ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 517.946

Ф.Г. МУХЛИСОВ, Э.Д. ХУСАИНОВА

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть E_p^+ — полупространство $x_p > 0$ p-мерного евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $p \geq 3$. Непересекающиеся гиперповерхности $\Gamma^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$, разбивают E_p^+ на $n+1$ частей. Эти части обозначим через $T^{(j)}$, $j = \overline{1,n+1}$. Области $T^{(j)}$ ограничены гиперповерхностями $\Gamma^{(j-1)}$, $\Gamma^{(j)}$ и характеристической гиперплоскостью $x_p = 0$.

Пусть Q_R — шар с центром в начале координат и радиуса R такого, что $T^{(n)} \subset Q_R$, S_R — сфера с центром в начале координат и радиуса R. Часть шара Q_R (сферы S_R) в полупространстве E_p^+ обозначим через Q_R^+ (S_R^+).

В работе рассматривается следующая краевая задача. Требуется найти четные по x_p решения уравнений

$$\Delta_B u_j + \lambda_j^2 u_j = 0 \quad (j = \overline{1,n+1}), \tag{1}$$

где $\Delta_B = \sum\limits_{j=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{k}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p}$, $\lambda_j^2 = \alpha_j \beta_j$, $\alpha_j > 0$, $\beta_j > 0$, $j = \overline{1,n+1}$, $k > 0$, $p \geq 3$, в областях соответственно $T^{(j)}$ ($j = \overline{1,n+1}$), удовлетворяющие на $\Gamma^{(j)}$ ($j = \overline{1,n}$) условиям сопряжения

$$u_j^+ - u_{j+1}^- = f_j(\xi), \quad \frac{1}{\alpha_j}\frac{\partial u_j^+}{\partial n_\xi} - \frac{1}{\alpha_{j+1}}\frac{\partial u_{j+1}^-}{\partial n_\xi} = \varphi_j(\xi) \quad (j = \overline{1,n}), \tag{2}$$

и при $R \to \infty$ — условиям излучения

$$\int_{S_R^+} |u_{n+1}|^2 x_p^k dS_R^+ = O(1), \quad \int_{S_R^+} \left| \frac{\partial u_{n+1}}{\partial r} - i\lambda_{n+1} u_{n+1} \right|^2 x_p^k dS_R^+ = o(1). \tag{3}$$

В условиях сопряжения (2) величины со знаками "+" и "−" обозначают предельные значения соответствующих функций при приближении к $\Gamma^{(j)}$ соответственно из $T^{(j)}$ и $T^{(j+1)}$; $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$ означает производную по нормали к $\Gamma^{(j)}$ в точке $\xi \in \Gamma^{(j)}$, внешней по отношению к области $T^{(j)}$; $f_j(\xi)$, $\varphi_j(\xi)$ — заданные на $\Gamma^{(j)}$ непрерывные функции.

1. Методом разделения переменных строятся частные решения уравнения

$$\Delta_B u + \lambda^2 u = 0$$

в полупространстве $x_p > 0$, удовлетворяющие при $R \to \infty$ условиям излучения

$$\int_{S_R^+} |u|^2 x_p^k dS_R^+ = O(1), \quad \int_{S_R^+} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda u \right|^2 x_p^k dS_R^+ = o(1).$$

Эти решения имеют вид

$$u_{ms}(r,\theta) = r^{-\frac{\gamma-2}{2}} H_{p_m}^{(1)}(\lambda r) Y_{ms}^k(\theta) = \sigma_m(r) Y_{ms}^k(\theta), \tag{4}$$

где $\gamma = p+k$, $p_m = \frac{\sqrt{(k+1)^2+4\mu_m^2}}{2}$, $\mu_m^2 = m(m+p+k-2)$, $Y_{ms}^k(\theta)$ — весовые сферические функции, $m = 0,1,2,\dots$, $s = \overline{1,\sigma(m)}$ [1], $H_{p_m}^{(1)}(\lambda r)$ — функция Ганкеля первого рода.

С помощью частных решений (4) доказывается единственность решения задачи (1)–(3).

2. Известно [2], что функции

$$\psi_j(r) = \frac{\frac{1}{2i}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)^{\nu} r^{-\nu} H_{\nu}^{(1)}(\lambda_j r)}{\Gamma(\nu)} \quad (j = \overline{1,n+1}), \tag{5}$$

где $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $\nu = \frac{k+1}{2}$, являются фундаментальными решениями уравнений (1) при $p=3$ с особенностью в начале координат. Для получения фундаментальных решений с особенностью в произвольной точке $x=\xi$ применим к функциям (5) оператор обобщенного сдвига T_x^{ξ}:

$$\varepsilon_j(x,\ \xi) = c_k \int_0^{\pi} \psi_j(\rho_{\varphi}) \sin^{k-1}\varphi\, d\varphi \quad (j = \overline{1,n+1}), \tag{6}$$

где $\rho_{\varphi} = (|x'-\xi'|^2 + x_3^2 + \xi_3^2 - 2x_3\xi_3\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}$, $x' = (x_1,x_2)$, $c_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$.

С помощью фундаментальных решений (6) образуем поверхностные потенциалы типа простого и двойного слоев

$$\begin{aligned} V_{ji}(x,\mu_{2i}) &= \int_{\Gamma^{(i)}} \mu_{2i}(\xi)\varepsilon_j(\xi,x)\xi_3^k d\Gamma^{(i)}, && (j,i) = \overline{(1,1),(n+1,n)},\\ W_{ji}(x,\mu_{2i-1}) &= \int_{\Gamma^{(i)}} \mu_{2i-1}(\xi)\frac{\partial}{\partial n_{\xi}}\varepsilon_j(\xi,x)\xi_3^k d\Gamma^{(i)}, && (j,i) = \overline{(1,1),(n+1,n)}. \end{aligned}$$

Используя представление ганкелевой функции в виде ряда и рассуждения, приведенные в [3], получаем, что фундаментальные решения (6) в точке ξ имеют такую же особенность, что и фундаментальное решение уравнения $\Delta_B u = 0$. Поэтому потенциалы V_{ji} и W_{ji} имеют на $\Gamma^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$ такие же предельные значения, что и их аналоги для этого уравнения. Эти предельные значения имеют вид

$$\frac{\partial V_{ji}^{\pm}(\xi_0,\mu_{2i})}{\partial n_{\xi_0}} = \pm\frac{\mu_{2i}(\xi_0)}{2} + \frac{\partial \widetilde{V}_{ji}(\xi_0,\ \mu_{2i})}{\partial n_{\xi_0}}, \qquad (j,i) = \overline{(1,1),(n+1,n)}, \tag{7}$$

$$W_{ji}^{\pm}(\xi_0,\mu_{2i-1}) = \mp\frac{\mu_{2i-1}(\xi_0)}{2} + \widetilde{W}_{ji}(\xi_0,\mu_{2i-1}), \quad (j,i) = \overline{(1,1),(n+1,n)}, \tag{8}$$

где величины с волнистой линией обозначают прямые значения потенциалов типа двойного слоя и нормальных производных потенциалов типа простого слоя на поверхностях $\Gamma^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$.

3. Решение задачи (1)–(3) при $p=3$ ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \alpha_1 W_{11}(x,\mu_1) + \alpha_1 V_{11}(x,\mu_2),\\ u_j(x) &= \alpha_j W_{jj-1}(x,\mu_{2j-3}) + \alpha_j V_{jj-1}(x,\mu_{2j-2}) + \alpha_j W_{jj}(x,\mu_{2j-1}) +\\ &\quad + \alpha_j V_{jj}(x,\mu_{2j}), \quad j = \overline{2,n-1},\\ u_n(x) &= \alpha_n W_{n,n-1}(x,\mu_{2n-3}) + \alpha_n V_{n,n-1}(x,\mu_{2n-2}) + \alpha_n W_{n,n}(x,\mu_{2n-1}) + \alpha_n V_{n,n}(x,\mu_{2n}),\\ u_{n+1}(x) &= \alpha_{n+1} W_{n+1,n}(x,\mu_{2n-1}) + \alpha_{n+1} V_{n+1,n}(x,\mu_{2n}). \end{aligned} \tag{9}$$

Эти функции являются решениями уравнений (1) при $p=3$ соответственно в областях $T^{(j)}$ $(j = \overline{1,n+1})$ и функция $u_{n+1}(x)$ удовлетворяет условиям излучения (3). Неизвестные плотности μ_i $(i = \overline{1,2n})$ найдем из требования, чтобы функции $u_j(x)$ $(j = \overline{1,n+1})$ удовлетворяли условиям сопряжения (2). Подставляя их в эти условия, с учетом формул (7), (8) получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\mu_1(y) + \int_{\Gamma^{(1)}} K_{11}(\xi,y)\mu_1(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(1)} + \int_{\Gamma^{(1)}} K_{12}(\xi,y)\mu_2(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(2)}} K_{13}(\xi,y)\mu_3(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(2)} + \int_{\Gamma^{(2)}} K_{14}(\xi,y)\mu_4(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(2)} = F_1(y),$$

$$\mu_2(y) + \int_{\Gamma^{(1)}} K_{21}(\xi,y)\mu_1(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(1)} + \int_{\Gamma^{(1)}} K_{22}(\xi,y)\mu_2(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(2)}} K_{23}(\xi,y)\mu_3(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(2)} + \int_{\Gamma^{(2)}} K_{24}(\xi,y)\mu_4(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(2)} = F_2(y),$$

$$\mu_{2j-1}(y) + \int_{\Gamma^{(j-1)}} K_{2j-1,2j-3}(\xi,y)\mu_{2j-3}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j-1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(j-1)}} K_{2j-1,2j-2}(\xi,y)\mu_{2j-2}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j-1)} + \int_{\Gamma^{(j)}} K_{2j-1,2j-1}(\xi,y)\mu_{2j-1}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(j)}} K_{2j-1,2j}(\xi,y)\mu_{2j}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j)} + \int_{\Gamma^{(j+1)}} K_{2j-1,2j+1}(\xi,y)\mu_{2j+1}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j+1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(j+1)}} K_{2j-1,2j+2}(\xi,y)\mu_{2j+2}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j+1)} = F_{2j-1}(y),$$

$$\mu_{2j}(y) + \int_{\Gamma^{(j-1)}} K_{2j,2j-3}(\xi,y)\mu_{2j-3}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j-1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(j-1)}} K_{2j,2j-2}(\xi,y)\mu_{2j-2}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j-1)} + \int_{\Gamma^{(j)}} K_{2j,2j-1}(\xi,y)\mu_{2j-1}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(j)}} K_{2j,2j}(\xi,y)\mu_{2j}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j)} + \int_{\Gamma^{(j+1)}} K_{2j,2j+1}(\xi,y)\mu_{2j+1}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j+1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(j+1)}} K_{2j,2j+2}(\xi,y)\mu_{2j+2}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(j+1)} = F_{2j}(y), \quad j = \overline{2, n-1},$$

$$\mu_{2n-1}(y) + \int_{\Gamma^{(n-1)}} K_{2n-1,2n-3}(\xi,y)\mu_{2n-3}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n-1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(n-1)}} K_{2n-1,2n-2}(\xi,y)\mu_{2n-2}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n-1)} + \int_{\Gamma^{(n)}} K_{2n-1,2n-1}(\xi,y)\mu_{2n-1}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(n)}} K_{2n-1,2n}(\xi,y)\mu_{2n}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n)} = F_{2n-1}(y),$$

$$\mu_{2n}(y) + \int_{\Gamma^{(n-1)}} K_{2n,2n-3}(\xi,y)\mu_{2n-3}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n-1)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(n-1)}} K_{2n,2n-2}(\xi,y)\mu_{2n-2}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n-1)} + \int_{\Gamma^{(n)}} K_{2n,2n-1}(\xi,y)\mu_{2n-1}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n)} +$$

$$+ \int_{\Gamma^{(n)}} K_{2n,2n}(\xi,y)\mu_{2n}(\xi)\xi_3^k d\Gamma^{(n)} = F_{2n}(y), \tag{10}$$

где

$$K_{11} = \frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}\Big(\alpha_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial n_\xi} - \alpha_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n_\xi}\Big), \quad K_{12} = \frac{2}{\alpha_1+\alpha_2}\Big(\alpha_2\varepsilon_2 - \alpha_1\varepsilon_1\Big),$$

$$K_{13} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial n_\xi}, \quad K_{14} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\varepsilon_2,$$

$$K_{21} = \frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial n_y\partial n_\xi} - \frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial n_y\partial n_\xi}, \quad K_{22}(\xi,y) = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial n_y} - \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial n_y},$$

$$K_{23} = -\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial n_y\partial n_\xi}, \quad K_{24}(\xi,y) = -\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial n_y},$$

$$K_{2j-1,2j-3}=-\frac{2\alpha_j}{\alpha_j+\alpha_{j+1}}\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial n_\xi},\quad K_{2j-1,2j-2}=-\frac{2\alpha_j}{\alpha_j+\alpha_{j+1}}\varepsilon_j,$$
$$K_{2j-1,2j-1}=\frac{2}{\alpha_j+\alpha_{j+1}}\left(\alpha_{j+1}\frac{\partial\varepsilon_{j+1}}{\partial n_\xi}-\alpha_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial n_\xi}\right),$$
$$K_{2j-1,2j}=\frac{2}{\alpha_j+\alpha_{j+1}}\left(\alpha_{j+1}\varepsilon_{j+1}-\alpha_j\varepsilon_j\right),$$
$$K_{2j-1,2j+1}=\frac{2\alpha_{j+1}}{\alpha_j+\alpha_{j+1}}\frac{\partial\varepsilon_{j+1}}{\partial n_\xi},\ K_{2j-1,2j+2}=\frac{2\alpha_{j+1}}{\alpha_j+\alpha_{j+1}}\varepsilon_{j+1},\quad j=\overline{2,n-1},$$
$$K_{2n-1,2n-3}=-\frac{2\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial n_\xi},\quad K_{2n-1,2n-2}=-\frac{2\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\varepsilon_n,$$
$$K_{2n-1,2n-1}=\frac{2}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\left(\alpha_{n+1}\frac{\partial\varepsilon_{n+1}}{\partial n_\xi}-\alpha_n\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial n_\xi}\right),$$
$$K_{2n-1,2n}=\frac{2}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}\left(\alpha_{n+1}\varepsilon_{n+1}-\alpha_n\varepsilon_n\right),$$
$$K_{2n,2n-3}=\frac{\partial^2\varepsilon_n(\xi,y)}{\partial n_y\partial n_\xi},\ K_{2n,2n-2}(\xi,y)=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial n_y},$$
$$K_{2n,2n-1}=\frac{\partial^2\varepsilon_n}{\partial n_y\partial n_\xi}-\frac{\partial^2\varepsilon_{n+1}(\xi,y)}{\partial n_y\partial n_\xi},\quad K_{2n,2n}=\frac{\partial\varepsilon_n}{\partial n_y}-\frac{\partial\varepsilon_{n+1}}{\partial n_y},$$
$$F_{2j-1}(y)=-\frac{2}{\alpha_j+\alpha_{j+1}}f_j(y),\quad F_{2j}(y)=\varphi_j(y),\quad j=\overline{1,n}.$$

Система интегральных уравнений (10) является системой интегральных уравнений с матрицей ядер со слабой особенностью. Поэтому для этой системы справедлива альтернатива Фредгольма. С помощью этой альтернативы и теоремы единственности решения краевой задачи (1)–(3) доказывается однозначная разрешимость системы уравнений (10). Это означает, что краевая задача (1)–(3) также однозначно разрешима.

Теорема. *Если* $\Gamma^{(j)}$ $(j=\overline{1,n})$ — *поверхности Ляпунова и образуют с координатной плоскостью* $x_3=0$ *прямой угол, то краевая задача* (1)–(3) *разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение может быть представлено в виде* (9).

Литература

1. Ляхов Л.Н. *Весовые сферические функции и сингулярные псевдодифференциальные операторы* // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21. – № 6. – С. 1020–1032.
2. Мухлисов Ф.Г. *О существовании и единственности решения некоторых уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 1. – С. 66–74.
3. Weinstein A. *Discontinuous integrals and generalized potential theory* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 63. – P. 342–354.

Татарский государственный
гуманитарно-педагогический университет

Поступили
полный текст 15.03.2005
краткое сообщение 29.04.2005