приближениями к системе (2.6).

Зафиксируем произвольную точку $(s,t) \in \Pi$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через $K_i(s,t)$ конусы с вершиной в точке (s,t), у которых в роли образующих выступают соответствующие бихарактристики. Их формальное описание может быть следующим:

$$K_i(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \Pi : \xi \in \mathrm{co}\{s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\},\ \tau < t,\ \nu \in \aleph\}.$$

Боковая (коническая) поверхность $\partial K_i(s,t)$ конуса $K_i(s,t)$ имеет вид

$$\partial K_i(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \Pi : \xi = s^{(i)}(\nu,s,t;\tau),\ \tau < t,\ \nu \in \aleph\},$$

а в момент τ его горизонтальные сечения по времени $K_i(s,t;\tau)$ описываются соотношениями

$$K_i(s,t;\tau) = \{\xi \in S : \xi \in \mathrm{co}\{s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\},\ \nu \in \aleph\}.$$

Заметим, что отображение $s^{(i)}(\cdot,s,t;\tau) : \aleph \to \partial K_i(s,t)$, $i = 1,2,\ldots,n$, в общем случае является лишь инъективным. Действительно, если собственное значение $\lambda_i(\nu,s,t)$ линейно относительно переменной ν (в частности, не зависит от ν), то все бихарактеристики $\xi = s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)$ "сливаются" в одну интегральную кривую первой системы (2.4). Поэтому соответствующие им конусы $K_i(s,t)$ уместно назвать бестелесными, т. к. они совпадают со своей границей $\partial K_i(s,t)$. В том же случае, когда собственное значение $\lambda_i(\nu,s,t)$ зависит от ν нелинейно, конус $K_i(s,t)$ уже не является вырожденным. При этом ввиду постоянства знака собственного значения λ_i справедливы строгие включения

$$K_i(s,t;\tau_1) \supset K_i(s,t;\tau_2),$$

если $\tau_1 < \tau_2$. Такие конусы далее будем называть телесными.

Опишем структуру взаимодействия телесных конусов K_i, $i = 1,2,\ldots,n$, с границами цилиндра Π. Нижняя граница конуса, очевидно, является сечением $K_i(s,t;t_0)$. Через $\partial K_i(s,t;\tau) \subset S$ обозначим граничные точки множества $K_i(s,t;\tau)$. Пересечением конуса $K_i(s,t)$ с боковой границей цилиндра Π назовем множество

$$K_i(s,t;\partial S) = \{(\xi,\tau) \in \partial S \times \mathrm{T} : \xi \in \mathrm{co}\{s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\},\ \tau < t,\ \nu \in \aleph\}.$$

Пусть $\partial K_i(s,t;\partial S) \subset \partial S \times \mathrm{T}$ — совокупность его граничных точек.

Понятно, что для телесных конусов отображение $s^{(i)}(\cdot,s,t;\tau) : \aleph \to \partial K_i(s,t)$ будет уже сюръективным. Это обстоятельство позволяет разбить сферу $\aleph$ на множества

$$\aleph_0^{(i)}(s,t) = \{\nu \in \aleph : \check{s}^i(\nu,s,t) \in S,\ \check{t}^{(i)}(\nu,s,t) = t_0\},$$
$$\aleph_S^{(i)}(s,t) = \{\nu \in \aleph : \check{s}^i(\nu,s,t) \in \partial S,\ \check{t}^{(i)}(\nu,s,t) > t_0\},$$
$$\partial\aleph_S^{(i)}(s,t;\tau) = \{\nu \in \aleph_S^{(i)}(s,t) : \check{s}^i(\nu,s,t) \in \partial S,\ \check{t}^{(i)}(\nu,s,t) = \tau\},$$

соответствующие множествам $\partial K_i(s,t;t_0)$, $\partial K_i(s,t;\partial S)$ и $\partial K_i(s,t;\partial S) \cap \partial K_i(s,t;\tau)$.

Обратим внимание на следующий важный факт. Интегральная система (2.6) в качестве области интегрирования во всех своих слагаемых использует цилиндрические поверхности $\aleph \times \mathrm{T}$. Точнее, их "верхние" части $\aleph \times \mathrm{T} \setminus \aleph_S^{(i)}(s,t) \times \{\tau \in \mathrm{T} : \tau < \check{t}^{(i)}(\nu,s,t),\ \nu \in \aleph_S^{(i)}(s,t)\}$, $i = 1,2,\ldots,n$. В свою очередь, телесные конусы $K_i(s,t)$, как и их конические поверхности $\partial K_i(s,t)$, имеют исчезающе малую меру в окрестности вершины (s,t). Эта особенность выступает существенным препятствием при установлении обратного соответствия между переменными $(\nu,\tau) \in \aleph \times \mathrm{T}$ и переменными $(\xi,\tau) \in \partial K_i$. Для бестелесных конусов указанная проблема и подавно распространяется на весь временной интервал. Тем не менее, наличие "движения" бихарактеристики

$s^{(i)}(\nu, s, t; \tau)$ по ν является принципиально необходимым элементом в процессе построения обобщенного решения, т.к. только с его помощью удается "поменять" производные по пространственным переменным от инвариантов r (а значит, и от x) на производные по направлению ν от тех же инвариантов r.

Преодолеть отмеченные трудности можно различными с технической точки зрения способами, имеющими как свои плюсы, так и минусы. Однако, все они используют одну основополагающую идею: система (2.6) должна быть препарирована таким образом, чтобы в ней использовались только всюду телесные области интегрирования. Опишем одну из возможных схем.

Уйти от вырождения телесных конусов в окрестности вершины (s, t) позволяет, в частности, простое "усечение" их сверху по времени. Обозначим величину этого временного зазора числом $\sigma > 0$. Тогда для достижения нужного результата достаточно в системе (2.6) уменьшить верхний предел интегрирования по времени на σ, т.е. вместо конуса $K_i(s,t)$ в системе (2.6) будет фигурировать конус

$$K_i^\sigma(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \Pi : \xi \in \mathrm{co}\{s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\},\ \tau < t-\sigma,\ \nu \in \aleph\}.$$

С бестелесными конусами $K_i(s,t)$ поступим более радикальным образом, заменив их в системе (2.6) на цилиндры

$$K_i^\sigma(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \Pi : \xi \in \mathrm{co}\{s^{(i)}(\nu,s+\sigma\nu,t;\tau)\},\ \tau < t-\sigma,\ \nu \in \aleph\},$$

верхней границей которых служит сфера радиуса $\sigma > 0$ с центром в точке s в момент времени t. Для описания поверхностей $\partial K_i^\sigma(s,t)$ этих "искусственных" цилиндров $K_i^\sigma(s,t)$ введем вектор-функции $s^{(i)\sigma}$, положив $s^{(i)\sigma}(\nu,s,t;\tau) = s^{(i)}(\nu,s+\sigma\nu,t;\tau)$. В бихарактеристиках $s^{(i)\sigma}(\nu,s,t;\tau)$, описывающих границы $\partial K_i^\sigma(s,t)$ телесных конусов $K_i^\sigma(s,t)$, аналогичное использование символа σ имеет своей целью лишь единообразие обозначений, т.е. здесь $s^{(i)\sigma}(\nu,s,t;\tau) = s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)$.

Результатом модернизации системы (2.6) по описанной процедуре будет семейство (относительно параметра $\sigma > 0$) систем уравнений вида

$$x^\sigma(s,t) = \frac{1}{\mathrm{mes}\,\aleph}\int_\aleph \sum_{i=1}^n \mathrm{p}^{(i)}(\nu,s,t)\Big\{ r_i(\check{\nu}^{(i)}, \check{s}^{(i)}, \check{t}^{(i)}) + \\ + \int_{\check{t}^{(i)}}^{t-\sigma} \Big[g_i(r^\sigma,\mu,\xi,\tau) - \sum_{k=1}^n \langle M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau), r^\sigma_{k_\xi}(\mu,\xi,\tau)\rangle \Big]\Big|_{\substack{\mu=\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\\ \xi=s^{(i)\sigma}(\nu,s,t;\tau)}} d\tau \Big\} d\omega_\nu. \tag{3.1}$$

Понятно, что отрыв вершины (s,t) от усеченных конусов K^σ сужает область определения решения системы (3.1) по сравнению с системой (2.6) до области

$$\Pi_\sigma = S_\sigma \times T_\sigma,\quad S_\sigma = \{s \in S : s + \widehat{\sigma}\nu \in S,\quad \nu \in \aleph\},\quad T_\sigma = (t_0+\sigma, t_1),$$

где $\widehat{\sigma}$ есть максимальное значение $\|s^{(i)}(\nu,s,t;t-\sigma) - s\|$ на множестве $\aleph \times S \times T$ для всех $i = 1,2,\dots,n$.

В приграничном слое $\Pi \setminus \Pi_\sigma$ решение x^σ, как увидим в дальнейшем, может доопределяться почти произвольно. Будем считать, что $x^\sigma(s,t) = 0$, $(s,t) \in \Pi \setminus \Pi_\sigma$.

Укажем теперь способ сведения интегродифференциальной системы (3.1) к эквивалентной интегральной системе, не содержащей частных производных от искомого решения x.

Ключевым моментом здесь является свойство ортогональности вектора $M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)$ и вектора нормали к характеристической поверхности μ, что очевидно из способа (2.3) определения матриц M_j, $j = 1,2,\dots,m$, или правила (2.7) для вектор-функции $M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)$, $i,k = 1,2,\dots,n$. С геометрической точки зрения это свойство означает скольжение векторов $M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)$ вдоль границы $\partial K_i^\sigma(s,t;\tau)$ при всех $k = 1,2,\dots,n$, $k \neq i$, $\tau \in (t_0, t-\sigma)$.

Пусть $\nu^\perp$ — произвольный вектор в R^m. Вычислим производную по направлению этого вектора от функции $r_k(\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau),\ s^{(i)\sigma}(\nu,s,t;\tau),\tau)$, используя для краткости обозначения $\mu = \nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)$, $\xi = s^{(i)\sigma}(\nu,s,t;\tau)$. Получим формулу

$$\frac{d}{d\nu^\perp} r_k(\mu,\xi,\tau) = \langle r_{k_\mu}(\mu,\xi,\tau), \nu^{(i)}_\nu(\nu,s,t;\tau)\nu^\perp\rangle + \langle r_{k_\xi}(\mu,\xi,\tau), s^{(i)\sigma}_\nu(\nu,s,t;\tau)\nu^\perp\rangle. \tag{3.2}$$

В силу невырожденности и гладкости отображений $s^{(i)}(\cdot, s, t; \tau) : \aleph \to \partial K_i^\sigma(s, t; \tau) \cup \partial K_i^\sigma(s, t; \partial S)$ существует вектор-функция $\mu^{(i,k)}(\nu, s, t; \tau)$, обеспечивающая равенство

$$s_\nu^{(i)\sigma}(\nu, s, t; \tau)\mu^{(i,k)}(v, s, t; \tau) = \rho_i(\tau, \nu)M^{(i,k)}(\mu, \xi, \tau), \tag{3.3}$$

где $\rho = \rho_i(\tau, \nu)$ — скалярная функция, вычисляющая отношение длин векторов $s_\nu^{(i)\sigma}\mu^{(i,k)}$ и $M^{(i,k)}$. Положим далее, что $\nu^\perp = \mu^{(i,k)}(v, s, t; \tau)$. Тогда на основании (3.2) и (3.3) справедливо следующее правило нахождения полной производной по направлению $\nu^\perp$ от произведения вектора $\mathrm{p}^{(i)}$ и инварианта r_k:

$$\frac{d}{d\nu^\perp}\Big[\mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)r_k(\mu, \xi, \tau)\Big] = \frac{\partial}{\partial\nu^\perp}\Big[\mathrm{p}^{(i)}(v, s, t)r_k(\mu, \xi, \tau)\Big] + \\ + \rho_i(\nu, \tau)\mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)\langle r_{k_\xi}(\mu, \xi, \tau), M^{(i,k)}(\mu, \xi, \tau)\rangle.$$

Отсюда следует

$$\mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)\langle r_{k_\xi}(\mu, \xi, \tau), M^{(i,k)}(\mu, \xi, \tau)\rangle = \frac{d}{d\nu^\perp}\left[\frac{1}{\rho_i(\nu, \tau)}\mathrm{p}^{(i)}(v, s, t)r_k(\mu, \xi, \tau)\right] - \\ - \frac{\partial}{\partial\nu^\perp}\left[\frac{1}{\rho_i(v, \tau)}\mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)r_k(\mu, \xi, \tau)\right].$$

Поэтому систему (3.1) можно переписать в форме, не использующей частные производные от решения по пространственным переменным,

$$x^\sigma(s, t) = \frac{1}{\operatorname{mes}\aleph}\sum_{i=1}^n \Big\{ \int_{\aleph_S^{(i)}} \mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)r_i(\check\nu^{(i)}, \check s^{(i)}, \check t^{(i)})d\omega_\nu - \\ - \int_T \int_{\partial\aleph_S^{(i)}(\tau)} \mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n r_k(\check\nu^{(i)}, \check s^{(i)}, \check t^{(i)})/\rho_i(\nu, \tau)d\omega_{\partial\nu}d\tau + \\ + \int_{\aleph_0^{(i)}} \mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)r_i(\check\nu^{(i)}, \check s^{(i)}, t_0)d\omega_\nu + \int_\aleph \int_{\check t^{(i)}}^{t-\sigma} \Big[\mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)g_i(r^\sigma, \mu, \xi, \tau) + \\ + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^n \frac{\partial}{\partial\nu^\perp}\Big(\mathrm{p}^{(i)}(\nu, s, t)r_k^\sigma(\mu, \xi, \tau)/\rho_i(\nu, \tau)\Big)\Big]\Big|_{\substack{\mu=\nu^{(i)}(\nu, s, t; \tau)\\ \xi=s^{(i)\sigma}(\nu, s, t; \tau)}} d\tau\, d\omega_\nu\Big\}, \quad (s, t) \in \Pi_\sigma, \quad \sigma > 0. \tag{3.4}$$

Далее система (3.4) примет более компактный вид за счет сведения первых двух слагаемых в одно. Однако вычисление этой разности преследует иную цель.

4. Построение корректных начально-граничных условий

В системе (3.4) первые три слагаемых содержат значения инвариантов на границе области Π. Следовательно, она имеет смысл только в том случае, когда эти значения инвариантов можно вычислить по заданным начальным и граничным условиям.

Как обычно, для гиперболических систем наиболее просто решается вопрос с постановкой начальных условий. Действительно, если для системы (1.1) поставить начальные условия

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S, \tag{4.1}$$

то их будет ровно столько, сколько требуется для вычисления третьего слагаемого при любых $(s, t) \in \Pi_\sigma$, $\sigma > 0$.

Существенно сложнее обстоит дело с постановкой корректных граничных условий, а именно условий на боковой границе $\partial S \times T$. К ним, как нетрудно видеть, апеллируют первые два слагаемых интегральной системы (3.4), в которых множества $\aleph_S^{(i)}$ и $T \times \partial\aleph_S^{(i)}(\tau) = \{\nu \in \partial\aleph_S^{(i)}(\tau),$ $\tau \in T\}$ состоят из одних и тех же точек, но описываются разными способами.

Фактически множество $\aleph_S^{(i)}$ можно рассматривать как объединение его сечений $\partial\aleph_S^{(i)}(\tau)$ по времени $\tau \in T$. Понятно, что эти сечения являются заведомо пустыми множествами, начиная с некоторого достаточно большого $\tau < t$, если только точка (s,t) не залегает на боковой границе, т. е. $(s,t) \notin \partial S \times T$. Отметим, что множество $\partial\aleph_S^{(i)}(\tau)$, вообще говоря, многосвязно. Оно состоит из сечений ("окружностей") сферы $\aleph$, "ориентированных" на соответствующие участки границы $\partial S \times T$. Элементарному приращению $d\tau$ соответствует элементарное приращение $d\nu^\perp$, причем $d\omega_\nu = d\omega_{\partial\nu} d\omega_{d\nu^\perp}$, а вектор $\nu^\perp$ связан с вектором $M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)$ соотношением (3.3).

Установим правило пересчета $d\nu^\perp$ по $d\tau$. Для этого положим, что участок границы $\partial S \times T$ в окрестности точки $(\check{s}^{(i)}(\nu,s,t),\ \check{t}^{(i)}(\nu,s,t))$ описывается с помощью некоторой кусочно-гладкой функции $\varphi(\xi)$ уравнением $\varphi(\xi) = 0$. Обозначим градиент $\nabla\varphi(\check{s}^{(i)}(\nu,s,t))$ символом $\mu^\perp$, $\mu^\perp \neq 0$. Направление ν, "переводящее" точку (s,t) в точку (ξ,τ) из окрестности точки $(\check{s}^{(i)}(\nu,s,t),$ $\check{t}^{(i)}(\nu,s,t))$, связано с моментом времени τ соотношением $\varphi(s^{(i)}(\nu,s,t;\tau)) = 0$, из которого находим искомое правило пересчета

$$d\tau = -\frac{\langle \mu^\perp, s_\nu^{(i)}(\nu,s,t;\tau)\nu^\perp\rangle}{\langle \mu^\perp, \lambda_\mu(\mu,\xi,\tau)\rangle} d\omega_{d\nu^\perp}.$$

После замены выражения в числителе по формуле (3.3) окончательно будем иметь

$$d\tau = \frac{\langle \mu^\perp, M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)\rangle}{\langle \mu^\perp, \lambda_{i\mu}(\mu,\xi,\tau)\rangle} \rho_i(\nu,\tau) d\omega_{d\nu^\perp}.$$

Тогда суммой первых двух интегралов в (3.4) будет интеграл

$$\int_{\aleph_S^{(i)}} \mathrm{p}^{(i)}(\nu,s,t) \left\{ \left[\langle \mu^\perp, \lambda_{i\mu}\rangle r_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \langle \mu^\perp, M^{(i,k)}\rangle r_k \right] \Big/ \langle \mu^\perp, \lambda_{i\mu}\rangle \right\} d\omega_\nu, \tag{4.2}$$

где $\mu = \check{\nu}^{(i)}(\nu,s,t)$, $\xi = \check{s}^{(i)}(\nu,s,t)$.

Отметим, что произведение вектора нормали $\mu^\perp$ к поверхности ∂S в точке $\check{s}^{(i)}(\nu,s,t)$ и вектора $\lambda_{i\mu}(\check{\nu}^{(i)}(\nu,s,t),\check{s}^{(i)}(\nu,s,t),\check{t}^{(i)}(\nu,s,t))$ для всех $(s,t) \in \Pi_\sigma$ отлично от нуля, т. к. равенство нулю этого произведения означало бы скольжение бихарактеристики $s^{(i)}(\nu,s,t;\cdot)$ по границе $\partial S \times T$, что невозможно.

Преобразуем теперь выражение, стоящее в формуле (4.2) в квадратных скобках, воспользовавшись [14] тождеством

$$\lambda_{i_{\mu_j}}(\mu,\xi,\tau) = \langle \ell^{(i)}(\mu,\xi,\tau), A_j(\xi,\tau)\mathrm{p}^{(i)}(\mu,\xi,\tau)\rangle$$

и равенствами (2.7) и (2.1). Будем иметь

$$\langle \mu^\perp(\xi,\tau), \lambda_{i_\mu}(\mu,\xi,\tau)\rangle r_i(\mu,\xi,\tau) + \sum_{i=1}^{n} \langle \mu^\perp(\xi,\tau), M^{(i,k)}(\mu,\xi,\tau)\rangle r_k(\mu,\xi,\tau) =$$
$$= \langle \ell^{(i)}(\mu,\xi,\tau), \mathcal{A}(\mu^\perp,\xi,\tau)x(\xi,\tau)\rangle.$$

Таким образом, система интегральных уравнений (3.4) примет вид

$$\begin{aligned} x^\sigma(s,t) = \frac{1}{\operatorname{mes}\aleph} \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ &\int_{\aleph_S^{(i)}} \mathrm{p}^{(i)}(\nu,s,t) \frac{\langle \ell^{(i)}(\mu,\xi,\tau), \mathcal{A}(\mu^\perp,\xi,\tau)x(\xi,\tau)\rangle}{\langle \mu^\perp(\xi,\tau), \lambda_{i_\mu}(\mu,\xi,\tau)\rangle} d\omega_\nu + \\ &+ \int_{\aleph_0^{(i)}} \mathrm{p}^{(i)}(\nu,s,t) \langle \ell^{(i)}(\mu,\xi,t_0), x^0(\xi)\rangle d\omega_\nu + \\ &+ \int_{\aleph} \int_{\check{t}^{(i)}}^{t-\sigma} \Bigg[\mathrm{p}^{(i)}(\nu,s,t) g_i(\mathcal{L}'x^\sigma,\mu,\xi,\tau) + \\ &+ \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{\partial}{\partial\nu^\perp} \Big(\mathrm{p}^{(i)}(\nu,s,t) \langle \ell^{(k)}(\mu,\xi,\tau), x^\sigma(\xi,\tau)\rangle \big/ \rho_i(\nu,\tau) \Big) \Bigg] d\tau\, d\omega_\nu \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

при любых $(s,t) \in \Pi_\sigma$, $\sigma > 0$, где $\mu = \nu^{(i)}(\nu, s, t; \tau)$, $\xi = s^{(i)}(\nu, s, t; \tau)$.

Выясним, каким образом следует определить решение x на границе $\partial S \times T$, ориентируясь на следующие критерии. С одной стороны, граничные условия должны обеспечивать однозначное вычисление произведения $\mathcal{A}(\mu^\perp, \xi, \tau)x(\xi, \tau)$, $(\xi, \tau) \in \partial S \times T$. С другой стороны, они не могут вступать в конфликт с начальными условиями (4.1).

В силу равенств (1.2), (2.1) имеем соотношение

$$\mathcal{A}(\mu^\perp, \xi, \tau)x(\xi, \tau) = \mathcal{P}(\mu^\perp, \xi, \tau)\Lambda(\mu^\perp, \xi, \tau)\mathcal{L}'(\mu^\perp, \xi, \tau)\mathcal{P}(\mu^\perp, \xi, \tau)r(\mu^\perp, \xi, \tau) = \\ = \mathcal{P}(\mu^\perp, \xi, \tau)\Lambda(\mu^\perp, \xi, \tau)r(\mu^\perp, \xi, \tau).$$

Оно означает, что для нахождения вектора $\mathcal{A}(\mu^\perp, \xi, \tau)x(\xi, \tau)$ достаточно знать в точках $(\xi, \tau) \in \partial S \times T$ все инварианты $r_i(\mu^\perp, \xi, \tau)$, соответствующие ненулевым собственным значениям $\lambda_i(\mu^\perp, \xi, \tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Чтобы понять, какие инварианты $r_i(\mu^\perp, \xi, \tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$, определяются внутри области Π, а какие из них следует подчинить граничным условиям, рассмотрим поведение бихарактеристик $s^{(i)}(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau; \cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Каждая из них с ростом времени либо приходит в точку $(\xi, \tau) \in \partial S \times T$ из области Π, либо, наоборот, уходит в область Π. Поэтому инварианты $r_i(\mu^\perp, \xi, \tau)$, соответствующие "приходящим" бихарактеристикам, определяются решением x^σ, а инварианты $r_i(\mu^\perp, \xi, \tau)$, отвечающие "уходящим" характеристикам, требуется задать на границе $\partial S \times T$. Классифицировать "приходящие" и "уходящие" бихарактеристики можно по знаку их собственных значений. Действительно, положительность скалярного произведения $\langle \dot{s}^{(i)}(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau; t), \mu^\perp(\xi, \tau)\rangle$ соответствует "приходящей", а отрицательность — "уходящей" бихарактеристике $s^{(i)}(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau; \cdot)$. Но в силу свойства однородности первой степени собственных значений $\lambda_i(\mu, \xi, \tau)$ по переменной μ из теоремы Эйлера и уравнений (2.4) следует

$$\langle s^{(i)}(\mu^\perp, \xi, \tau; t), \mu^\perp\rangle = \langle \lambda_{i_\mu}(\mu^\perp, \xi, \tau; t), \mu^\perp\rangle = \lambda_i(\mu^\perp, \xi, \tau).$$

Таким образом, на границе $\partial S \times T$ следует задавать инварианты $r_i(\mu^\perp, \xi, \tau)$, или, что то же, линейные комбинации $\langle \ell^{(i)}(\mu^\perp, \xi, \tau), x(\xi, \tau)\rangle$, отвечающие отрицательным значениям $\lambda_i(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Для формализации способа задания граничных условий введем матрицы $\mathcal{A}^-$ и $\mathcal{A}^+$, положив для $(\xi, \tau) \in \partial S \times T$

$$\mathcal{A}^-(\xi, \tau) = \mathcal{P}(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau)\Lambda^-(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau)\mathcal{L}'(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau),$$
$$\mathcal{A}^+(\xi, \tau) = \mathcal{P}(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau)\Lambda^+(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau)\mathcal{L}'(\mu^\perp(\xi, \tau), \xi, \tau),$$

где матрица $\Lambda^-(\Lambda^+)$ построена по матрице Λ заменой всех ее положительных (отрицательных) диагональных элементов на нули. Тогда корректные граничные условия примут вид

$$\mathcal{A}^-(\xi, \tau)x(\xi, \tau) = q(\xi, \tau), \quad (\xi, \tau) \in \partial S \times T. \tag{4.4}$$

5. Обобщенное решение и его свойства

Построим на основе интегральной системы (4.3) метод последовательных приближений. Используя сжимающее свойство отображения (4.3), можно доказать, что справедлива

Теорема 5.1. *Пусть дополнительно к предположениям первого параграфа вектор-функции x^0 и q суммируемы по Лебегу на множествах S и $\partial S \times T$ соответственно. Тогда для любого $\sigma > 0$*

1) *решение x^σ интегральной системы (4.3) существует, единственно и удовлетворяет оценке*

$$\|x^\sigma(s,t)\| \le C_\sigma\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_{\aleph_0^{(i)}} \Big[\|x^0(\check{s}^{(i)}(\nu,s,t))\| + \int_{t_0}^{t} \|f(0,s^{(i)}(\nu,s,t;\alpha),\alpha)\|d\alpha\Big] d\omega_\nu +$$

$$+ \int_{\aleph_S^{(i)}} \Big[\|q(\xi,\tau)\| + \sum_{k\in \mathrm{I}(\xi,\tau)} \Big(\|x^0(s^{(k)}(\mu^\perp(\xi,\tau),\xi,\tau;t_0))\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{\tau} \|f(0,s^{(k)}(\mu^\perp(\xi,\tau),\xi,\tau;\alpha),\alpha)\|d\alpha\Big) + \int_{t_0}^{\tau} \|f(0,s^{(i)}(\nu,s,t;\alpha),\alpha)\|d\alpha\Big]\Big|_{\substack{\xi=\check{s}^{(i)}(\nu,s,t)\\ \tau=\check{t}^{(i)}(\nu,s,t)}} d\omega_\nu\Big) +$$

$$+ \int_{K(\partial S)} \|q(\xi,\tau)\|d\omega + \int_{K(t_0)} \|x^0(\xi)\|d\xi + \iint_{\mathrm{K}} \|f(0,\xi,\tau)\|d\xi d\tau\Big\}; \quad (5.1)$$

2) *инварианты r_i^σ являются абсолютно непрерывными функциями вдоль каждой бихарактеристики*

$$\xi = s^{(i)}(\nu,s,t;\tau), \quad (s,t)\in\Pi_\sigma, \quad \nu\in\aleph, \quad \tau\in(\check{t}^{(i)}(\nu,s,t), \hat{t}^{(i)}(\nu,s,t));$$

3) *в произвольной подобласти $\widetilde{\Pi}\subset\Pi$ с кусочно-гладкой границей $\partial\widetilde{\Pi}$ справедлива формула интегрирования по частям*

$$\iint_{\widetilde{\Pi}} \langle\psi, \mathrm{D}x^\sigma\rangle ds\,dt = \int_{\partial\widetilde{\Pi}} \langle\psi, \mathrm{B}x^\sigma\rangle d\omega - \iint_{\widetilde{\Pi}} \langle \mathrm{D}^*\psi, x^\sigma\rangle ds\,dt, \quad (5.2)$$

в которой

$$\mathrm{B}(\xi,\tau) = \nu_0(\xi,\tau)\mathrm{E} + \sum_{j=1}^{m} \nu_j(\xi,\tau)A_j(\xi,\tau), \quad (\xi,\tau)\in\partial\widetilde{\Pi},$$

$(\nu^0(\xi,\tau),\nu(\xi,\tau))$ *— вектор единичной внешней нормали к поверхности $\partial\widetilde{\Pi}$ в точке (ξ,τ), сопряженный оператор $\mathrm{D}^*\psi$ для гладких вектор-функций ψ имеет вид*

$$\mathrm{D}^*\psi = \psi_t + \sum_{j=1}^{m} (A_j'\psi)_{s_j};$$

4) *норма Лебега приближенных решений x^σ не зависит от параметра σ.*

В неравенстве (5.1) константа $C_\sigma > 0$ не зависит от входных параметров задачи (1.1), (4.1), (4.4), но зависит от параметра усреднения σ. Индексное множество $\mathrm{I}(\xi,\tau)\subset\{1,2,\ldots,n\}$ состоит из тех номеров i, для которых $\lambda_i(\mu^\perp(\xi,\tau),\xi,\tau) > 0$. Конус K является областью зависимости решения x^σ в точке (s,t), $\mathrm{K}(\partial S) = \mathrm{K}\cap(\partial S\times T)$, $\mathrm{K}(t_0) = \mathrm{K}\cap(S\times t_0)$.

Результаты теоремы 5.1 позволяют ввести обобщенное решение x задачи (1.1), (4.1), (4.4), положив

$$x(s,t) = \lim_{\sigma\to 0} x^\sigma(s,t).$$

Свойства обобщенного решения устанавливает

Теорема 5.2. *Пусть выполнены перечисленные ранее предположения на параметры задачи* (1.1), (4.1), (4.4). *Тогда*

1) *обобщенное решение x существует, единственно и суммируемо по Лебегу в* Π *с той же степенью, что и входные данные задачи f, x^0 и q;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует подобласть Π_ε, $\Pi_\varepsilon\subset\Pi$,* $\mathrm{mes}(\Pi\setminus\Pi_\varepsilon) < \varepsilon$, *в которой решение x удовлетворяет оценке типа* (5.1).

3) *для решения x справедлива формула интегрирования по частям* (5.2).

Литература

1. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* – М.: Наука, 1983. – 424 с.
2. Friedrichs K.O. *The identity of weak and strong extensions of differential operator* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – V. 55. – P. 132–151.
3. Friedrichs K.O. *Symmetric positive linear differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1954. – V. 7. – № 2. – P. 345–392.
4. Friedrichs K.O. *Symmetric positive linear differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1958. – V. 11. – P. 333–418.
5. Lax P.D., Phillips R.S. *Local boundary conditions for dissipative linear differential operators* // Comm. Pure Appl. Math. – 1960. – V. 13. – P. 427–455.
6. Sarason L. *On weak and strong solutions of boundary value problems* // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – V. 15. – P. 237–288.
7. Sarason L. *On boundary value problems for hyperbolic equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1962. – V. 15. – P. 373–395.
8. Phillips R.S., Sarason L. *Singular symmetric first order differential operators* // J. Math. and Mech. – 1966. – V. 15. – № 2. – P. 235–271.
9. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения.* Ч. 2. *Оптимальное управление.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 151 с.
10. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1964. – 272 с.
11. Рождественский Б.Л., Яненко Н.А. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – М.: Наука, 1978. – 687 с.
12. Годунов С.К. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1979. – 392 с.
13. Levy H. *Über Anfangswertproblem für eine hyperbolische nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängingen Veränderlichen* // Math. Ann. – 1927. – V. 97. – S. 179–191.
14. Терлецкий В.А. *Обобщенное решение многомерных полулинейных гиперболических систем* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 68–76.
15. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – М.: Мир, 1989. – 625 с.
16. Терлецкий В.А. *Обобщенное решение одномерных полулинейных гиперболических систем со смешанными условиями* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 12. – С. 82–90.
17. Терлецкий В.А. *Обобщенное решение гиперболических систем одномерных полулинейных дифференциальных уравнений.* – Иркутский государственный университет. Серия: оптимизация и управление. Вып. 11. – Иркутск, 2004. – 48 с.

Иркутский государственый университет

Поступила 27.11.2006