ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 11 (438)

УДК 512.64

А.И. ПЕРОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ОСТРОВСКОГО

В данной статье предлагается содержащий параметр критерий регулярности (обратимости) квадратных матриц, который при частных значениях параметра превращается в известные признаки Островского невырожденности матриц с ограничениями на максимумы модулей внедиагональных элементов строк или столбцов. Приведено доказательство критерия регулярности, основанное на использовании дробной степени диагональной матрицы; указаны метрики, в которых определенные матрицы оказываются сжатиями (строгими); на основе вогнутости второй итерации некоторой функции установлено важное неравенство между константой, фигурирующей в критерии регулярности, и спектральным радиусом мажоранты. В условиях критерия регулярности даны оценки сверху на модули элементов обратной матрицы; получены более тонкие оценки для диагональных элементов обратной матрицы; приведена оценка снизу для модуля определителя исходной матрицы (что дает, в частности, другое доказательство предложенного критерия регулярности).

Пусть $A = (a_{ij})$ — комплексная квадратная $n \times n$-матрица с ненулевыми диагональными элементами

$$a_i \equiv |a_{ii}| > 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Подсчитаем следующие характеристики внедиагональных элементов строк и столбцов:

$$p_i = \max_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad q_i = \max_{j \neq i} |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

(максимум берется по всем индексам $j = 1, \dots, n$, кроме $j = i$). Нас интересует следующий вопрос — при каких ограничениях на a_i, p_i и q_i матрица A является регулярной? Введем "безразмерные" величины

$$\varepsilon_i = p_i / a_i, \quad \delta_i = q_i / a_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Впредь будем предполагать, не оговаривая это особо каждый раз, что $n \geq 2$ и все числа ε_i и δ_i положительны.

Теорема. *Пусть комплексная квадратная $n \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ удовлетворяет условию* (1) *и при некотором значении параметра α, $0 \leq \alpha \leq 1$, выполнено условие*

$$\sigma \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{1 + v_i} < 1, \tag{4}$$

где

$$v_i = \varepsilon_i^{1-\alpha} \delta_i^{\alpha}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Тогда матрица A регулярна, и для элементов обратной матрицы $A^{-1} = (a_{ij}^{(-1)})$ справедливы оценки

$$|a_{ii}^{(-1)}| \le \frac{1}{a_i}\left\{\frac{1}{1+v_i} + \frac{v_i}{(1-\sigma)(1+v_i)^2}\right\}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

$$|a_{ij}^{(-1)}| \le \frac{\varepsilon_i^{1-\alpha}\delta_j^{\alpha}}{(1-\sigma)a_i^{\alpha}a_j^{1-\alpha}(1+v_i)(1+v_j)}, \quad i \ne j, \tag{7}$$

$$\left|\frac{1}{a_{ii}a_{ii}^{(-1)}} - 1\right| \le \frac{\sigma_i v_i}{1-\sigma_i} < 1, \quad i = 1, \dots, n, \tag{8}$$

где

$$\sigma_i = \sum_{j \ne i} \frac{v_j}{1+v_j} = \sigma - \frac{v_i}{1+v_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

а для модуля определителя матрицы A — оценка

$$|\det A| \ge (1-\sigma)a_1 \dots a_n \prod_{i=1}^{n}(1+v_i). \tag{10}$$

Доказательство. Напишем разложение

$$A = B + C, \quad B = \operatorname{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}. \tag{11}$$

В силу условия (1) матрица B является регулярной. Диагональную матрицу с элементами $a_{11}^{\alpha}, \dots, a_{nn}^{\alpha}$ по главной диагонали назовем дробной степенью матрицы B и обозначим B^{α} (т. к. z^{α} при комплексном $z \ne 0$ может быть многозначной функцией, то берем одну из ветвей). Заметим, что $B^{1-\alpha}B^{\alpha} = B$.

Перепишем разложение (11) в виде (I — единичная $n \times n$-матрица)

$$A = B^{1-\alpha}(I+S)B^{\alpha}, \quad S = (s_{ij}) = B^{-(1-\alpha)}CB^{-\alpha}, \tag{12}$$

где отрицательные дробные степени определены как обратные положительным,

$$s_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j; \\ a_{ij}/a_{ii}^{1-\alpha}a_{jj}^{\alpha}, & \text{если } i \ne j. \end{cases} \tag{13}$$

Из (2), (3) и (13) вытекает

$$|S| \le V, \quad \text{т. е.} \quad |s_{ij}| \le v_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{14}$$

где матричная мажоранта имеет следующий вид:

$$V = (v_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1^{1-\alpha}\delta_2^{\alpha} & \dots & \varepsilon_1^{1-\alpha}\delta_n^{\alpha} \\ \varepsilon_2^{1-\alpha}\delta_1^{\alpha} & 0 & \dots & \varepsilon_2^{1-\alpha}\delta_n^{\alpha} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_n^{1-\alpha}\delta_1^{\alpha} & \varepsilon_n^{1-\alpha}\delta_2^{\alpha} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В (14) $|S|$ обозначает матрицу S, в которой все элементы заменены их модулями. Оценка (14) показывает, что спектральные радиусы матриц S и V связаны неравенством ([2], с. 170, 5.7.5)

$$\operatorname{spr} S \le \operatorname{spr} V. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что

$$\operatorname{spr} V = \rho, \tag{17}$$

где ρ есть единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{\rho + v_i} = 1. \tag{18}$$

Действительно, из (18) вытекает, что $V^* x = \rho x$, где $x_i = \delta_i^\alpha/(\rho + v_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, а, как известно, спектральные радиусы матриц V и сопряженной матрицы V^* совпадают. Условие (4) теоремы означает, что

$$0 < \rho < 1. \tag{19}$$

Видно, что в силу (16), (17) и (19) спектральные радиусы матриц S и V меньше единицы. Поэтому

$$(I + S)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-S)^j, \quad (I - V)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} V^j,$$

откуда в силу (14) вытекает оценка

$$|(I + S)^{-1}| \le (I - V)^{-1} \tag{20}$$

(стоящая справа матрица положительна).

Очевидно, что матрица A регулярна, и из (12) находим представление для обратной матрицы

$$A^{-1} = B^{-\alpha}(I + S)^{-1} B^{-(1-\alpha)},$$

из которого согласно (20) приходим к предварительной оценке

$$|A^{-1}| \le |B|^{-\alpha}(I - V)^{-1}|B|^{-(1-\alpha)}. \tag{21}$$

Обозначим через $\varepsilon^{1-\alpha}$ столбец с компонентами $\varepsilon_1^{1-\alpha}, \ldots, \varepsilon_n^{1-\alpha}$, а через δ^α — строку с компонентами $\delta_1^\alpha, \ldots, \delta_n^\alpha$. Тогда

$$I - V = I + D - \varepsilon^{1-\alpha}\delta^\alpha, \quad D = \operatorname{diag}\{v_1, \ldots, v_n\}. \tag{22}$$

Так как матрица $I + D$, очевидно, является регулярной, а условие (4) можно переписать в виде $\sigma = \delta^\alpha (I + D)^{-1}\varepsilon^{1-\alpha} < 1$, то по формуле Шермана–Моррисона ([3], с. 53)

$$(I - V)^{-1} = (I + D)^{-1} + \frac{1}{1 - \sigma}(I + D)^{-1}\varepsilon^{1-\alpha}\delta^\alpha (I + D)^{-1}, \tag{23}$$

причем стоящие в правой части матрицы неотрицательны. Из оценки (21) и формулы (23) получаем

$$|A^{-1}| \le |B|^{-\alpha}\left\{(I + D)^{-1} + \frac{1}{1 - \sigma}(I + D)^{-1}\varepsilon^{1-\alpha}\delta^\alpha (I + D)^{-1}\right\}|B|^{-(1-\alpha)}. \tag{24}$$

Если матричной оценке (24) придать поэлементный вид, то придем к оценкам (6) и (7).

Перейдем к получению оценок (8). Как известно, i-й столбец обратной матрицы A^{-1} есть решение системы

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ii}x_i + \cdots + a_{in}x_n = 1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n = 0.
\end{gathered} \tag{25}$$

Из i-го уравнения системы (25) получаем

$$|1 - a_{ii}x_i| \le \sum_{j \ne i} |a_{ij}|\,|x_j| = \sum_{j \ne i} |a_{ij}|^{1-\alpha}|a_{ij}|^\alpha |x_j| \le \sum_{j \ne i} \varepsilon_i^{1-\alpha} a_i^{1-\alpha}\delta_j^\alpha a_j^\alpha |x_j|,$$

откуда приходим к неравенству

$$\left|\frac{1}{a_{ii}x_i} - 1\right| \le \frac{\varepsilon_i^{1-\alpha}}{a_i^\alpha} \sum_{j\ne i} \delta_j^\alpha a_j^\alpha |x_j|/|x_i|. \tag{26}$$

Теперь наша задача — оценить стоящую справа сумму. Из остальных уравнений системы (25) находим

$$|a_{ss}|\,|x_s| \le \sum_{j\ne s} |a_{sj}|\,|x_j| = \sum |a_{sj}|^{1-\alpha}|a_{sj}|^\alpha|x_j| \le \sum_{j\ne s} \varepsilon_s^{1-\alpha} a_s^{1-\alpha} \delta_j^\alpha a_j^\alpha |x_j|,$$

откуда следует

$$a_s^\alpha|x_s| \le \varepsilon_s^{1-\alpha} \sum_{j\ne s} \delta_j^\alpha a_j^\alpha |x_j|.$$

Дополнив стоящую справа сумму, получим

$$(1+v_s)a_s^\alpha|x_s| \le \varepsilon_s^{1-\alpha} \sum_{j=1}^n \delta_j^\alpha a_j^\alpha |x_j|$$

и, значит,

$$a_s^\alpha|x_s| \le \frac{\varepsilon_s^{1-\alpha}}{1+v_s} \sum_{j=1}^n \delta_j^\alpha a_j^\alpha |x_j|.$$

Умножим s-е неравенство на δ_s^α и сложим все полученные таким образом неравенства

$$\sum_{s\ne i} \delta_s^\alpha a_s^\alpha |x_s| \le \sigma_i \sum_{j=1}^n \delta_j^\alpha a_j^\alpha |x_j|$$

(σ_i дано в (9)). Выделяя интересующее нас выражение, находим

$$\sum_{s\ne i} \delta_s^\alpha a_s^\alpha |x_s| \le \frac{\sigma_i}{1-\sigma_i} \delta_i^\alpha a_i^\alpha |x_i|.$$

Подставляя последнюю оценку в (26), приходим к (8).

Осталось получить оценку (10) определителя исходной матрицы. Согласно (12)

$$\det A = \det B^{1-\alpha} \det(I+S) \det B^\alpha,$$

откуда получаем

$$|\det A| = |\det B|\,|\det(I+S)|. \tag{27}$$

Теперь заметим, что $I - V$ является M-матрицей. Действительно, она внедиагонально отрицательна и т. к. выполнено неравенство (19) (см. также (17)), то все ее главные миноры положительны. Поэтому из (14) вытекает важная оценка ([1], с. 50)

$$|\det(I+S)| \ge \det(I-V). \tag{28}$$

Установим формулу

$$\det(I-V) = (1-\sigma)\prod_{i=1}^n (1+v_i), \tag{29}$$

где σ взято из (4), а v_i определены в (5). Согласно равенству $\det(I+ab) = 1+ba$, где a — столбец и b — строка, из (22) находим

$$\det(I-V) = \det(I+D)\det(I-(I+D)^{-1}\varepsilon^{1-\alpha}\delta^\alpha) = \prod_{i=1}^n (1+v_i)(1-\delta^\alpha(I+D)^{-1}\varepsilon^{1-\alpha}),$$

что и доказывает формулу (29). Из (27), (28) и (29) непосредственно следует оценка (10). $\square$

Замечание. При $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ мы приходим к теореме Островского с ограничениями на максимумы модулей внедиагональных элементов строк или столбцов ([1], с. 95), однако даже в этих случаях оценки (6), (7) и (8) являются новыми.

Отметим, что если вместо неоднородной системы (25) рассмотреть соответствующую однородную систему, то рассуждениями, близкими к тем, которые провели для получения оценки (8), можно доказать и регулярность матрицы A (еще одно доказательство регулярности). Далее, нетрудно видеть, что в условиях доказанной теоремы не только определитель матрицы A отличен от нуля, но и все ее главные миноры. Поэтому диагональные элементы обратной матрицы A^{-1} не равны нулю.

Этот качественный результат можно дополнить количественной оценкой. Из (8) получаем

$$\frac{1}{|a_{ii}|\,|a_{ii}^{(-1)}|} \le 1 + \left|\frac{1}{a_{ii}a_{ii}^{(-1)}} - 1\right| \le 1 + \frac{\sigma_i v_i}{1-\sigma_i},$$

откуда находим оценку снизу для модулей диагональных элементов обратной матрицы

$$|a_{ii}^{(-1)}| \ge \frac{1-\sigma_i}{a_i(1-\sigma_i+\sigma_i v_i)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если оценку (8) использовать по-другому

$$\frac{1}{|a_{ii}|\,|a_{ii}^{(-1)}|} \ge 1 - \left|\frac{1}{a_{ii}a_{ii}^{(-1)}} - 1\right| \ge 1 - \frac{\sigma_i v_i}{1-\sigma_i},$$

то придем к неравенству

$$|a_{ii}^{(-1)}| \le \frac{1-\sigma_i}{a_i(1-\sigma_i-\sigma_i v_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

в точности, как показывают вычисления, совпадающему с оценкой (6).

Как видно из доказательства теоремы, спектральный радиус матрицы S меньше единицы. Иногда полезно знать конкретные нормы, в которых матрица S оказывается строгим сжатием (т. е. ее норма меньше единицы). Рассмотрим векторную норму следующего вида:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| h_i = (|x|, h), \tag{30}$$

где h_i — положительные числа, а круглые скобки означают стандартное скалярное произведение. Если положить

$$h_i = \frac{\delta_i^\alpha}{1+v_i}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{31}$$

то в силу (4), (5) и (9)

$$\Bigl(\sum_{i\ne j} \varepsilon_i^{1-\alpha} h_i\Bigr)(1+v_j) = \sigma_j(1+v_j) < \sigma.$$

Согласно (30) и (31) получаем

$$\|Sx\| = (|Sx|, h) \le (|S|\,|x|, h) \le (V|x|, h) = \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{j\ne i} \varepsilon_i^{1-\alpha}\delta_j^\alpha |x_j|\Bigr) h_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\Bigl(\sum_{i\ne j} \varepsilon_i^{1-\alpha} h_i\Bigr)\delta_j^\alpha |x_j| \le \sigma \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j^\alpha |x_j|}{1+v_j} = \sigma(|x|, h) = \sigma\|x\|.$$

Таким образом, матрица S является строгим сжатием, $\|S\| \le \sigma$. Если

$$h_i = \frac{\delta_i^\alpha}{\rho+v_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то $V^*h = \rho h$, что мы уже отмечали выше, и потому

$$\|Sx\| \leq (V|x|, h) = (|x|, V^*h) = \rho\|x\|,$$

так что и в этом случае матрица S является строгим сжатием, $\|S\| \leq \rho$.

В заключение докажем важное неравенство

$$\rho < \sigma, \tag{32}$$

где постоянная σ взята из (4), а число ρ является единственным положительным корнем уравнения (18). Рассмотрим функцию

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{u + v_i},$$

где v_i подсчитывается по формуле (5). Отсюда $\sigma = f(1)$ и $1 = f(\rho)$; значит, $\sigma = f(f(\rho))$ и неравенство (32) сводится к неравенству

$$\rho < g(\rho), \tag{33}$$

где $g(u) = f(f(u))$ — вторая итерация функции f.

Так как $f(\rho) - \rho = 1 - \rho > 0$ и $f(1) - 1 = \sigma - 1 < 0$, то отображение f внутри отрезка $[\rho, 1]$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку $u_0 : \rho < u_0 < 1$, $u_0 = f(u_0)$. Ясно, что u_0 есть также неподвижная точка отображения g, $u_0 = g(u_0)$. Можно показать, что $g'(u) > 0$ и $g''(u) < 0$ для всех неотрицательных u. В силу (строгой) вогнутости $g(u) > g(0) + ku$ при $0 < u < u_0$, где $k = (g(u_0) - g(0))/u_0$ (угловой коэффициент хорды), и т.к. $g(0) + ku > u$ при $0 < u < u_0$, то $u < g(u)$ при $0 < u < u_0$. При $u = \rho$ из последнего неравенства следует (33) и, значит, неравенство (32).

Оценки элементов обратных матриц и определителей матриц, удовлетворяющих условиям Адамара, Брауэра и Островского, можно найти в [4]–[6].

Литература

1. Пароди К. *Локализация характеристических чисел матриц и ее применения.* – М.: Ин. лит., 1960. – 172 с.
2. Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* – М.: Наука, 1972. – 232 с.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* – М.: Мир, 1975. – 560 с.
4. Перов А.И. *Оценки элементов обратных матриц в условиях теорем Адамара и Брауэра* // Тез. докл. 26-й Воронежск. зимн. матем. школы. – 1994. – С. 73.
5. Перов А.И. *Оценки элементов обратных матриц в условиях теорем Островского* // Тез. докл. 26-й Воронежск. зимн. матем. школы. – 1994. – С. 74.
6. Перов А.И. *Оценки определителей матриц, удовлетворяющих условиям Адамара или Брауэра* // Тез. докл. 27-й Воронежск. зимн. матем. школы. – 1995. – С. 186.

Воронежский государственный университет

Поступила 28.10.1996