ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 1 (488)

УДК 519.61

Г.П. АСТРАХАНЦЕВ

О ВЫБОРЕ ПОЧТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ В АЛГОРИТМАХ ТИПА ЭРРОУ–ГУРВИЦА

1. Введение

В данной работе рассматриваются итерационные методы типа Эрроу–Гурвица для решения задач о нахождении седловых точек. Такие задачи возникают обычно при использовании техники теории двойственности или смешанных методов конечных элементов. Примером являются системы сеточных уравнений в методе конечных элементов для задач типа Стокса, задач упругости, для смешанной дискретизации эллиптических задач. Пусть X и Y — конечномерные гильбертовы пространства со скалярными произведениями, которые будем обозначать $(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим невырожденную систему линейных уравнений вида

$$Lz = F, \tag{1.1}$$

где

$$L \equiv \begin{pmatrix} A & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X \times Y, \quad F \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь A — симметричная, положительно-определенная $(n_1 \times n_1)$-матрица, B — прямоугольная матрица $n_2 \times n_1$, B^* — сопряженная к B матрица. Будем исследовать скорость сходимости итерационного метода типа Эрроу–Гурвица с тремя параметрами

$$\begin{gathered} \frac{Q_A(x_{n+1}-x_n)}{\tau} = -[Ax_n + B^*y_n - f_1], \\ -\frac{\alpha_1 B(x_{n+1}-x_n)}{\tau} + \frac{\alpha Q_B(y_{n+1}-y_n)}{\tau} = -[-Bx_n - f_2]; \\ Q_A, Q_B > 0, \quad \tau, \alpha, \alpha_1 > 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Эти методы известны как предобусловленный метод Ричардсона ($\alpha_1 = 0$) и неявный метод Удзавы ($\alpha_1 = \tau$); при $\alpha_1 = \tau = 1$ и $Q_A = A$ метод (1.2) известен как предобусловленный метод Удзавы. Введение третьего параметра α_1 вызвано желанием охватить алгоритм типа неявного метода Удзавы для расширенного лагранжиана с параметром. Такой алгоритм исследовался, например, в [1] и [2]. Спектр оператора пересчета в этих работах совпадает со спектром оператора пересчета T в методе (1.2) (операторы сопряжены). Введение операторов Q_A и Q_B отражает либо стремление улучшить скорость сходимости метода (предобусловливание), либо наличие внутренних итераций при реализации метода Удзавы. Требование однозначной разрешимости (1.1) приводит к тому, что выполнены неравенства

$$0 < \mathrm{a} \le \frac{(Ax,x)}{(Q_A x,x)} \le 1, \quad 0 < m \le \frac{(BA^{-1}B^*y,y)}{(Q_B y,y)} \le 1 \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01214.

для некоторых положительных чисел a, m. Наличие 1 в правой части (1.3) не уменьшает общности, поскольку достигается простой перенормировкой Q_A и Q_B.

Построению и исследованию алгоритмов решения седловых задач посвящено множество работ, начиная с работ Эрроу, Гурвица, Удзавы (1958 г.). Для примера отметим работы [3]–[5]. В настоящее время для $Q_A = A$ получен окончательный результат о возможностях метода (1.2) [6], даны оптимальные значения параметров, минимизирующих спектральный радиус T. В [6] отмечено, что при оптимальных параметрах у T могут быть клетки Жордана второго порядка. Поэтому получение оценок скорости сходимости вида $\|T^n\| \le cq^n$ является сомнительной задачей, более вероятна оценка $\|T^n\| \le cnq^n$. Предлагаемая работа является попыткой продолжить эти исследования и придать характер неулучшаемости оценкам скорости сходимости при произвольном предобусловливателе Q_A для первого блока уравнений.

Сравнение полученных результатов будет проводиться с решением следующей модельной задачи. Пусть $Q_A = I$, $Q_B = I$; A, B — диагональные матрицы размера $n_1 \times n_1$ и $n_2 \times n_1$ вида $(n_2 \le n_1)$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdot & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{n_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_{n_1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{b_1} & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \sqrt{b_2} & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdot & \sqrt{b_{n_2}} & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$0 < \mathrm{a} \le a_i \le 1; \quad 0 < m < \frac{b_i}{a_i} \equiv t_i \le 1.$$

Для этого примера собственные значения оператора пересчета описываются выражением

$$\lambda = 1 - \tau\theta \pm \tau\sqrt{\theta^2 - \frac{ta}{\alpha}}, \quad \theta \equiv \frac{a}{2}(1 + \alpha_1 t),$$

где $t = 0$ либо $m \le t < 1$. Решение задачи асимптотической оптимизации

$$q_0 \equiv \min_{\tau,\alpha,\alpha_1} \max_{\substack{t\in[m,1] \\ a\in[\mathrm{a},1]}} \{|1 - \tau a|,\ |\lambda(t,a)|\}, \tag{1.5}$$

приведено в [2], $q_0(\mathrm{a}, m) < 1$ является корнем кубического уравнения

$$q_0^3 - q_0^2(1+\mathrm{a})\left(\frac{1+m}{1-m}\right) + q_0(2\mathrm{a}-1) + (1-\mathrm{a})\left(\frac{1+m}{1-m}\right) = 0. \tag{1.6}$$

Анализ этого модельного примера приводит к выводу, что третий параметр α_1 в некотором смысле лишний ($\alpha_1 = \tau$), т. е. оптимальным методом является неявный метод Удзавы. Поведение оптимальных параметров α_0, τ_0 в модельном примере нельзя описать одной формулой при малых a, m, поскольку

$$\begin{aligned} &\tau_0 \approx 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{\mathrm{a}}}, && \alpha_0 = \frac{2m}{\mathrm{a}}, && m/\mathrm{a} \ll 1; \\ &\tau_0 \approx 2, && \alpha_0 \approx 1, && m/\mathrm{a} \gg 1. \end{aligned}$$

Ситуация с выбором параметров аналогична методу верхней релаксации SOR (блочно-трехдиагональный случай). Имеется большой диапазон параметров, где качество сходимости примерно одинаковое, и существенно меньшая область, где происходит изменение асимптотики скорости сходимости.

Результатом данной работы является утверждение, что в общем случае оценка скорости сходимости (1.2) в предположении (1.3) не намного хуже решения в случае модельной задачи. В [7] для смешанного метода конечных элементов для бигармонического уравнения дана оценка скорости сходимости метода типа (1.2). Было отмечено, что введение параметров меняет асимптотику показателя скорости сходимости при $m \ll 1$. Используемая там техника получения результата применяется в [8] и данной работе. Оценка скорости сходимости алгоритма (1.2) может быть получена анализом резольвенты оператора T. Окончательная оценка имеет вид $\|T^n\| \le C(1-\delta)^n$, $\delta > 0$, где δ определяется спектром, а C — нормой резольвенты. Будет указан такой выбор параметров τ, α, τ_1, что при малых a, m имеют место неравенства, характеризующие качество итерационного процесса,

$$\begin{aligned} 1-\sqrt{2\mathrm{a}m} \le q_0 \le (1-\delta) = 1-\sqrt{2\mathrm{a}m}/(72\sqrt{2}), \quad & m/\mathrm{a} \le 1/4; \\ 1-\mathrm{a} \le q_0 \le (1-\delta) = 1-\mathrm{a}/144, \quad & m/\mathrm{a} \ge 1/4. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Заметим, что применяемая техника не требует симметрии оператора A, достаточно, чтобы была симметрична его основная часть.

2. Вспомогательные результаты

Оператор пересчета метода (1.2) имеет вид $T = I - \tau D^{-1}L$, где

$$D \equiv \begin{pmatrix} Q_A & 0 \\ -\alpha_1 B & \alpha Q_B \end{pmatrix}.$$

Для оценки скорости сходимости будет исследован спектр оператора $D^{-1}L$. Тогда использование для представления степеней оператора T интегральной формулы Коши

$$T^n = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (1-\tau\lambda)^n [D^{-1}L - \lambda I]^{-1} d\lambda$$

дает возможность получать оценки скорости сходимости. Далее будет показано, что Γ — это парабола, являющаяся границей области Π, содержащей спектр $D^{-1}L$. Для оптимального выбора параметра τ можно использовать решение оптимизационной задачи. Введем обозначения

$$\tau_0 \equiv 2(\lambda_1^- + \lambda_1^+ + p)^{-1}, \quad \tau_- \equiv (\lambda_1^- + p)^{-1}, \quad \rho(\tau,\lambda) \equiv |1-\tau\lambda|.$$

Теорема 1. *Пусть* Π — *множество комплексных чисел* $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$,

$$\Pi \equiv \{\lambda : 0 < \lambda_1^- \le \lambda_1 \le \lambda_1^+,\ |\lambda_2|^2 \le p\lambda_1\}, \quad p > 0,$$

тогда решение минимаксной задачи

$$q_1(\lambda_1^-, \lambda_1^+, p) = \min_{\tau>0}\max_{\lambda\in\Pi}|1-\tau\lambda| \equiv \min_{0<\tau}\rho(\tau) \tag{2.1}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} q_1^2 = (1+\lambda_1^-/p)^{-1} = |1-\tau_-\lambda_1^-|^2 \quad & \textit{при} \ \ p \ge \lambda_1^+ - \lambda_1^-; \\ q_1^2 = |1-\tau_0\lambda_1^-|^2 \quad & \textit{при} \ \ p \le \lambda_1^+ - \lambda_1^-. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Доказательство. Ясно, что $\rho(\tau)$ является значением $|1-\tau\lambda|$ при λ, лежащей на параболе. На ней

$$\rho^2(\tau,\lambda) = (1-\tau\lambda_1)^2 + \tau^2 p\lambda_1 \equiv \rho_1^2(\tau,\lambda_1). \tag{2.3}$$

Анализируя (2.3) для всевозможных значений τ, получим

$$\begin{aligned} &\rho^2(\tau) = \rho_1^2(\tau,\lambda_1^-), \quad \tau \le \tau_0; \\ &\rho^2(\tau) = \rho_1^2(\tau,\lambda_1^+), \quad \tau \ge \tau_0; \\ &\rho^2(\tau) \ge 1, \quad \tau \ge 2/(\lambda_1^+ + p). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Видно, что τ_0 определяется условием $\rho_1(\tau,\lambda_1^-) = \rho_1(\tau,\lambda_1^+)$. Поскольку $\tau_+ = 1/(\lambda_1^+ + p)$, вершина параболы $\rho_1^2(\tau,\lambda_1^+)$ лежит левее τ_0, то в (2.1) можно сузить область, по которой берется минимум

$q_1^2 = \min\limits_{0\le\tau\le\tau_0} \rho_1^2(\tau,\lambda_1^-)$, после чего, в зависимости от соотношения между τ_- и τ_0 очевидны равенства (2.2). $\square$

Получим упрощенные представления для решения модельной задачи $q_0(\mathrm{a},m)$, являющиеся оценками снизу. Пусть $b\equiv(1+m)/(1-m)$, $\varepsilon_0^2\equiv 2\mathrm{a}(b-1)[3-b(1+\mathrm{a})]^{-1}$.

Теорема 2. *Для решения задачи асимптотической оптимизации* (1.5) *имеют место неравенства*

$$(1-\mathrm{a})(1+\mathrm{a})\le q_0(\mathrm{a},m); \tag{2.5}$$

$$1-\varepsilon_0\le q_0(\mathrm{a},m)\quad \textit{при}\quad (1+m)/(1-m)\le(3+2\mathrm{a})(1+\mathrm{a})^{-2}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Сделаем замену $q_0=1-\varepsilon$ в уравнении (1.6). Получим

$$\Phi(\varepsilon)\equiv-\varepsilon^3+\varepsilon^2(3-b(1+\mathrm{a}))+2\varepsilon(b-1)(1+\mathrm{a})-2\mathrm{a}(b-1)=0. \tag{2.7}$$

Пусть ε_0 — корень упрощенного уравнения

$$\Phi_0(\varepsilon)\equiv\varepsilon^2(3-b(1+\mathrm{a}))-2\mathrm{a}(b-1)=0,\quad \Phi(\varepsilon)=\Phi_0(\varepsilon)+\Phi_1(\varepsilon),$$

а $\varepsilon_1>0$ обращает в нуль выражение $\Phi_1(\varepsilon)=\varepsilon[-\varepsilon^2+2(b-1)(1+\mathrm{a})]$, $\varepsilon_1^2=2(b-1)(1+\mathrm{a})$. Если $\varepsilon_1\ge\varepsilon_0$, то на промежутке $(0,\varepsilon_0)$ есть корень уравнения (2.7) (перемена знака у $\Phi(\varepsilon)$). Для справедливости $\varepsilon_1\ge\varepsilon_0$ нужно выполнение двух неравенств: $b<3/(1+\mathrm{a})$, $b\le(3+2\mathrm{a})(1+\mathrm{a})^{-2}$, которые верны при условии

$$(1+m)/(1-m)\le(3+2\mathrm{a})(1+\mathrm{a})^{-2},\quad \mathrm{a}>0. \tag{2.8}$$

Справедливость соотношения (2.6) установлена. Оценка (2.5) получается из (1.5), если положить $\alpha_1=\tau=2/(1+\mathrm{a})$, $t=1$, $a=\mathrm{a}$, $\alpha=\tau/\mathrm{a}$. $\square$

Заметим, что при $m\le1/9$ условие (2.8) становится содержательным ($\varepsilon_0\le1$), и при m, а малых имеем $\varepsilon_0^2\approx2\mathrm{a}m$. Для всех а и $m\le1/9$ имеет место соотношение

$$2\mathrm{a}m\le\varepsilon_0^2\le9\mathrm{a}m.$$

В дальнейшем нам понадобится следствие первого из неравенств (1.3): $Q_A^{-1}\le A^{-1}$. Действительно,

$$(Q_A^{-1}x,x)=\sup_\varphi\frac{(Q_A^{-1}x,\varphi)^2}{(Q_A^{-1}\varphi,\varphi)}=\sup_u\frac{(x,u)^2}{(u,Q_Au)}\le\sup_u\frac{(A^{-1}x,x)(Ax,x)}{(Q_Au,u)}\le(A^{-1}x,x). \tag{2.9}$$

3. Анализ метода типа Эрроу–Гурвица

В этом пункте получим представление степеней оператора пересчета T. Для оценки T^n нужно исследовать спектр оператора $D^{-1}L$.

Теорема 3. *Пусть для параметров метода* (1.2) *верны следующие ограничения*: $\alpha_1\le1$, $\alpha_1=2\sqrt{\alpha}$, *тогда спектр оператора* $D^{-1}L$ *содержится в области*

$$\Pi\equiv\{\lambda:0<\lambda_1^-\le\lambda_1\le\lambda_1^+,\ |\lambda_2|^2\le9\lambda_1/\alpha_1\}, \tag{3.1}$$

где $\lambda_1^-=R(1+25/9)^{-1/2}$, $R\equiv\min\{\mathrm{a}/4,\ m/(\alpha4)\}$, $\lambda_1^+=(1+\alpha_1/\alpha)$.

Доказательство. 1) Рассмотрим равенство

$$Lz - \lambda Dz = DF, \quad z, F \in X \times Y; \quad F \equiv \{F_1, F_2\}. \tag{3.2}$$

Умножим (3.2) на $\{x, 0\}$, $\{0, y\}$, $\{Q_A^{-1}B^*y, 0\}$. Тогда получим

$$(Ax, x) + (B^*y, y) = \lambda(Q_A x, x) + (Q_A F_1, x), \tag{3.3}$$

$$-(Bx, y) = -\alpha_1\lambda(Bx, y) + \alpha_1\lambda(Q_B y, y) - \alpha_1(BF_1, y) + \alpha(Q_B F_2, y), \tag{3.4}$$

$$(Q_A^{-1}Ax, B^*y) + (Q_A^{-1}B^*y, B^*y) = \lambda(x, B^*y) + (F_1, B^*y). \tag{3.5}$$

Суммируя (3.3) с комплексно сопряженным равенством (3.4) и с сопряженным (3.5), умноженным на α_1, получим

$$(Ax, x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^*y, B^*y) = \lambda(Q_A x, x) + \alpha(\lambda_1 - i\lambda_2)(Q_B y, y) - \alpha_1\overline{(Q_A^{-1}Ax, B^*y)} + \Phi(x, y),$$

$$\Phi(x, y) \equiv (Q_A F_1, x) - \alpha_1\overline{(BF_1, y)} + \alpha\overline{(Q_B F_2, y)} + \alpha_1\overline{(F_1, B^*y)}. \tag{3.6}$$

2) Покажем, что при любых отрицательных λ_1 нет спектра. Взяв вещественную часть от (3.6) и используя неравенство (2.9), получим

$$(Ax, x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^*y, B^*y) \le$$

$$\le \lambda_1(Q_A x, x) + \alpha\lambda_1(Q_B y, y) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^*y, B^*y)^{1/2}(Ax, x)^{1/2} + |\operatorname{Re}\Phi(x, y)|. \tag{3.7}$$

При $\alpha_1 \le 4$ имеем

$$(1 - \sqrt{\alpha_1}/2)[(Ax, x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^*y, B^*y)] \le |\Phi(x, y)|, \quad \lambda_1 \le 0.$$

3) Заметим, что и при больших λ_1 нет спектра. Перепишем вещественную часть (3.6) в виде

$$\lambda_1(Q_A x, x) + \alpha\lambda_1(Q_B y, y) = (Ax, x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^*y, B^*y) + \alpha_1\operatorname{Re}(Q_A^{-1}Ax, B^*y) - \operatorname{Re}\Phi(x, y).$$

В силу неравенств (2.9), (1.3) имеем

$$\lambda_1(Q_A x, x) + \alpha\lambda_1(Q_B y, y) \le (Ax, x) + \alpha_1(A^{-1}B^*y, B^*y) + \alpha_1(A^{-1}B^*y, B^*y)^{1/2}(AQ_A^{-1}Ax, Q_A^{-1}Ax)^{1/2} +$$

$$+ |\operatorname{Re}\Phi(x, y)| \le (Q_A x, x) + \alpha_1(Q_B y, y) + \alpha_1(Q_B y, y)^{1/2}(Q_A x, x)^{1/2} + |\operatorname{Re}\Phi(x, y)|.$$

Обозначим $p^2 \equiv (Q_A x, x)$, $q^2 \equiv \alpha(Q_B y, y)$, и пусть μ — точная постоянная в оценке

$$\frac{p^2 + \alpha_1\alpha^{-1}q^2 + \alpha_1/\sqrt{\alpha}\,pq}{p^2 + q^2} \le \mu,$$

т. е. μ — наибольший из $\mu_1 < \mu_2$ корней квадратного уравнения $\mu^2 - (1 + \alpha_1/\alpha)\mu + \alpha_1(1 - \alpha_1/4)/\alpha = 0$. Предположим опять, что $\alpha_1 < 4$, тогда, если считать $\lambda_1 \ge 1 + \alpha_1/\alpha \equiv \lambda_1^+$, будет иметь место неравенство

$$\varepsilon\lambda_1[(Q_A x, x) + \alpha(Q_B y, y)] \le |\Phi(x, y)|, \quad (1 - \varepsilon)(1 + \mu_1/\mu_2) = 1. \tag{3.8}$$

4) Поскольку задача (3.2) при $\lambda = 0$ разрешима, покажем, что при малых $|\lambda|$ она имеет решение. Исключая x из этих уравнений, получим

$$(1 - \lambda\alpha_1)B(A - \lambda Q_A)^{-1}B^*y - \alpha\lambda Q_B y - \Phi_2 = 0, \quad |\lambda| < \mathrm{a}; \tag{3.9}$$

$$\Phi_2 \equiv (1 - \lambda\alpha_1)B(A - \lambda Q_A)^{-1}Q_A F_1 - \alpha_1 BF_1 - \alpha Q_B F_2.$$

С учетом разложения в ряд Неймана, получим

$$|((A-\lambda Q_A)^{-1}B^*y, B^*y)| = \left|(A^{-1}B^*y, B^*y) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n (A^{-1}K^n B^*y, B^*y)\right| \ge$$
$$\ge \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda}{\mathrm{a}}\right|^n\right)(A^{-1}B^*y, B^*y) = \left(1 - \frac{|\lambda|/\mathrm{a}}{1-|\lambda|/\mathrm{a}}\right)(A^{-1}B^*y, B^*y),$$

где $K \equiv Q_A A^{-1}$. При получении последнего неравенства использовано следствие из первого неравенства (1.3): $\frac{[Kx,x]}{[x,x]} \equiv \frac{(A^{-1}Q_A A^{-1}x,x)}{(A^{-1}x,x)} \le \frac{1}{\mathrm{a}}$. Умножив (3.9) скалярно на y, имеем

$$|(\Phi_2, y)| \ge m|1-\lambda\alpha_1|\left(1 - \frac{|\lambda|/\mathrm{a}}{1-|\lambda|/\mathrm{a}}\right)(Q_B y, y) - \alpha|\lambda|(Q_B y, y).$$

Выберем $|\lambda|$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $m(1-\alpha_1|\lambda|)(2-1/(1-|\lambda|/\mathrm{a})) - \alpha|\lambda| \ge \varepsilon > 0$. Для этого, например, потребуем выполнения следующих условий:

$$\alpha_1 \le 1, \quad |\lambda| \le \min\{\mathrm{a}/4,\ m/(4\alpha)\} \equiv R, \quad \varepsilon = m/4. \tag{3.10}$$

Тогда

$$|(\Phi_2, y)| \ge (Q_B y, y)m/4. \tag{3.11}$$

Поскольку еще из первого блока уравнений (3.2) следует

$$(Ax,x)(1-1/4) \le (Q_A F_1, x) + (Ax,x)^{1/2}(Q_B y, y)^{1/2}, \tag{3.12}$$

то в круге $|\lambda| \le R$ нет спектра.

5) Дадим некоторое уточнение п. 4. При малых $\lambda_1 \ge 0$ и вне угла, близкого к $\pi/4$, нет спектра. Из мнимой части равенства (3.6) можно найти $(Q_B y, y)$ и продолжить неравенство (3.7)

$$(Ax,x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^*y, B^*y) \le 2\lambda_1(Q_A x, x) + \alpha_1(1+\lambda_1/|\lambda_2|)(Q_A^{-1}B^*y, B^*y)^{1/2}(Ax,x)^{1/2} +$$
$$+ |\operatorname{Re}\Phi(x,y)| + (\lambda_1/|\lambda_2|)|\operatorname{Im}\Phi(x,y)|. \tag{3.13}$$

Предположим, что имеет место неравенство

$$\lambda_1/\mathrm{a} + \sqrt{(\lambda_1/\mathrm{a})^2 + \alpha_1\left(1+\frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}\right)^2 \Big/ 4} \le 1 - \varepsilon_1, \tag{3.14}$$

тогда

$$\varepsilon_1[(Ax,x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^*y, B^*y)] \le (1+\lambda_1/|\lambda_2|)|\Phi(x,y)|. \tag{3.15}$$

Если считать, что справедливы соотношения

$$\alpha_1 \le 1, \quad \lambda_1/|\lambda_2| \le 0.6, \quad 0 \le \lambda_1 \le \frac{\mathrm{a}}{4\sqrt{1+25/9}}, \tag{3.16}$$

то (3.14) имеет место с $\varepsilon_1 = 0.06$.

6) Справедливость утверждений из пп. 4, 5 приводит к тому, что при малых $\lambda_1 \ge 0$ нет спектра. Действительно, пересечение прямой $|\lambda_2| = \lambda_1/0.6$ из условия (3.16) с окружностью $|\lambda_2| = R$ приводит к точке $\lambda_1^- \equiv R/\sqrt{1+25/9}$, и, очевидно, (см. (3.10))

$$\lambda_1^- \le \frac{\mathrm{a}}{4\sqrt{1+25/9}}.$$

Таким образом, объединяя п. 4–6, получим, что в полосе

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_1^- = (1+25/9)^{-1/2}\min\{\mathrm{a}/4,\ m/(4\alpha)\}$$

нет спектра ($\alpha_1 \le 1$).

7) Покажем, что вне параболы вида $|\lambda_2|^2 \le p\lambda_1$ нет спектра. Пусть $0 < \lambda_1 \le \lambda_1^+$ и более точно проведем оценки в (3.13). Из мнимой части равенства (3.3) найдем оценку $(Q_A x, x)$

$$|\lambda_2|(Q_A x, x) \le (Q_A x, x)^{1/2}[(Q_A^{-1}B^* y, B^* y)^{1/2} + (Q_A F_1, F_1)^{1/2}].$$

Продолжая неравенство (3.13), имеем

$$(Ax, x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^* y, B^* y) \le (2\lambda_1/\lambda_2^2)(Q_A^{-1}B^* y, B^* y) +$$
$$+\alpha_1(1 + \lambda_1/|\lambda_2|)(Q_A^{-1}B^* y, B^* y)^{1/2}(Ax, x)^{1/2} + \Phi_3,$$
$$\Phi_3 \equiv (1 + \lambda_1/|\lambda_2|)|\Phi(x, y)| + (2\lambda_1/\lambda_2^2)[2(Q_A^{-1}B^* y, B^* y)^{1/2}(Q_A F_1, F_1)^{1/2} + (Q_A F_1, F_1)].$$

Пусть величина $\lambda_1/(\lambda_2^2\alpha_1) \equiv \varepsilon$ мала, так чтобы было верно неравенство

$$\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\alpha_1}{4}\left(1 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\alpha_1\lambda_1}\right)^2} \le 1 - \varepsilon_1, \tag{3.17}$$

тогда будет иметь место априорная оценка

$$\varepsilon_1[(Ax, x) + \alpha_1(Q_A^{-1}B^* y, B^* y)] \le \Phi_3.$$

Для справедливости (3.17) можно потребовать выполнения условий $\alpha_1 \le 1$, $\alpha_1 = 2\sqrt{\alpha}$, $\varepsilon = 1/9$, тогда $\varepsilon_1 = 0.009$, $p = 9/\alpha_1$. $\square$

Как видно из доказательства, неравенства (3.17), (3.8), (3.11), (3.12), (3.15) дают оценку $(D^{-1}L - \lambda I)^{-1}$ на границе Γ области Π. Заметим, что оценка спектра типа (3.1) приведена в ([8], теорема 6).

4. Выбор параметров, оценка скорости сходимости

Заметим, что при $\alpha_1 < 4$ метод (1.2) при достаточно малых τ сходится. Это следует из п. 2 доказательства теоремы 3. Используя представление степеней оператора пересчета T, для погрешности $z_n - z$ можно получить оценку

$$\|z_n - z\| \le C \max_{\lambda\in\Pi} |1 - \tau\lambda|^n \equiv Cq^n,$$

где норму можно составить из скалярных произведений, фигурирующих в условиях разрешимости (1.3), а C определяется величиной интеграла

$$\oint \|(D^{-1}L - \lambda I)^{-1}\|\, |d\lambda|,$$

необходимые неравенства приведены в теореме 3. Для хорошего выбора параметров τ, α, α_1 воспользуемся решением оптимизационной задачи из теоремы 1. Отметим, что в нашем случае всегда будем находиться в рамках условия $p \ge \lambda_1^+ - \lambda_1^-$. Действительно,

$$p = 9/\alpha_1, \quad \lambda_1^+ = (1 + \alpha_1/\alpha), \quad \lambda_1^- \ge 0.5\min\{\mathrm{a}/4,\ m/(\alpha 4)\} = R/2, \quad \alpha_1 = 2\sqrt{\alpha}, \quad \alpha_1 \le 1. \tag{4.1}$$

Качественно опишем рекомендации по выбору параметров. Если $\mathrm{a} \ll m$, то τ, α, α_1 нужно брать около единицы, если $m \ll \mathrm{a}$, то $\tau \approx \alpha_1$ нужно брать малыми, а α — еще меньшими. Отметим, что соотношение $\alpha_1 = 2\sqrt{\alpha}$ предельно точное в обоих случаях. Во всех вариантах скорость сходимости, грубо говоря, может быть в 100 раз хуже оптимальной. Дадим строгое описание результатов.

Если взять параметр

$$\tau = \tau_- = (R/2 + 9/\alpha_1), \tag{4.2}$$

то показатель скорости сходимости q равен $q^2 = (1 + R\alpha_1/18)^{-1}$. Выберем α_1^+ из условия максимизации $\alpha_1 R = \min\{\alpha_1 \mathrm{a}/4,\ m/\alpha_1\}$. Легко проверить, что

$$\alpha_1^+ = 1 \ \text{ при } \ 2\sqrt{m/\mathrm{a}} \geq 1; \quad a_1^+ = 2\sqrt{m/\mathrm{a}} \ \text{ при } \ 2\sqrt{m/\mathrm{a}} \leq 1. \tag{4.3}$$

Тем самым доказана основная

Теорема 4. *Предположим, что верны условия разрешимости* (1.3) *задачи* (1.1) *и* z_n *определены итерационным алгоритмом* (1.2). *Пусть* $0 < \alpha_1 \leq 1$, $\tau > 0$, $\alpha_1 = 2\sqrt{\alpha}$, *тогда для погрешности* $z_n - z$ *верна оценка*

$$\|z_n - z\| \leq c\rho^n(\tau)\|z_0 - z\|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\rho(\tau)$ *определяется соотношениями* (2.4), (4.1). *Если выбрать* $\alpha_1 = \alpha_1^+$, $\tau = \tau_-$, $\alpha_1 = 2\sqrt{\alpha}$ (*см.* (4.3), (4.2)), *то* $\|z_n - z\| \leq cq_+^n\|z_0 - z\|$, *где*

$$q_+^2 = (1 + \mathrm{a}/72)^{-1} \ \text{ при } \ 2\sqrt{m/\mathrm{a}} \geq 1; \quad q_+^2 = (1 + \sqrt{m/\mathrm{a}}\,/36)^{-1} \ \text{ при } \ 2\sqrt{m/\mathrm{a}} \leq 1.$$

Насколько q_+ отличается от оптимального решения $q_0(\mathrm{a}, m)$ модельной задачи (1.4) в полном диапазоне изменения параметров $\mathrm{a}, m \in (0, 1]^2$, позволяет судить теорема 2 (неравенства (2.5) или (2.6)). Наглядное представление этих оценок дает их асимптотика при малых m, a — неравенства (1.7).

Литература

1. Fortin M., Glowinski R. *Augmented Lagrangian methods. Applications to the numerical solution of boundary value problems* // Stud. Math. and Appl. – Amsterdam. – 1983. – № 15. – 340 p.
2. Чижонков Е.В. *К решению алгебраической системы типа Стокса при блочно-диагональном предобусловливании* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41. – № 4. – С. 549–557.
3. Queck W. *The convergence factor of preconditioned algorithms of the Arrow–Hurwicz type* // SIAM J. Numer. Anal. – 1989. – V. 4. – P. 1016–1030.
4. Silvester D., Wathen A. *Fast iterative solutions of stabilized Stokes systems.* II: *Using block diagonal preconditioners* // SIAM J. Numer. Anal. – 1994. – V. 5. – P. 1352–1367.
5. Bramble J.H., Pasciak J.E., Vassilev A.T. *Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems* // SIAM J. Numer. Anal. – 1997. – V. 3. – P. 1072–1092.
6. Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения сеточных уравнений с седловым оператором.* Дис. … докт. физ.-матем. наук. – М.: МГУ, 1999. – 32 с.
7. Астраханцев Г.П. *Об одном способе приближенного решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1977. – Т. 17. – № 4. – С. 980–988.
8. Астраханцев Г.П. *Анализ алгоритмов типа Эрроу–Гурвица* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41. – № 1. – С. 17–28.

Санкт-Петербургский экономико-математический институт Российской Академии наук

Поступила 18.06.2002