ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 512.533.5

В.В. БУТАКОВ, Л.М. МАРТЫНОВ

ПОЛУГРУППЫ, ВСЕ НЕЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОДПОЛУГРУППЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ИДЕАЛАМИ

Изучение алгебр, подалгебры которых обладают тем или иным фиксированным свойством, давно является одним из популярных направлений в алгебраических исследованиях. В теории полугрупп указанный подход начал проявляться с пятидесятых годов и разрабатывался многими авторами. Упомянем только некоторые работы, инициировавшие наше исследование. Так, в статьях [1]–[3] авторы независимо друг от друга описывают полугруппы, в которых любая подполугруппа является идеалом (здесь и в дальнейшем под идеалом понимается двусторонний идеал). С другой стороны, в работе [4] с точностью до групп охарактеризованы полугруппы, все собственные подполугруппы которых циклические. Условимся полугруппы с первым свойством называть *Id-полугруппами*, а со вторым — *C-полугруппами*. Получив хорошее описание алгебр с некоторым свойством для всех подалгебр, естественным является желание расширить этот класс, что зачастую достигается требованием выполнимости зафиксированного свойства лишь для некоторых подалгебр.

В данной работе изучаются полугруппы, все нециклические подполугруппы которых являются идеалами; будем называть их *$IdNC$-полугруппами*. Понятно, что любая Id-полугруппа и любая C-полугруппа являются $IdNC$-полугруппами. В частности, любая периодическая C-группа является таковой. Работа [5] показывает, что последние могут быть устроены весьма сложно. Используя описание Id-полугрупп, получаем характеризацию $IdNC$-полугрупп. При этом результат работы [4] о C-полугруппах не используется; мы получаем его в качестве следствия.

В работе используются терминология и обозначения, принятые в [6]. Подполугруппу H полугруппы S назовем *k-стянутой посредством подмножества M множества $S\setminus H$*, если $|M|\geq k$ и $\langle s_1,s_2,\dots,s_k\rangle\supseteq H$ для любых различных элементов $s_1,s_2,\dots,s_k$ из M. Если H является k-стянутой посредством множества $S\setminus H$, то H будем называть просто *k-стянутой*. Обратим внимание на то, что термин "стянутая полугруппа" использовался в работе [7] в другом смысле.

Определим некоторые типы полугрупп, которые будут использоваться при описании $IdNC$-полугрупп.

Тип 1. Полугруппа S есть 3-нильпотентная, $S^2=\{c,0\}$, $a^2=0$ для некоторого $a\in S\setminus S^2$ и S^2 является 2-стянутой.

Тип 2. Полугруппа S есть 3-нильпотентная, $S^2=\{a^2,c,0\}$, подполугруппа $\{c,0\}$ является 2-стянутой посредством множества $S\setminus S^2$ и $\langle x,y\rangle\supseteq S^2$ для любых попарно различных неразложимых элементов x и y, из которых по крайней мере один является делителем элемента a^2.

Тип 3. Полугруппа S есть амальгама полугрупп A и B с общей подполугруппой $C=A^3=B^2=\{c,0\}$, где A есть раздувание циклической нильпотентной полугруппы $\langle a\rangle$ индекса 4 над образующим a, причем $c=a^3$, B есть нильпотентная Id-полугруппа ступени 3 с 1-стянутой подполугруппой C, а операция умножения в S совпадает на A и B с исходными операциями и для любых элементов $x\in A\setminus A^2$ и $y\in B\setminus B^2$ имеет место $xy,yx\in C$ и $x^2y=yx^2=0$.

Тип 4. Полугруппа S есть раздувание циклической нильпотентной полугруппы индекса 4 над образующим элементом.

Тип 5. Полугруппа S есть раздувание циклической нильпотентной полугруппы индекса 5 над образующим элементом.

Напомним [1], что Id-полугруппы — это в точности полугруппы, в которых для любых элементов x и y существуют такие натуральные числа k и r, $2 \leq k, r \leq 3$, что выполнено условие $xy = x^k = y^r$. В частности, любая Id-полугруппа является 3-нильпотентной. Легко видеть, что ни одна из полугрупп указанных выше типов 1–5 не является Id-полугруппой.

Предложение 1. *Циклическая полугруппа $S = \langle a \rangle$ является $IdNC$-полугруппой тогда и только тогда, когда она является конечной индекса r и периода m и при этом выполнено одно из следующих условий*:

1) $r \leq 3$*,* m *любое*;
2) $r = 4$*,* m *нечетное*;
3) $r = 5$*,* m *не делится на* 2 *и* 3*.*

Доказательство предложения 1 проводится стандартными методами.

Следствие 1. Любая $IdNC$-полугруппа является периодической.

Предложение 2. *Нильполугруппа является $IdNC$-полугруппой тогда и только тогда, когда она либо является Id-полугруппой, либо является полугруппой одного из типов* 1–5*.*

При доказательстве этого утверждения сначала устанавливается, что ступень нильпотентности любой нильпотентной $IdNC$-полугруппы не превосходит 5, а затем с учетом того, что нильполугруппа, в которой ступени всех ее нильпотентных подполугрупп ограничены в совокупности, является нильпотентной ([8], теорема 3), делается вывод о 5-нильпотентности любой $IdNC$-нильполугруппы. Дальнейшее доказательство использует стандартные комбинаторные методы.

Основным результатом работы является

Теорема. *Полугруппа S является $IdNC$-полугруппой тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

I. *S есть периодическая унипотентная полугруппа с максимальной C-подгруппой G такой, что любая собственная немаксимальная подгруппа H группы G совпадает со своим идеализатором $I(H)$ в S, а идеализатор $I(M)$ любой максимальной подгруппы M из G в S есть циклическая C-полугруппа и $I(M) \cup G$ является идеалом в S, а факторполугруппа Риса S/G есть либо Id-полугруппа, либо полугруппа одного из типов* 1–5;

II. *S есть периодическая неунипотентная полугруппа и либо S есть правосингулярная [левосингулярная] связка двух своих классов кручения K_e, K_f, причем $K_eK_f = \{f\}$, $K_fK_e = \{e\}$ [$K_eK_f = \{e\}$, $K_fK_e = \{f\}$], либо S есть* 0*-прямое объединение полугрупп, одна из которых есть Id-полугруппа, а каждая из остальных является циклической нильпотентной полугруппой индекса $r \leq 3$ с внешне присоединенным нулем.*

Доказательство первого утверждения теоремы проводится стандартными методами. Доказательство второго утверждения теоремы использует теорему 2.6 из [2], в которой дано (в нашей терминологии) описание $IdNC$-связок, и предложения 1 и 3 из [9] о свойствах классов кручения периодических полугрупп (можно использовать и более общие результаты об эпигруппах из § 2 работы [10]).

В нижеследующих двух случаях можно дать более детальное описание соответствующих $IdNC$-полугрупп.

Следствие 2. Если S — унипотентная $IdNC$-полугруппа, G — ее наибольшая подгруппа и S/G является полугруппой типа 4, то S является раздуванием циклической полугруппы индекса 4 и нечетного периода над образующим элементом.

Следствие 3. Если S — унипотентная INC-полугруппа, G — ее наибольшая подгруппа и S/G является полугруппой типа 5, то S является раздуванием циклической полугруппы индекса 5 и периода, не делящегося на 2 и 3, над образующим элементом.

Следствием основного результата статьи является следующее

Предложение 3 ([4]). *Полугруппа S является C–полугруппой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) S — *двухэлементная полугруппа идемпотентов*;
2) S — *периодическая C-группа*;
3) S — *циклическая полугруппа либо индекса 2 и любого периода, либо индекса 3 и нечетного периода*;
4) S — *раздувание конечной циклической группы над образующим элементом некоторой ее максимальной подгруппы с помощью одного элемента*;
5) S — *раздувание конечной циклической группы над образующим элементом с помощью двух элементов*;
6) S — *раздувание конечной циклической группы над двумя ее различными образующими элементами с помощью одного элемента*;
7) $S = \langle a, b\rangle$, *где* a, b — *элементы индекса 3 и нечетного периода* m, $a^k = b^k$ *при* $k \geq 2$ *и* $ab, ba \in \{a^2, a^{m+2}\}$.

В заключение заметим, что $IdNC$-полугруппа не содержит в качестве собственной подполугруппы квазициклическую p-группу ни для какого простого числа p. С другой стороны, раздувание периодической группы из [5] над любым образующим ее некоторой максимальной циклической подгруппы дает $IdNC$-полугруппу.

Авторы глубоко благодарны рецензенту за ряд полезных предложений по улучшению первоначального текста статьи.

Литература

1. Шутов Э.Г. *Полугруппы с идеальными подполугруппами* // Матем. сб. – 1962. – Т. 57. – № 2. – С. 179–186.
2. Miller D.W. *Hamiltonian semigroups* // Portugal Math. – 1962. – V. 21. – № 3–4. – P. 171–187.
3. Kimura N., Tamura T., Merkel R.B. *Semigroups in which all subsemigroups are left ideals* // Canad. J. Math. – 1965. – V. 17. – № 1. – P. 52–62.
4. Баранский В.А., Нагребецкий В.Т. *Полугруппы, все истинные подполугруппы которых циклические* // Тезисы докл. XXVI конференция матем. кафедр педиститутов Урала. – Киров, 1968.
5. Ольшанский А.Ю. *Бесконечная группа с подгруппами простых порядков* // Изв. АН СССР. – 1979. – Т. 44. – No 2. – С. 309–321.
6. Шеврин Л.Н. *Полугруппы.* Гл. IV в кн. "Общая алгебра" / Под ред. Л.А. Скорнякова. Т. 2. – М.: Наука, 1991. – С. 11–191.
7. Просвиров А.С., Шеврин Л.Н. *Идеализаторы подполугрупп и строение полугрупп* // Матем. зап. Уральск. ун-та. – 1974. – Т. 9. – № 1. – С. 66–83.
8. Шеврин Л.Н. *О полугруппах, все подполугруппы которых нильпотентны* // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. II. – №6. – С. 936–942.
9. Просвиров А.С. *О периодических полугруппах* // Матем. зап. Уральск. ун-та. – 1971. – Т. 8. – № 1. – С. 77–94.
10. Шеврин Л.Н. *К теории эпигрупп.* I // Матем. сб. – 1994. – Т. 185. – № 8. – С. 129–160.

Омский государственный
педагогический университет

Поступила
07.07.1997