ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 511.5

Б.Т. ТАШПУЛАТОВ

ФОРМУЛЫ ТИПА КЛОСТЕРМАНА ДЛЯ ТЕРНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ВИДА $x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2$ И ОТСУТСТВИЕ ТАКИХ ФОРМ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ

1. В 1926 г. Клостерман [1] с помощью модулярных функций и сингулярных рядов получил точные формулы для числа представлений чисел формами $x_1^2+x_2^2+a(x_3^2+x_4^2)$ при $a=3,5,6,7$. При этом, если $a=3$, сингулярный ряд дает точное значение для числа представлений соответствующей формой. В случае $a=5,6,7$ в формулы Клостермана входят дополнительные члены, которые Клостерман определял как коэффициенты разложений в степенной ряд произведений некоторых тэта-функций Якоби.

В 1959–1966 гг. Г.А. Ломадзе [2]–[9], используя результаты и идеи Харди, Морделла, Гекке, Клостермана, Масса, Стрефкерка, разработал метод отыскания точных формул для числа представлений чисел положительно определенными диагональными квадратичными формами с 2-мя, 3-мя, 4-мя, 6-ю и бо́льшим четным числом переменных с дополнительными членами типа Клостермана.

Этот метод более 30 лет применялся Г.А. Ломадзе и его учениками к исследованию большого (но конечного) числа квадратичных форм. Они получили формулы типа Клостермана для количества представлений чисел конкретными квадратичными формами.

Л.А. Коган [10] рассмотрел некоторые квадратичные формы с 3-мя, 4-мя и 6-ю переменными и получил для них формулы типа Клостермана другим способом.

Нами разработан алгоритм [12], [15] для отыскания формул типа Клостермана с помощью тэта-функций с рациональными характеристиками. Здесь мы показываем реализацию этого алгоритма на примере формы $x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2$ ($k\geq 1$ — целое число).

Основными результатами работы являются следующие предложения.

Теорема 1. *Формула*

$$M[4m+1=x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2]=\frac{1}{2^k}M[4m+1=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2]+T_k(4m+1;3) \tag{1}$$

для количества представлений целого числа $4m+1$ квадратичной формой $x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2$ является формулой типа Клостермана.

Здесь

$$T_k(4m+1;3)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^{k-j}}\sum_{4m+1=x_1^2+4x_2^2+4^{j+1}x_3^2}(-1)^{x_3}. \tag{2}$$

Замечание. Формулу (2) можно записать также в виде

$$T_k(4m+1;3)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{2^{k-j}}\sum_{i=1}^{M_j}(-1)^{x_3^{i,j}},$$

где $M_j=M[4m+1=x_1^2+4x_2^2+4^{j+1}x_3^2]$, $x_3^{i,j}$ — последняя координата i-го представления (x_1^i,x_2^i,x_3^i) числа $4m+1$ квадратичной формой $x_1^2+4x_2^2+4^{j+1}x_3^2$.

Теорема 2. *При $k \geq 4$ квадратичных форм вида*

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 4^{k+1}x_3^2$$

типа Лиувилля не существует.

2. *Необходимые определения.* Пусть

$$Q(x_1, \ldots, x_{2k}) \tag{3}$$

— целочисленная положительная квадратичная форма от $2k$ ($k \geq 2$ — целое число) переменных ступени N. Отвечающий ей тэта-ряд представи́м в виде двух слагаемых

$$\sum_{x_1,\ldots,x_{2k}=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i \tau Q(x_1, \ldots, x_{2k})) = E_{2k}(\tau) + \theta_{2k}(\tau), \tag{4}$$

где τ — комплексное число, причем $\operatorname{Im}\tau > 0$, $E_{2k}(\tau)$ — ряд Эйзенштейна, соответствующий тэта-ряду, находящемуся в левой части равенства (4), $\theta_{2k}(\tau)$ — параболическая форма.

Определение 1 ([10]). Если в (4) $\theta_{2k}(\tau)$ можно представить в виде конечной линейной комбинации обобщенных бинарных тэта-рядов вида

$$\sum_{\substack{x_1,x_2=-\infty \\ x_r \equiv h_r \pmod N,\ r=1,2}}^{\infty} P_{k-1}(x_1, x_2) \exp\left(2\pi i \tau \frac{G_a(x_1, x_2)}{N_a^2}\right),$$

где $G_a(x_1, x_2)$ — целочисленная положительная квадратичная форма ступени N_a (N_a пробегает делители N), $P_{k-1}(x_1, x_2)$ — шаровая функция $(k-1)$-го порядка относительно $G_a(x_1, x_2)$; h_1, h_2 — целые числа с условиями

$$\frac{\partial}{\partial x_r} G_a(x_1, x_2) \equiv 0 \pmod{N_a} \quad (r = 1, 2), \quad x_1 = h_1, \ \ x_2 = h_2,$$

то квадратичную форму (3) называют формой Лиувилля, а формулу для количества представлений ею, вытекающую из (3), — формулой типа Лиувилля.

Определение 2 ([11]). Пусть $M[n = Q]$ — число представлений целого числа n формой Q,

$$M[n = Q(x_1, \ldots, x_k)] = \rho_k(n) + \psi_k(n),$$

где $k \geq 3$ (k нечетное), $\rho_k(n)$ — сумма сингулярного ряда Харди–Литтлвуда, соответствующая форме Q. Если $\psi_k(n)$ является линейной комбинацией выражений вида

$$\sum_{n=b_i x^2} f_i(x),$$

где $f_i(x)$ — некоторая числовая функция, b_i — делитель d, d — определитель формы Q, то квадратичную форму Q будем называть формой типа Лиувилля.

Определение 3 ([10], [12]). Если число представлений чисел данной положительно определенной квадратичной формой от n переменных ($n \geq 2$) равно сумме сингулярного ряда Харди–Литтлвуда, соответствующего данной форме (в случае бинарных форм берется $1/2$ сингулярного ряда), плюс дополнительный член, равный коэффициенту при q^n ($q = e^{\pi i \tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$) в разложении в ряд по степеням q (конечной) суммы произведений некоторых тэта-функций Якоби или тэта-функций с характеристиками, то квадратичную форму называют формой типа Клостермана, а формулу для количества представлений — формулой типа Клостермана.

3. *Основные леммы.* Доказательства теорем базируются на следующих четырех леммах.

Лемма 1. *Для любого натурального числа a имеет место формула*

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{a^2x^2} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{x^2} - \Bigg(\sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv 1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} + \cdots + \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv a-1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} \Bigg), \tag{5}$$

где $q = e^{\pi i \tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Лемма 1 доказывается разбиением множества целых чисел на классы эквивалентности по $\operatorname{mod} a$. Действительно, имеем

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{x^2} = \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv 0 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} + \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv 1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} + \cdots + \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv a-1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} =$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{(ax)^2} + \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv 1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} + \cdots + \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv a-1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2},$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Для любых натуральных чисел a_i $(i = 1, \ldots, n)$ имеет место формула*

$$\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n=-\infty \\ n\geq 1}}^{\infty} q^{a_1^2x_1^2+\cdots+a_n^2x_n^2} = \frac{1}{a_1\ldots a_n} \sum_{x_1,\ldots,x_n=-\infty}^{\infty} q^{x_1^2+\cdots+x_n^2} +$$

$$+ \prod_{i=1}^{n} \Bigg(\frac{1}{a_i} \sum_{x_i=-\infty}^{\infty} q^{x_i^2} + \frac{a_i-1}{a_i} \sum_{x_i=-\infty}^{\infty} q^{x_i^2} - \Bigg(\sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv 1 \pmod{a_i}}}^{\infty} q^{x^2} + \cdots + \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv a_i-1 \pmod{a_i}}}^{\infty} q^{x^2} \Bigg) \Bigg)', \tag{6}$$

где штрих означает, что в сумме полученных после перемножения множителей выбрасывается слагаемое

$$\frac{1}{a_1\ldots a_n} \sum_{x_1,\ldots,x_n=-\infty}^{\infty} q^{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

Лемма 2 является следствием леммы 1. В самом деле, формулу (5) перепишем в виде

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{a^2x^2} = \frac{1}{a} \sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{x^2} + \Bigg(\frac{a-1}{a} \sum_{x=-\infty}^{\infty} q^{x^2} - \Bigg(\sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv 1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} + \cdots + \sum_{\substack{x=-\infty \\ x\equiv a-1 \pmod a}}^{\infty} q^{x^2} \Bigg) \Bigg). \tag{7}$$

В (7) последовательно заменяя a на a_i $(i = 1, \ldots, n)$ и перемножая полученные формулы, после несложных вычислений будем иметь (6).

Лемма 3. *Для любого натурального числа k имеет место тождество*

$$\vartheta_3(0, q^{4^k}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \vartheta_3(0,q) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \vartheta_4(0,q) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \vartheta_4(0,q^4) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2} \vartheta_4(0,q^{4^2}) + \cdots + \tfrac{1}{2}\vartheta_4(0,q^{4^{k-1}}), \tag{8}$$

где $\vartheta_3(0,q) = \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} q^{x^2}$, $\vartheta_4(0,q) = \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} (-1)^x q^{x^2}$.

Доказательство. В формуле (6) полагаем $n = 1$, $a_1 = 2$, непосредственными вычислениями получаем

$$\vartheta_3(0,q^4) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,q) + \tfrac{1}{2}\vartheta_4(0,q),$$

что и доказывает формулу (8) при $k = 1$. Далее доказательство проводится методом математической индукции по k. $\square$

Лемма 4. *Справедливо тождество*

$$\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q)\vartheta_3(0,q^{4^k}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \vartheta_2(0,q)\vartheta_3^2(0,q) + \vartheta_2(0,q)\vartheta_3(0,q)\Big(\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \vartheta_4(0,q) + \\ + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \vartheta_4(0,q^4) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2} \vartheta_4(0,q^{4^2}) + \dots + \tfrac{1}{2}\vartheta_4(0,q^{4^{k-1}})\Big), \quad (9)$$

где $\vartheta_2(0,q) = \sum\limits_{x=-\infty}^{\infty} q^{(2x-1)^2/4}$.

Лемма 4 непосредственно вытекает из леммы 3. Действительно, подставляя (8) в выражение

$$\vartheta_2(0,q)\vartheta_3(o,q)\vartheta_3(0,q^{4^k}),$$

после несложных вычислений будем иметь (9).

4. Доказательство теоремы 1. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q в левой и правой частях тождества (9), получаем

$$M[4m+1 = x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2] = \frac{1}{2^k}M[4m+1 = x_1^2+4x_2^2+4x_3^2] + \frac{1}{2^k}\sum_{4m+1=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2}(-1)^{x_3} + \\ + \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{4m+1=x_1^2+4x_2^2+4^2x_3^2}(-1)^{x_3} + \dots + \frac{1}{2^2}\sum_{4m+1=x_1^2+4x_2^2+4^{k-1}x_3^2}(-1)^{x_3} + \frac{1}{2}\sum_{4m+1=x_1^2+4x_2^2+4^kx_3^2}(-1)^{x_3},$$

что и доказывает (2).

Покажем, что (1) является формулой типа Клостермана для квадратичной формы $x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2$. На основании результатов [10] имеем

$$M[n = 2^\alpha u = x_1^2+4x_2^2+4x_3^2] = \begin{cases} 4\Gamma_1(u), & \alpha=0, \quad u\equiv 1 \pmod 4; \\ 0, & \alpha=0, \quad u\equiv 3 \pmod 4; \\ 0, & \alpha=1; \\ 12\Gamma_1(2^{\alpha-2}u), & \alpha\ge 2. \end{cases} \quad (10)$$

По теореме Гаусса о трех квадратах [10]

$$M[n = x_1^2+x_2^2+x_3^2] = 12(2F_1(n)-G_1(n)) = 12\Gamma_1(n), \quad (11)$$

где $G_1(n)$ — число всех классов гауссовых положительных бинарных квадратичных форм с определителем n, $F_1(n)$ — число всех классов гауссовых положительных квадратичных форм с определителем n, у которых хотя бы один из крайних коэффициентов нечетный.

На основании работ Рамануджана–Харди–Ранкина [13], [14] и формулы (11) имеет место равенство

$$M[n = x_1^2+x_2^2+x_3^2] = 12(2F_1(n)-G_1(n)) = 12\Gamma_1(n) = H'(x_1^2+x_2^2+x_3^2;\, n). \quad (12)$$

На основании (10) получаем

$$M[u = x_1^2+4(x_2^2+x_3^2)] = 4\Gamma_1(u), \quad u\equiv 1 \pmod 4. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует

$$M[u = x_1^2+4(x_2^2+x_3^2)] = \frac{1}{3}H'(x_1^2+x_2^2+x_3^2;\, u).$$

Далее, из этой формулы и леммы 25 [4] имеем

$$M[u = x_1^2+4(x_2^2+x_3^2)] = H'(x_1^2+4(x_2^2+x_3^2); u).$$

Отсюда и из леммы 25 [4] следует

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^k H'(x_1^2+4(x_2^2+x_3^2)) = H'(x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2).$$

Таким образом, $\left(\frac{1}{2}\right)^k M[u = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2]$ является сингулярным рядом Харди–Литтлвуда, соответствующим квадратичной форме $x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2$, и формула (1) является формулой типа Клостермана. $\square$

Следствие. Полагая $k = 1$ в (1) и (2), получаем известную формулу [10] о числе представлений чисел квадратичной формой $x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2$, т. е.

$$M[4m + 1 = x_1^2 + 4x_2^2 + 16x_3^2] = 2\Gamma_1(4m + 1) + \frac{1}{2} \sum_{4m+1=(2x_1-1)^2} (-1)^{x_1-1}(2x_1 - 1).$$

Таким образом, из формулы типа Клостермана получили формулу типа Лиувилля.

Доказательство теоремы 2. Пусть при $k \geq 4$ имеем формулу типа Лиувилля

$$M[4m + 1 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4^{k+1}x_3^2] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k M[4m + 1 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2] + T_k(4m + 1),$$

где $T_k(4m + 1)$ на основании определения квадратичных форм Лиувилля является линейной комбинацией выражений вида

$$\sum_{4m+1=ax^2} f(x),$$

где $a = 1$ или a кратно 2 при $a > 1$.

Положим $4m + 1 = 5$. Тогда $\sum\limits_{4m+1=ax^2} f(x) = 0$, т. е. $\sum\limits_{5=ax^2} f(x) = 0$,

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^k M[5 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cdot 8 \leq \tfrac{1}{2}$$

при $k \geq 4$. Пришли к противоречию, т. к. целое число $M[4m + 1 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4^{k+1}x_3^2]$ не может равняться дробному числу.

Таким образом, доказано, что при $k \geq 4$ квадратичных форм $x_1^2+4x_2^2+4^{k+1}x_3^2$ типа Лиувилля не существует. $\square$

Эта теорема усиливает теорему 1.4.4 из [15] для квадратичных форм $x_1^2 + 4x_2^2 + 4^{k+1}x_3^2$.

Литература

1. Kloosterman H.D. *On the representation of numbers in the form* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ // Proc. London Math. Soc. – 1926. – V. 25. – P. 143–173.
2. Ломадзе Г.А. *О представлении чисел суммами квадратов* // Тр. Матем. ин-та АН Груз ССР. – Тбилиси, 1948. – Т. 16. – С. 231–275.
3. Ломадзе Г.А. *О представлении чисел суммами нечетного числа квадратов* // Тр. Матем. ин-та АН Груз ССР. – Тбилиси, 1949. – Т. 17. – С. 281–314.
4. Ломадзе Г.А. *О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными* // Тр. Тбилисск. ун-та. – 1959. – Т. 76. – С. 107–109.
5. Ломадзе Г.А. *О представлении чисел некоторыми тернарными квадратичными формами* // Тр. Матем. ин-та АН Груз ССР. – Тбилиси, 1960. – Т. 27. – С. 115–141.
6. Ломадзе Г.А. *О представлении чисел бинарными квадратичными формами* // Тр. Тбилисск. ун-та. – 1961. – Т. 84. – С. 285–290.
7. Ломадзе Г.А. *О представлении чисел положительными бинарными диагональными квадратичными формами* // Матем. сб. – 1965. – Т. 68. – № 2. – С. 282–312.
8. Ломадзе Г.А. *О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с шестью переменными.* I // Тр. Тбилисск. ун-та. – 1966. – Т. 117. – С. 7–43.
9. Ломадзе Г.А. *К арифметическому смыслу некоторых коэффициентов* // Сообщ. АН Груз ССР. – 1966. – Т. 41. – № 2. – С.257–263.
10. Коган Л.А. *О представлении целых чисел положительно определенными квадратичными формами.* – Ташкент: Фан, 1971. – 188 с.

11. Коган Л.А., Абдуллаев И. *Представление чисел квадратичными формами в связи с теорией эллиптических кривых.* – Ред. журн. “Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук”. – Ташкент, 1986. – 64 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.03.86, № 2166-В.
12. Ташпулатов Б.Т., Коган Л.А. *Представление чисел квадратичными формами.* – Ташкент: Фан, 1993. – 112 с.
13. Ramanathan K.G. *On the analytic theory of quadratic forms* // Acta arithm. – 1972. – T. 21. – S. 423–436.
14. Rankin R.A. *Sums of squares and cusp forms* // Amer. J. Math. – 1965. – V. 87. – № 4. – P. 857–860.
15. Коган Л.А., Ташпулатов Б.Т., Дусумбетов А.Д. *Представление чисел квадратичными формами.* – Ташкент: Фан, 1989. – 132 с.

Ташкентский государственный
педагогический институт

Поступила
19.09.1995