Известия вузов. Математика
2017, № 7, с. 74–83

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Э.Н. ХАСАНОВА

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБОБЩЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА НА ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЕРШИН

Аннотация. Представлена формула конформного отображения верхней полуплоскости на некоторую полигональную область. Полученная структурная формула обобщает интеграл Кристоффеля–Шварца и записана с использованием частного решения краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и завихрением на бесконечности логарифмического порядка. Также доказаны замкнутость и существование однолистных отображений среди построенных.

Ключевые слова: интеграл Кристоффеля–Шварца, конформные отображения, краевая задача Гильберта, однолистность.

УДК: 517.546

1. Постановка задачи. Из курса теории функций комплексного переменного известна формула Шварца–Кристоффеля, которая задает конформное отображение канонической области на конкретный многоугольник. В ряде работ рассматриваются конформные отображения верхней полуплоскости на полигональные области со счетным множеством вершин и полученные формулы конформного отображения обобщают формулу Кристоффеля–Шварца. Известные нам работы можно условно поделить на два типа. Примерами работ первого послужат публикации [1]–[4], в которых полигональные области полностью определены, а в формулу конформного отображения в качестве параметров входят неизвестные прообразы вершин, называемые акцессорными параметрами. При этом полигональная область часто удовлетворяет дополнительным геометрическим ограничениям в виде симметрии переноса или самоподобия. Ко второму типу отнесем работы [5]–[8], в которых прообразы угловых точек, как и углы при неизвестных вершинах, считаются заданными. Начало этому направлению положила работа М.А. Лаврентьева [1] об отображении полуплоскости на многоугольник с заданными углами при неизвестных вершинах.

Наша статья относится ко второму направлению и является продолжением исследований Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина [5]–[7], а также Э.Н. Карабашевой и П.Л. Шабалина [8]. Нами получена структурная формула конформного отображения верхней полуплоскости на полигональную область такую, что ее граница состоит из двух ломаных линий, которые можно аппроксимировать двумя спиралями, начинающимися в одной точке. Для построения отображения использовалась полученная в [7] формула частного решения краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва. Решение представленной в статье задачи обобщает интеграл Шварца–Кристоффеля на случай бесконечного множества

Поступила 28.01.2016

вершин полигональной области. Для таких отображений однолистность не очевидна, а значит, требуются дополнительные исследования. Поэтому центральной темой исследования является вопрос: существуют ли однолистные отображения среди построенных? Однолистность исследуется с использованием леммы 2 из [8]. Следует отметить, что в [7], где речь шла об отображении на полигональную область с неограниченным вращением касательной, однолистность не рассматривалась.

В комплексной плоскости будем строить конформное отображение верхней полуплоскости $E = \zeta : \zeta = \xi + i\eta,\ \eta \geq 0$, на односвязную полигональную область D_z, ее граница $L_z = \partial D_z$ состоит из двух ломаных L_z^1 и L_z^2 с начальной общей точкой $A_0(0,0)$. Ломаные L_z^1 и L_z^2 имеют бесконечное число прямолинейных звеньев. Вершины L_z^1 пронумеруем последовательно от A_0, обозначая их через $A_1, A_2, \ldots$, также поступим с вершинами L_z^2, обозначим их через $A_{-1}, A_{-2}, \ldots$ и пронумеруем начиная с A_0. При обходе границы области от точки A_0 вдоль ломаной L_z^1, область D_z остается слева, а вдоль L_z^2 — справа. Углы, образованные действительной осью и звеньями A_0, A_1 и A_0, A_{-1} обозначим через $\eta_0^1\pi$ и $\eta_0^2\pi$ соответственно. Считаем эти углы известными $0 \leq \eta_0^1\pi < 2\pi$, $0 < \eta_0^2\pi - \eta_0^1\pi < \pi/2$. Также считаем известными внутренние по отношению к области D_z углы при вершинах A_k и A_{-k}, обозначим их через $\alpha_k\pi$ и $\alpha_{-k}\pi$, где $0 < \alpha_k < 1$, $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1,\infty}$. Внутренний для полигональной области D_z угол при вершине A_0 равен разности $(\eta_0^2 - \eta_0^1)\pi$. Конформное отображение верхней полуплоскости $E = \zeta : \zeta = \xi + i\eta,\ \eta \geq 0$, на D_z будет таким, что положительной полуоси $\xi > 0$ поставим в соответствие L_z^1, отрицательной полуоси $\xi < 0$ — ломаную L_z^2, а начало координат $\xi = 0$ отобразим в начало координат A_0.

2. Построение отображения. Для построения отображающей функции, воспользуемся решением однородной краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности [7], и запишем формулу, используя геометрический смысл производной конформного отображения. Как и в работах [7], [8], начнем с ввода кусочно-постоянных функций:

$$n_-^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < -t_{-1}; \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \varkappa_{-j}, & -t_{-k} < \xi < -t_{-k-1}, \end{cases} \qquad n_+^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < t_1; \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \varkappa_j, & t_k < \xi < t_{k+1}. \end{cases} \tag{1}$$

Введем последовательности чисел $\varkappa_k = 1 - \alpha_k$, $0 < \varkappa_k < 1$, $\varkappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1$, $0 < \varkappa_{-k} < 1$, $k = \overline{1,\infty}$. Эти величины будут описывать поведение касательной при переходе от одной вершины к другой во время обхода границы области. Существенно новым отличием данной работы от [8] является требование, которое налагаем на последовательности точек t_k, t_{-k} и чисел $\varkappa_k$, $\varkappa_{-k}$:

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{n_+^*(\xi)}{\ln^\alpha \xi} = \Delta, \quad \lim_{\xi\to+\infty} \frac{n_-^*(\xi)}{\ln^\alpha \xi} = \Delta \tag{2}$$

с некоторыми постоянными $\Delta > 0$, $0 < \alpha < 1$. Отметим, что в [8] рассматривался случай, когда требование типа равенства (2) выглядело так:

$$\lim_{\xi\to+\infty} \frac{n_+^*(\xi)}{\ln^{\varkappa^+} \xi} = \Delta_+, \quad \lim_{\xi\to+\infty} \frac{n_-^*(\xi)}{\ln^{\varkappa^-} \xi} = \Delta_-,$$

с положительными постоянными Δ_+, Δ_- и величинами $\varkappa^+ \geq 1$ и $\varkappa^- \geq 1$. Таким образом, данную работу можно назвать продолжением исследования, проведенного в [8], и считать задачу решенной для любых значений α. Напомним, что в [7] функции $n_+^*(\xi)$, $n_-^*(\xi)$ имели

не логарифмический, а степенной рост порядка меньше единицы, вопросы однолистности не обсуждались.

Как и в [7], для определения аналитических в верхней полуплоскости функций

$$P_+(\zeta)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{t_k}\right)^{\varkappa_k},\quad P_-(\zeta)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\varkappa_{-k}}$$

на точки t_k, t_{-k} налагаем ограничения

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t_k}<\infty,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|t_{-k}|}<\infty. \tag{3}$$

Здесь

$$\left(1-\frac{\zeta}{t_j}\right)^{\varkappa_j}=\left|1-\frac{\zeta}{t_j}\right|^{\varkappa_j}e^{i\varkappa_j\arg(1-\zeta/t_j)},\quad j=\pm1,\pm2,\ldots,$$

где $\arg(1-\zeta/t_j)$ — однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $\zeta=0$ и непрерывная в плоскости ζ, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t=t_j$, $t=+\infty$ при $j>0$ и точки $t=t_j$, $t=-\infty$ при $j<0$.

С использованием геометрического смысла производной конформного отображения запишем

$$z'(\xi)=|z'(\xi)|e^{i\nu(\xi)},\quad \xi\in(t_k,t_{k+1}),\quad \xi\in(t_{-k-1},t_{-k}),\quad k=\overline{1,\infty}, \tag{4}$$

где в силу введенных ограничений функция

$$\nu(\xi)=\begin{cases}\pi(\eta_0^2-1+n_-^*(-\xi)), & \xi\in(-\infty,0);\\ \pi(\eta_0^1+n_+^*(\xi)), & \xi\in(0,+\infty).\end{cases} \tag{5}$$

Условие (4) представим в виде

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\nu(\xi)}z'(\xi)\right]=0,\quad \operatorname{Re}\left[e^{-i\nu(\xi)}z'(\xi)\right]>0. \tag{6}$$

В первом равенстве (6) узнаем краевое условие однородной задачи Гильберта, в частности, в силу обозначенных ограничений — это задача со счетным множеством разрывов первого рода в точках t_k, t_{-k}. Так как установили требования (2) и (5), имеем $\nu(\xi)=O(\ln^{\alpha}\xi)$, $\xi\to+\infty$, $\nu(\xi)=O(\ln^{\alpha}|\xi|)$, $\xi\to-\infty$, тогда по терминологии Говорова полученная задача — это задача с двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка. Для построения отображения достаточно получить частное решение описанной краевой задачи Гильберта. Для этого воспользуемся результатом работы [7]. Получим структурную формулу искомого конформного отображения D в плоскости комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$ на область D_z

$$z(\zeta)=a_0\int_0^{\zeta}\frac{e^{i\eta_0^1\pi}}{\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}}\frac{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\varkappa_{-k}}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{t_k}\right)^{\varkappa_k}}d\zeta. \tag{7}$$

Здесь функция $z(\zeta)$ ставит в соответствие действительным полуосям $\xi>0$ и $\xi<0$ ломаные L_z^1 и L_z^2, началу координат — точку A_0, точке $\zeta=+\infty$ — конец линии L_z^1, точки t_k, t_{-k} действительной оси $\operatorname{Im}\zeta=0$ — вершинам A_k и A_{-k} соответственно. Причем

$$t_{-k-1}<t_{-k}<0<t_k<t_{k+1},\quad k=\overline{1,\infty},\quad \lim_{k\to\infty}t_{-k}=-\infty,\quad \lim_{k\to\infty}t_k=+\infty.$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если функция $z(\zeta)$ осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность полигональной области с углами $\alpha_k\pi$, $\alpha_{-k}\pi$, $k = \overline{1,\infty}$, при вершинах A_k, A_{-k}, причем заданные последовательности чисел $\varkappa_k = 1-\alpha_k$, $\varkappa_{-k} = \alpha_{-k}-1$ и точек t_k, t_{-k} — двух монотонных последовательностей на вещественной оси, соответствующих вершинам этого многоугольника, удовлетворяют условиям (2), (3), то $z(\zeta)$ представляется формулой (7), в которой a_0 — произвольная положительная постоянная, $\eta_0^1\pi$, $\eta_0^2\pi$ — углы, образованные с действительной осью звеньями с началом в точке A_0 $(0 \le \eta_0^1\pi < 2\pi,\ 0 < \eta_0^2\pi - \eta_0^1\pi < \pi/2)$.*

3. Замкнутость. Воспользуемся моделью доказательства замкнутости для построенного отображения [8]. Рассмотрим вопрос о существовании и равенстве односторонних пределов $\lim\limits_{\xi\to+\infty} z(\xi)$ и $\lim\limits_{\xi\to-\infty} z(\xi)$ краевых значений отображения (7), и оценим правую часть равенства

$$z(-r) - z(r) = r\int_0^\pi z'(re^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta. \tag{8}$$

Для функций $\ln P_+(\zeta)$, $\ln P_-(\zeta)$ в [9] (см. также [8]) были доказаны формулы, которые для нашего случая будут записаны в виде

$$\ln P_+(\zeta) = -\zeta\Delta\int_{t_1}^{+\infty}\frac{\ln^\alpha\tau d\tau}{\tau(\tau-\zeta)} + I_+(\zeta),\quad I_+(\zeta) = -\zeta\int_{t_1}^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta\ln^\alpha\tau}{\tau(\tau-\zeta)}d\tau, \tag{9}$$

$$\ln P_-(\zeta) = \zeta\Delta\int_{-t_{-1}}^{+\infty}\frac{\ln^\alpha\tau d\tau}{\tau(\tau+\zeta)} + I_-(\zeta),\quad I_-(\zeta) = \zeta\int_{-t_{-1}}^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau)-\Delta\ln^\alpha\tau d\tau}{\tau(\tau+\zeta)}. \tag{10}$$

Из условий (2) следуют [9] асимптотические при $r\to+\infty$ оценки

$$I_+(re^{i\theta}) = o(\ln^{\alpha+1}\zeta),\quad \delta\le\theta\le 2\pi-\delta,\quad I_-(re^{i\theta}) = o(\ln^{\alpha+1}\zeta),\ -\pi+\delta\le\theta\le\pi-\delta.$$

Обозначим

$$n_+^*(t_k) - \Delta\ln^\alpha t_k = p_k,\quad n_+^*(t_k) - \Delta\ln^\alpha t_{k+1} = q_k,$$

$$n_-^*(t_{-k}) - \Delta\ln^\alpha -t_{-k} = p_{-k},\quad n_-^*(t_{-k}) - \Delta\ln^\alpha -t_{-k-1} = q_{-k},$$

и будем считать, что числа p_k, p_{-k}, q_k, q_{-k} удовлетворяют условиям

$$0 < p_k \le p^+ < 1/2,\quad -p^+ \le q_k < 0,\quad 0 < p_{-k} \le p^- < 1/2,\quad -p^- \le q_{-k} < 0. \tag{11}$$

Эти условия обеспечивают более жесткие ограничения на функции $I_+(\zeta)$, $I_-(\zeta)$. Кроме того, для доказательства замкнутости понадобится лемма из работы [8].

Лемма 1. *Если выполнены условия (2), (3), числа p_k, p_{-k}, q_k, q_{-k} удовлетворяют условиям (11) и сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|p_k^2 - q_k^2| = Q^+$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|p_{-k}^2 - q_{-k}^2| = Q^-$, то справедливы следующие неравенства*:

$$|I_+(re^{i\theta})| \le 2p^+\ln(1+\operatorname{cosec}(\theta/2)) + \frac{Q^+ + (p^+)^2}{\Delta\alpha\ln t_1},\quad 0<\theta<2\pi,$$

$$|I_-(re^{i\theta})| \le 2p^-\ln(1+\operatorname{cosec}((\theta-\pi)/2)) + \frac{Q^- + (p^-)^2}{\Delta\alpha\ln|t_{-1}|},\quad -\pi<\theta<\pi.$$

По формулам П.Г. Юрова [10] имеем

$$\frac{\zeta}{2\pi}\int_R^{+\infty}\frac{\ln^\alpha\tau}{\tau(\tau-\zeta)}d\tau=-\frac{i(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln\zeta}{2\pi i}\right)-\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}\,\frac{\zeta}{2\pi}\int_R^{+\infty}\frac{\varphi_\alpha(\tau)}{\tau(\tau-\zeta)}d\tau+P_\alpha(\zeta),$$

где $R\ge 1$, $\alpha>0$, $B_{\alpha+1}(w)$ — многочлен Бернулли,

$$B_{\alpha+1}(w)=\sum_{k=0}^{[\alpha]+2}C_{\alpha+1}^k B_k w^{\alpha+1-k},$$

$C_{\alpha+1}^k$ — биномиальные коэффициенты, B_k — числа Бернулли, $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, $B_3=0$, $B_4=-1/30$ и т. д., однозначные ветви функций $\ln z$, $\ln^\alpha z$ выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $\ln\tau>0$, $\ln^\alpha\tau>0$ на верхнем берегу разреза, проведенного по вещественной полуоси от точки $\tau=1$ до бесконечно удаленной точки, $P_\alpha(z)$ — функция, голоморфная при $|\zeta|>R$,

$$\varphi_\alpha(\tau):=\sum_{m=[\alpha]+2+k_0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{[\alpha]+2}C_{\alpha+1}^n B_n C_{\alpha+1-n}^{m-n}\right)\left(\frac{2\pi i}{\ln\tau}\right)^{m-\alpha-1},$$

а $k_0=3$, если $[\alpha]$ четна, и $k_0=2$, если $[\alpha]$ нечетна. (Для натурального α имеем тождество $\varphi_\alpha(\tau)\equiv 0$, также [11].)

Равенства (9), (10) с учетом формул П.Г. Юрова перепишем в виде

$$\ln P_+(\zeta)=\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{\alpha+1}\zeta-i\pi\Delta\ln^\alpha\zeta-\frac{\alpha\pi^2\Delta}{3}\ln^{\alpha-1}\zeta+I_+(\zeta)+P_\alpha(\zeta),$$

$$\ln P_-(\zeta)=\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}(-\zeta)-i\pi\Delta\ln^\alpha(-\zeta)-\frac{\alpha\pi^2\Delta}{3}\ln^{\alpha-1}(-\zeta)+I_-(\zeta)+P_\alpha(-\zeta).$$

Для $\zeta=re^{i\theta}$, $\theta\in(0,\pi)$, $r\to+\infty$, получим

$$\ln P_+(\zeta)=\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{\alpha+1}r-i\pi\Delta\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)\ln^\alpha r+I_+(\zeta)+O(1),$$

и учитывая, что $-\zeta=re^{i(\theta+\pi)}$, имеем

$$\ln P_-(\zeta)=\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}r+i\pi\Delta\theta\ln^\alpha r+I_-(\zeta)+O(1).$$

Теперь формулу (7) можно представить в виде

$$z'(re^{i\theta})=a_0\frac{e^{i\eta_0^1\pi}e^{I_-(re^{i\theta})-I_+(re^{i\theta})}}{r^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}e^{i\theta(1-(\eta_0^2-\eta_0^1))}}\exp\left(\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}r-\right.$$
$$\left.-\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}r+o(\ln^{1+\alpha}r)+o(\ln^{1+\alpha}r)\right).$$

Подставляя последнее выражение в (8) и оценивая по модулю получим

$$|z(-r)-z(r)|\le a_0\frac{r^{(\eta_0^2-\eta_0^1)}\exp\left\{\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}r+o(\ln^{1+\alpha}r)\right\}}{\exp\left\{\frac{\Delta}{1+\alpha}\ln^{1+\alpha}r+o(\ln^{1+\alpha}r)\right\}}\int_0^\pi e^{\mathrm{Re}[I_-(re^{i\theta})-I_+(re^{i\theta})]}d\theta.$$

С учетом неравенств леммы 1 имеем

$$\int_0^\pi e^{\mathrm{Re}[I_-(re^{i\theta})-I_+(re^{i\theta})]}d\theta<\widetilde{C}\int_0^\pi\left(1+\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}\right)^{2p^+}\left(1+\operatorname{cosec}\frac{\theta+\pi}{2}\right)^{2p^-}d\theta<+\infty.$$

Получаем, что $\lim\limits_{r\to+\infty} z(r) = \lim\limits_{r\to-\infty} z(r) = \infty$ и, следовательно, линии L_z^1 и L_z^2 соединяются в бесконечно удаленной точке, а значит, отображение замкнуто.

4. Однолистность. Считаем, что числа η_0^1 и η_0^2 заданы, последовательности точек t_k, t_{-k} и чисел $\varkappa_k$, $\varkappa_{-k}$ удовлетворяют условиям (2), (3). Далее для исследования вопроса о существовании однолистных отображений среди заданных структурной формулой (7), воспользуемся достаточным условием однолистности для аналитических в полуплоскости функций, сформулированным и доказанным в работе [8] (см. также [12]).

Лемма 2. *Если аналитическая в верхней полуплоскости D функция $z(\zeta)$ удовлетворяет неравенству*

$$2\eta\left|\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} + \frac{1-\beta}{\zeta}\right| < \beta\,\mathrm{tg}(\beta\pi/4), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

для некоторого β, $0 < \beta \le 1$, то $z(\zeta)$ однолистна в D.

Теперь доказательство однолистности построенного отображения будет сводится к применению этой леммы. Запишем $z'(\zeta) = e^{i\eta_0^1\pi}P_-(\zeta)/\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}P_+(\zeta)$. Вычисляя логарифмическую производную $(\ln z'(\zeta))'$ от обеих частей равенства (7), получим

$$\frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} + \frac{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}{\zeta} = \big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)'. \tag{12}$$

Для доказательства существования однолистных отображений нужно оценить правую часть предыдущего равенства. Для этого ряды $\ln P_+(\zeta)$ и $\ln P_-(\zeta)$, как и в работе [8], запишем в виде интегралов типа Коши, выделим главные части и, применив к полученным выражениям формулы П.Г. Юрова [10], запишем

$$\ln P_+(\zeta) = \frac{\Delta\ln^{1+\alpha}\zeta}{1+\alpha} - i\pi\Delta\ln^{\alpha}\zeta + I_+(\zeta) + P_\alpha(\zeta), \tag{13}$$

$$\ln P_-(\zeta) = \frac{\Delta\ln^{1+\alpha}(-\zeta)}{1+\alpha} - i\pi\Delta\ln^{\alpha}(-\zeta) + I_-(\zeta) + P_\alpha(-\zeta). \tag{14}$$

Далее оценка правой части равенства (12) расходится на два случая: $|\pi/\ln\zeta| > 1-\varepsilon$ и $|\pi/\ln\zeta| \le 1-\varepsilon$, где ε — малое положительное число.

Оценка при $|\pi/\ln\zeta| \le 1-\varepsilon$. Представим функцию

$$\ln P_-(\zeta) = \frac{\Delta}{1+\alpha}(\ln\zeta + i\pi)^{1+\alpha} - i\pi\Delta(\ln\zeta+i\pi)^{\alpha} + I_-(\zeta) + P_\alpha(\zeta) =$$

$$= \frac{\Delta\ln^{1+\alpha}\zeta}{1+\alpha}\left(1+\frac{i\pi}{\ln\zeta}\right)^{1+\alpha} - i\pi\Delta\ln^{\alpha}\zeta\left(1+\frac{i\pi}{\ln\zeta}\right)^{\alpha} + I_-(\zeta) + P_\alpha(\zeta).$$

Учитывая неравенство $|\pi/\ln\zeta| \le 1-\varepsilon$ и формулы разложения в сходящиеся ряды

$$\left(1+\frac{i\pi}{\ln\zeta}\right)^{1+\alpha} = 1 + \frac{i\pi(1+\alpha)}{\ln\zeta} + \frac{-\pi^2(1+\alpha)\alpha}{2!\ln^2\zeta} + \frac{-i\pi^3(1+\alpha)\alpha(\alpha-1)}{3!\ln^3\zeta} + \cdots,$$

$$\left(1+\frac{i\pi}{\ln\zeta}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{i\pi\alpha}{\ln\zeta} + \frac{-\pi^2\alpha(\alpha-1)}{2!\ln^2\zeta} + \cdots,$$

получим

$$\ln P_-(\zeta) = \frac{\Delta\ln^{1+\alpha}\zeta}{1+\alpha} + \frac{\pi^2\Delta\alpha}{2\ln^{1-\alpha}\zeta} + \frac{i\pi^3\Delta\alpha(\alpha-1)}{3\ln^{2-\alpha}\zeta} - \cdots + I_-(\zeta) + P_\alpha(\zeta).$$

В более общем виде имеем

$$\ln P_-(\zeta) = \frac{\Delta \ln^{1+\alpha}\zeta}{1+\alpha} + S_\alpha(\zeta) + I_-(\zeta) + P_\alpha(-\zeta),$$

где ряд

$$S_\alpha(\zeta) = \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\pi i)^{k+1}}{(k+1)! \ln^{k-\alpha}(\zeta)} \prod_{j=1}^{\infty} (\alpha + 1 - j) \right)$$

сходится абсолютно в силу неравенства $|\pi / \ln\zeta| \le 1 - \varepsilon$. Тогда

$$\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta) = i\pi\Delta \ln^{\alpha}\zeta + S_\alpha(\zeta) + I_-(\zeta) - I_+(\zeta) + P_\alpha(-\zeta) - P_\alpha(\zeta).$$

Продифференцируем:

$$\big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)' = \frac{i\pi\Delta\alpha \ln^{\alpha-1}\zeta}{\zeta} + S'_\alpha(\zeta) + I'_-(\zeta) - I'_+(\zeta) + P'_\alpha(-\zeta) - P'_\alpha(\zeta), \qquad (15)$$

здесь

$$S'_\alpha(\zeta) = \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(\alpha - k)(\pi i)^{k+1}}{(k+1)!\zeta \ln^{k-\alpha+1}(\zeta)} \prod_{j=1}^{\infty} (\alpha + 1 - j) \right).$$

Оцениваем полученное выражение (15), начиная с первого слагаемого:

$$\left| \frac{-i\pi\Delta \ln^{\alpha-1}\zeta}{\zeta} \right| = \frac{\pi\Delta}{r|\ln r|^{1-\alpha}} < \frac{\pi\Delta}{r\theta^{1-\alpha}} < \frac{\pi\Delta \sin^{\alpha}\theta}{r\sin\theta} < \frac{\pi\Delta}{\eta}.$$

Теперь необходимо оценить ряд $S'_\alpha(\zeta)$, который выписали выше. В силу неравенства $|w| = |\pi/\ln\zeta| \le 1 - \varepsilon$ этот ряд сходится для некоторой аналитической функции, исчезающей на бесконечности, ограниченной на окружности $|\zeta| = e^{\pi/(1-\varepsilon)}$, следовательно, по лемме Шварца можем записать $S'_\alpha(\zeta) \le C/\eta$.

Далее оценим функции

$$I_+(\zeta) = -\zeta \int_{t_1}^{+\infty} \frac{n_+(t) - \Delta \ln^{\alpha}(t)}{t(t-\zeta)} dt, \quad I_-(\zeta) = \zeta \int_{t_1}^{+\infty} \frac{n_-(t) - \Delta \ln^{\alpha}(t)}{t(t+\zeta)} dt.$$

Проведем подробные выкладки на примере функции $I_+(\zeta)$:

$$\big(I_+(\zeta)\big)' = \int_{t_1}^{+\infty} \frac{t(n_+(t) - \Delta \ln^{\alpha}(t))}{t(t-\zeta)^2} dt = \int_{t_1}^{+\infty} \frac{(n_+(t) - \Delta \ln^{\alpha}(t))}{(t-\zeta)^2} dt.$$

Оценим

$$\big|I_+(\zeta)\big|' = \left| \int_{t_1}^{+\infty} \frac{(n_+(t) - \Delta \ln^{\alpha}(t))}{(t-\zeta)^2} dt \right| \le \int_{t_1}^{+\infty} \frac{|(n_+(t) - \Delta \ln^{\alpha}(t))|}{|(t-\zeta)^2|} dt.$$

В силу монотонности функций $n_+(t_k) - \Delta \ln^{\alpha}(t_k)$ и $n_-(t_{-k}) - \Delta \ln^{\alpha}(t_{-k})$ на интервалах непрерывности и условий (11) получим $|n_+(t_k) - \Delta \ln^{\alpha}(t_k) = p_k| < 1/2$. Отсюда следует

$$\big|I_+(\zeta)\big| < \frac{1}{2} \int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{|(t-\zeta)^2|} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{+\infty} \frac{dt}{|(t-\xi)^2| + \eta^2} \le \frac{\pi}{4\eta}.$$

Проделывая те же операции для оценки $I_-(\zeta)$, имеем $\big|I_-(\zeta)\big| \le \pi/(4\eta)$.

Функции $P_\alpha(-\zeta)$, $P_\alpha(\zeta)$ — голоморфные в окрестности бесконечности, возникли в нашей работе в ходе применения формул П.Г. Юрова к рядам $\ln P_-(\zeta)$ $\ln P_+(\zeta)$. Так как $P_\alpha(\zeta)$ голоморфна, то ее можно представить в виде сходящегося ряда

$$P_\alpha(\zeta) = a + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \frac{a_-}{\zeta^3} + \cdots, \quad P_\alpha(-\zeta) = a + \frac{a_{-1}}{-\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \frac{a_-}{-\zeta^3} + \cdots.$$

Оценим производные этих функций:

$$P'_\alpha(\zeta) = -\frac{a_{-1}}{\zeta^2} - \frac{2a_{-2}}{\zeta^3} - \frac{3a_{-3}}{\zeta^4} - \cdots, \quad P'_\alpha(-\zeta) = \frac{a_{-1}}{\zeta^2} + \frac{2a_{-2}}{\zeta^3} + \frac{3a_{-3}}{-\zeta^4} + \cdots.$$

В силу голоморфности этих функций и ввиду того, что они удовлетворяют условиям леммы Шварца, имеем ограничения $P'_\alpha(-\zeta) < Q/\eta$, $P'_\alpha(\zeta) < Q/\eta$ для некоторого $Q > 0$. Получили оценку

$$\big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)' \le C/\eta + \frac{\Delta\pi}{\eta} + \frac{\pi}{2\eta} + Q/\eta = \frac{2C + 2Q + \pi + 2\Delta\pi^2}{2\eta} := \frac{C_1}{\eta}. \tag{16}$$

Оценка при $|\pi/\ln\zeta| > 1-\varepsilon$**.** Запишем оценки для функций $(\ln^\alpha\zeta)'$, $(\ln^{\alpha+1}\zeta)'$, $(\ln^{1+\alpha}(-\zeta))'$, $(\ln^\alpha(-\zeta))'$:

$$\big|\big(\ln^\alpha\zeta\big)'\big| = \frac{\alpha}{r|\ln^{1-\alpha}\zeta|} = \frac{\alpha}{r|\ln|\zeta| + i\theta|^{1-\alpha}} < \frac{\alpha}{r|\theta|^{1-\alpha}} < \frac{\alpha|\sin^\alpha\theta|}{r|\sin\theta|} < \frac{\alpha}{\eta}, \tag{17}$$

$$\big|\big(\ln^{\alpha+1}\zeta\big)'\big| \le \frac{(\alpha+1)|\ln\zeta|^\alpha}{r} < \frac{(\alpha+1)(\pi/(1-\varepsilon))^\alpha}{\eta}, \tag{18}$$

$$\big|\big(\ln^\alpha(-\zeta)\big)'\big| = \left|\frac{\alpha\ln^{\alpha-1}(-\zeta)}{-\zeta}\right| < \left|\frac{\alpha}{r|\ln r + i(\theta+\pi)|^{1-\alpha}}\right| < \frac{\alpha}{r\pi^{1-\alpha}} \le \frac{\alpha/\pi^{\alpha-1}}{\eta}, \tag{19}$$

$$\big|\big(\ln^{\alpha+1}(-\zeta)\big)'\big| = \left|\frac{(\alpha+1)\ln^\alpha(-\zeta)}{(-\zeta)}\right| < \left|\frac{(\alpha+1)|\ln r + i(\theta+\pi)|^\alpha}{\eta}\right| < \frac{(\alpha+1)(3\pi)^\alpha}{\eta}. \tag{20}$$

Дифференцируя разность (14) и (13), получим

$$\big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)' = \left(\frac{\Delta\ln^{1+\alpha}(-\zeta)}{1+\alpha}\right)' - \big(i\pi\Delta\ln^\alpha(-\zeta)\big)' + I'_-(\zeta) + P'_\alpha(-\zeta) - \left(\frac{\Delta\ln^{\alpha+1}\zeta}{1+\alpha}\right)' + \\ + \big(i\pi\Delta\ln^\alpha\zeta\big)' - I'_+(\zeta) - P'_\alpha(\zeta),$$

и оценим полученный результат, используя (17)–(20):

$$\big|\big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)'\big| < \big|(\alpha+1)e^\pi\ln^\alpha(-\zeta)\big| - \frac{\alpha e^\pi}{\eta} + \big|I'_-(\zeta)\big| + \big|P'_\alpha(-\zeta)\big| - (\alpha+1)e^\pi\pi^\alpha - \frac{\alpha e^\pi}{\eta} - \\ - \big|I'_+(\zeta)\big| - \big|P'_\alpha(\zeta)\big| < (\alpha+1)e^\pi\theta^\alpha/\eta - 2\alpha e^\pi/\eta + 4\pi/\eta + \\ + Q/\eta - (\alpha+1)e^\pi\pi^\alpha - 4\pi/\eta - Q/\eta = 2\alpha e^\pi/\eta := C_2/\eta.$$

Для того, чтобы обеспечить выполнение леммы 1 для функции (7) рассмотрим те же последовательности точек t_k, t_{-k} вещественной оси, удовлетворяющие условиям (2), (3), обозначим через λ малое положительное число и рассмотрим последовательности чисел $\lambda\varkappa_k$, $\lambda\varkappa_{-k}$, по которым по формуле (7) построим функцию

$$z_\lambda(\zeta) = a_0\int_0^\zeta \frac{e^{i\eta_0^1\pi}P_{-,\lambda}(\zeta)}{\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}P_{+,\lambda}(\zeta)}d\zeta.$$

При этом имеем $n^\lambda_-(\xi) = \lambda n^*_-(\xi)$, $n^\lambda_+(\xi) = \lambda n^*_+(\xi)$. Таким образом, последовательности чисел $\lambda\varkappa_k$, $\lambda\varkappa_{-k}$, очевидно, удовлетворяют условиям (1) с $\Delta_\lambda = \lambda\Delta$.

Функция $z_\lambda(\zeta)$ будет отображать верхнюю полуплоскость на некоторую полигональную область с заданными углами $\widetilde{\alpha}_k\pi$, $\widetilde{\alpha}_{-k}\pi$, $k = \overline{1,\infty}$, $\widetilde{\alpha}_k = 1 - \lambda\varkappa_k$, $\widetilde{\alpha}_{-k} = \lambda\varkappa_{-k} + 1$, при неизвестных вершинах A_k, A_{-k}. При этом

$$P_{+,\lambda}(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\lambda\varkappa_k}, \quad P_{-,\lambda}(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\lambda\varkappa_{-k}},$$

следовательно, $P_{-,\lambda}(\zeta) - P_{+,\lambda}(\zeta) = \lambda[\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)]$, и с учетом (16)

$$|(\ln P_{-,\lambda}(\zeta) - \ln P_{+,\lambda}(\zeta))'| \le \lambda\frac{2P + 2Q + \pi + \Delta 2^{(\alpha+1)/2}\pi^{\alpha-1}}{2\eta^2}.$$

Находим

$$\frac{z''_\lambda(\zeta)}{z'_\lambda(\zeta)} + \frac{1 - (\eta_0^2 - \eta_0^1)}{\zeta} = (\ln P_{-,\lambda}(\zeta))' - (\ln P_{+,\lambda}(\zeta))'.$$

Полагая теперь $\beta = \eta_0^2 - \eta_0^1$, заключаем, что при достаточно малых λ функция $z_\lambda(\zeta)$ будет удовлетворять достаточному условию однолистности, которое приведено в лемме 1.

Таким образом, установлена

Теорема 2. *Для каждых двух последовательностей точек t_{-k} и t_k, удовлетворяющих условию* (2) *и* (3) *с $0 \le \alpha < 1$, существует бесконечно много последовательностей чисел α_{-k}, и α_k, $k = \overline{1,\infty}$, для которых при $\lambda \le \beta\,\mathrm{tg}(\beta\pi/4)\max\{C_1, C_2\}$, где $\beta = \eta_0^2 - \eta_0^1$, отображение* (7) *будет однолистным.*

Выражаю благодарность Л.А. Аксентьеву и П.Л. Шабалину за постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Александров И.А. *Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса*, Изв. вузов. Матем., №6, 15–18 (1999).

[2] Колесников И.А., Копанева Л.С. *Конформное отображение на счетноугольник с двойной симметрией*, Изв. вузов. Матем., №12, 37–47 (2014).

[3] Riera G., Carrasco H., Preiss R. *The Schwarz–Christoffel conformal mapping for "polygons" with infinitely many sides*, Internat. J. Math. Math. Sci. 1–20 (2008), Art. ID 350326.

[4] Floryan J.M., Zemach C. *Schwarz–Cristoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary*, J. Comput. Appl. Math. **46** (1–2), 77–102 (1993).

[5] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин*, Изв. вузов. Матем., №10, 76–80 (2009).

[6] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Обратная задача М.А. Лаврентьева об отображении полуплоскости на многоугольник в случае бесконечного числа вершин*, Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механ. Информатика **10** (1), 23–31 (2010).

[7] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Одно обобщение формулы Шварца–Кристоффеля*, Сиб. журн. индустр. матем. **13** (4), 109–117 (2010).

[8] Karabasheva E.N., Shabalin P.L. *Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains wiht infinite sets of vertices*, Lobachevskii J. Math. **36** (2), 144–153 (2015).

[9] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Однородная задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и логарифмической особенностью индекса*, Изв. вузов. Матем. №12, 83–88 (2013).

[10] Юров П.Г. *Асимптотические оценки целых функций, заданных каноническими произведениями*, Матем. заметки **10** (6) , 641–648 (1971).

[11] Мельник И.М. *Исключительный случай краевой задачи Римана*, Тр. Тбилисск. матем. ин-та **XXIV**, 149–161 (1957).

[12] Aksent'ev L.A., Shabalin P.L. *Sufficient conditions for univalence and quasiconformal extendibility of analytic functions*, Handbook of Complex Analysis. Vol. 1: Geometric Function Theory. Ed. by R. Kühnau (Martin-Luther-Universität, Halle, Germany, 2002), 169–206.

Э.Н. Хасанова

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,

e-mail: enkarabasheva@bk.ru

E.N. Khasanova

Univalent conformal mappings by generalized Christoffel–Schwartz integral onto polygonal domains with countable set of vertices

Abstract. We obtain a formula for the conformal mapping of the upper half-plane onto a polygonal domain. This structural formula generalizes the Schwartz–Christoffel equation and is written with the use of partial solution to the Hilbert boundary-value problem with a countable set of points of discontinuity of the coefficients and with turbulence at infinity of logarithmic type. We also prove closedness and existence of univalent mappings among given ones.

Keywords: Schwartz–Christoffel equation, conformal mapping, Hilbert boundary-value problem, univalence.

E.N. Khasanova

Kazan State University of Architecture and Civil Engineering,
1 Zelyonaya str., Kazan, 420043 Russia,

e-mail: enkarabasheva@bk.ru