ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.956

Н.Ю. САТИМОВ, М. ТУХТАСИНОВ

ОБ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. В данной работе рассматриваются некоторые задачи теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами. При этом воздействия игроков на систему осуществляются с помощью управляющих параметров, входящих в правую часть уравнения. Управления игроков выбираются в виде функций, на которые накладываются различные ограничения, так называемые геометрические, интегральные и смешанные. Отметим в этом направлении исследования [1]–[14].

В первых трех играх целью первого игрока является приведение системы в невозмущенное состояние, в четвертой игре цель первого игрока — приведение системы и ее скорости в произвольную ℓ-окрестность нуля. Второй во всех играх имеет противоположную цель. Для возможности осуществления цели первого игрока за конечное время предложены достаточные условия (см. ниже). Для третьей игры рассмотрена и задача уклонения от встречи (см. п. 4, утверждение).

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциальный оператор A вида

$$Az = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial z}{\partial x_j}\Big), \quad x \in \Omega, \quad a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{1}$$

где Ω — ограниченная с кусочно-гладкой границей область в R^n. Областью определения $D(A)$ оператора A является $\overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций. Функции $a_{ij}(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяют следующим условиям: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \Omega$, существует константа $\gamma \neq 0$ такая, что при любых $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$ и $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma^2 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{2}$$

Пусть $(z, y)_A = (Az, y)$ для $z, y \in \overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$.

Можно убедиться, что $(\cdot,\cdot)_A$ — скалярное произведение, а $\overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$ — неполное гильбертово пространство. Пополнив его относительно нормы $\|z\|_A = \sqrt{(Az, z)}$, $z \in \overset{\circ}{C}{}^2(\Omega)$, получим полное гильбертово пространство, связанное с оператором A.

Известно, что оператор A при условии (2) имеет дискретный спектр, точнее, он имеет бесконечную последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ положительных неубывающих собственных чисел с пределом в бесконечности и последовательность обобщенных собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, которые составляют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$ ([15], с. 98).

Через $C(0, T; H_r(\Omega))$ $(L_2(0, T; H_r(\Omega)))$ обозначим пространство, состоящее из непрерывных (измеримых) функций, заданных на $[0, T]$, со значениями в $H_r(\Omega)$, где r — неотрицательное,

T — положительное числа, а

$$H_r(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) : f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty \right\}.$$

2. Пусть движение управляемой системы описывается следующим эволюционным уравнением второго порядка по времени:

$$\ddot{z}(t) + Az(t) = -u(t) + v(t), \quad 0 < t \le T, \tag{3}$$

где $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ $(\in L_2(0,T;H_r(\Omega)))$ — управляющие функции первого (преследующего) и второго (убегающего) игроков соответственно. Решение уравнения (3) удовлетворяет начальным условиям

$$z(0) = z^0, \quad \dot{z}(0) = z^1, \tag{4}$$

где $z^0 \in H_{r+1}(\Omega)$, $z^1 \in H_r(\Omega)$. В ([9], с. 137) доказано, что в $C(0,T;H_{r+1}(\Omega))$ существует единственная функция $z = z(t)$, $0 \le t \le T$, являющаяся решением задачи (3), (4) в смысле теории обобщенных функций (теории распределений).

В рассматриваемых далее играх G_1, G_2, G_3 и G_4 управляющие функции $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ стеснены ограничениями, определяемыми одной из следующих систем неравенств:

$$\|u(\cdot)\| \le \rho, \quad \|v(\cdot)\| \le \sigma;$$

$$\|u(t)\| \le \rho, \quad \|v(t)\| \le \sigma, \quad 0 \le t \le T;$$

$$\|u(\cdot)\| \le \rho, \quad \|v(t)\| \le \sigma, \quad 0 \le t \le T; \tag{5}$$

$$\|u(t)\| \le \rho, \quad 0 \le t \le T, \quad \|v(\cdot)\| \le \sigma, \tag{6}$$

соответственно, где ρ, σ — неотрицательные константы. Заметим, что $\|u(\cdot)\|$ и $\|u(t)\|$, $0 \le t \le T$, означают нормы в пространствах $L_2(0,T;H_r(\Omega))$ и $H_r(\Omega)$ соответственно.

Определение 1. Будем говорить, что в игре G_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, с начальной точкой $z_0 = (z^0, z^1)$ разрешима задача преследования, если существует положительное число $T = T(z_0)$ такое, что для любого управления $v(\cdot)$ убегающего игрока с соответствующим ограничением игры G_i и с известным в каждый момент $t \in [0,T]$ уравнением (3) и значением $v(t)$ можно построить значение $u(t)$ следующим образом:

1) $u(\cdot)$ удовлетворяет соответствующему ограничению игры G_i;

2) $z(t) = \dot{z}(t) = 0$ для игр G_1, G_2, G_3 и $\|z(t)\| \le \ell$, $\|\dot{z}(t)\| \le \ell$ для игры G_4 при некотором $t = t' \in (0,T]$, где $z(t)$, $0 \le t \le T$, — решение соответствующей задачи при управлениях $u(\cdot)$, $v(\cdot)$, а $\ell > 0$ — произвольная фиксированная константа.

Число $T(z_0)$ называется временем преследования.

Задача преследования заключается в нахождении множества начальных точек, из которых гарантируется завершение преследования.

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\mu_k^{r+1} z_k^0|^2 = a^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\mu^r z_k^1|^2 = b^2$, где a, b — неотрицательные константы, $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $[c]$ — целая часть числа c.

Допустим, что $\mu_1 \rho^2 > \sigma^2$. Тогда существуют число $T_0 > 0$ и функции $z^0 \in H_{r+1}(\Omega)$, $z^1 \in H_r(\Omega)$ такие, что

$$T_0 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{2(a^2 + b^2)}{(\rho - \sigma\sqrt{T_0})^2}. \tag{7}$$

3. Теорема. *Задача преследования для произвольного начального положения $z_0 = (z^0, z^1)$ разрешима в следующих случаях*:

1°. *если в игре* G_1 *выполнено неравенство*

$$\rho > \sigma, \tag{8}$$

при этом

$$T(z_0) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{2(a^2+b^2)}{(\rho-\sigma)^2}; \tag{9}$$

2°. *если в игре* G_2 *выполнено неравенство* (8) *и* $\mu_1 > 1$, *при этом*

$$T(z_0) = 2\pi\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\rho-\sigma}{2(\rho-\sigma)}\right] + 2\pi;$$

3°. *если в игре* G_3 *выполнено неравенство* $\mu_1\rho^2 > \sigma^2$ *и функции* $z^0 \in H_{r+1}(\Omega)$, $z^1 \in H_r(\Omega)$ *таковы, что выполнено условие* (7), *при этом* $T(z_0)$ *определяется из условия* (7);

4°. *если в игре* G_4 *константы* $\rho > 0$ *и* $\sigma \geq 0$.

Доказательство. 1°. Управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, представим в виде

$$u(t) = v(t) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{10}$$

где $w(t)$, $0 \leq t \leq T$, — неизвестная пока функция, удовлетворяющая неравенству $\|w(\cdot)\| \leq \rho - \sigma$.

Искомые $z(t)$ и $w(t)$ представим в виде

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\varphi_k, \; w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\varphi_k, \quad z_k(\cdot), w_k(\cdot) \in L_2(0,T), \quad k = 1,2,\ldots \tag{11}$$

Подставив (10) в уравнение (3), учитывая разложения (11) и приравнивая соответствующие коэффициенты, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{z}_k = -\lambda_k z_k - w_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{12}$$

с начальными условиями

$$z_k(0) = z_k^0, \quad \dot{z}_k(0) = z_k^1, \tag{13}$$

где $z_k^0 = (z^0, \varphi_k)$, $z_k^1 = (z^1, \varphi_k)$, $k = 1,2,\ldots$, — коэффициенты Фурье при разложении z^0 и z^1 по системе $\{\varphi_k\}$.

Интегрируя уравнение (12), с учетом начальных условий (13) имеем

$$\begin{aligned} z_k(t) &= z_k^0 \cos\mu_k t + \frac{z_k^1}{\mu_k}\sin\mu_k t - \frac{1}{\mu_k}\int_0^t \sin\mu_k(t-\tau)w_k(\tau)d\tau, \\ \dot{z}_k(t) &= -\mu_k z_k^0 \sin\mu_k t + z_k^1\cos\mu_k t - \int_0^t \cos\mu_k(t-\tau)w_k(\tau)d\tau, \quad k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{14}$$

Из (14), приравнивая нулю коэффициенты перед $\cos\mu_k t$ и $\sin\mu_k t$, для определения t и $w_k(\cdot)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\int_0^t \sin\mu_k\tau w_k(\tau)d\tau = -\mu_k z_k^0, \\ &\int_0^t \cos\mu_k\tau w_k(\tau)d\tau = z_k^1, \quad k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Соотношения (15) представляют собой проблему моментов ([10], с. 71). Для продолжения доказательства понадобится

Лемма 1. *При*

$$T(z_0) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{2(a^2+b^2)}{(\rho-\sigma)^2}$$

проблема моментов (15) *имеет решение.*

Действительно, согласно теореме 1 ([10], гл. 2, § 3) получим задачу: найти

$$\frac{1}{\Lambda_k} = \min_{\xi_1,\xi_2} \sqrt{\int_0^t |\xi_1 \sin\mu_k\tau + \xi_2 \cos\mu_k\tau|^2 d\tau}$$

при условии

$$-\mu_k z_k^0 \xi_1 + z_k^1 \xi_2 = 1,$$

где $t > \frac{1}{\mu_1}$. Имеем

$$\frac{1}{\Lambda_k} = \min_{\xi_1,\xi_2} \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\sqrt{\int_0^t \sin^2(\mu_k\tau+\alpha_k)d\tau} =$$

$$= \min_{\xi_1,\xi_2} \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\sqrt{1/2(t-(\sin 2(\mu_k t+\alpha_k) - \sin 2\alpha_k)/2\mu_k)}, \quad (16)$$

где $\alpha_k = \operatorname{arctg}\frac{\xi_2}{\xi_1}$. Так как $(\sin 2(\mu_k t+\alpha_k) - \sin 2\alpha_k)/2\mu_k \le 1/\mu_1$, то из (16) получим неравенство

$$\frac{1}{\Lambda_k} \ge \min_{\xi_1,\xi_2} \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\sqrt{1/2(t-1/\mu_1)}. \quad (17)$$

Легко показать, что оптимизационная задача $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} \to \min$ при условии $-\mu_k z_k^0\xi_1 + z_k^1\xi_2 = 1$ имеет решение

$$1/\sqrt{(\mu_k z_k^0)^2 + (z_k^1)^2}. \quad (18)$$

Таким образом, из (17) вытекает неравенство $\frac{1}{\Lambda_k} \ge \frac{1}{\sqrt{(\mu_k z_k^0)^2+(z_k^1)^2}}\sqrt{1/2(t-1/\mu_1)}$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^2 \le \frac{2(a^2+b^2)}{t-1/\mu_1}. \quad (19)$$

Подставляя вместо t в (19) значение $T(z_0)$ из (9), получим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^2 \le (\rho-\sigma)^2$. Значит, при $\Theta_k = (\sqrt{(\mu_k z_k^0)^2 + (z_k^1)^2}/\sqrt{a^2+b^2})(\rho-\sigma)$ проблема моментов (15) имеет решение $w_k(t)$, $0 \le t \le T(z_0)$, причем $\|w_k(\cdot)\| \le \Theta_k$.

Заметим, что $\|w(\cdot)\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2r}\|w_k(\cdot)\|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2r}\Theta_k^2 = (\rho-\sigma)^2$, т. е. $\|w(\cdot)\| \le \rho-\sigma$.

2°. Представим управление $u(t)$, $0 \le t \le T$, в виде $u(t) = v(t) + w(t)$, $0 \le t \le T$, где $w(\cdot)$ — неизвестная пока функция, удовлетворяющая условию $\|w(t)\| \le \rho-\sigma$, $0 \le t \le T$.

Тогда, решая задачу преследования, как и в п. 1°, приходим к проблеме моментов (15) при $|w_k(t)| \le \Theta_k$, $0 \le t \le T$, $k = 1, 2, \ldots$, где Θ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — некоторые неотрицательные числа (они выбираются ниже).

Лемма 2. *При* $T(z_0) = 2\pi m$, $m = [\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\rho-\sigma}{2(\rho-\sigma)}]+1$, *проблема моментов* (15) *имеет решение.*

Покажем, что проблема моментов (15) имеет решение при

$$|w_k(t)| \le \Theta_k = \sqrt{(\mu_k z_k^0)^2 + (z_k^1)^2}/(2m-1).$$

Используя теорему 1 из ([10], гл. 2, § 3), приходим к следующей задаче: найти

$$\frac{1}{\Lambda_k} = \min_{\xi_1,\xi_2} \int_0^T |\xi_1 \sin \mu_k \tau + \xi_2 \cos \mu_k \tau| d\tau$$

при условии $-\mu_k z_k^0 \xi_1 + z_k^1 \xi_2 = 1$. Отсюда $\frac{1}{\Lambda_k} = \min\limits_{\xi_1,\xi_2} \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} \int\limits_0^{2\pi m} |\sin(\mu_k \tau + \alpha_k)| d\tau$, где $\alpha_k = \operatorname{arctg} \frac{\xi_2}{\xi_1}$.

Не нарушая общности, предположим, что $0 \le \alpha_k < \pi$ и $\mu_k = n_k + \{\mu_k\}$, где $\{a\}$ — дробная часть числа a. Сделаем в интеграле

$$\int_0^{2\pi m} |\sin(\mu_k \tau + \alpha_k)| d\tau = \int_0^{2\pi m} |\sin((n_k + \{\mu_k\})\tau + \alpha_k)| d\tau \tag{20}$$

замену переменных $(n_k + \{\mu_k\})\tau + \alpha_k = n_k s$. Тогда имеем

$$\int\limits_0^{2\pi m} |\sin((n_k + \{\mu_k\})\tau + \alpha_k)| d\tau = \frac{n_k}{n_k + \{\mu_k\}} \int\limits_{\frac{\alpha_k}{n_k}}^{\frac{\alpha_k}{n_k} + \frac{n_k + \{\mu_k\}}{n_k} 2\pi m} |\sin n_k s| ds \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\alpha_k}{n_k}}^{2\pi m} |\sin n_k s| ds = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi m} |\sin n_k s| ds - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\alpha_k}{n_k}} |\sin n_k s| ds \ge \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi m} |\sin n_k s| ds -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n_k}} \sin n_k s ds = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi m} |\sin n_k s| ds - \frac{1}{n_k} \ge \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi m} |\sin n_k s| ds - 1 \ge 2m - 1.$$

Таким образом, имеем неравенство, связанное с ((18)),

$$\Lambda_k \le \frac{\sqrt{(\mu_k z_k^0)^2 + (z_k^1)^2}}{2m-1},$$

т. е. $\Lambda_k \le \Theta_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2r} \Theta_k^2 = \frac{a^2+b^2}{(2m-1)^2}$. Поэтому для каждого k проблема моментов (15) имеет решение при $|w_k(t)| \le \Theta_k$, $0 \le t \le T(z_0)$.

3°. Пусть выполнено неравенство $\mu_1 \rho^2 > \sigma^2$. Как отмечено выше, тогда существуют число $T_0 > 0$ и функции $z^0 \in H_{r+1}(\Omega)$, $z^1 \in H_r(\Omega)$ такие, что

$$T_0 = \frac{1}{\mu_1} + \frac{2(a^2+b^2)}{(\rho - \sigma\sqrt{T_0})^2}, \quad T_0 < \frac{\rho^2}{\sigma^2},$$

где $a^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\mu_k^{r+1} z_k^0|^2$, $b^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\mu_k^r z_k^1|^2$.

Покажем, что для начального положения $z_0 = (z^0, z^1)$ разрешима задача преследования, причем время преследования равно T_0.

Управление $u(t)$, $0 \le t \le T_0$, преследующего игрока представим в виде

$$u(t) = v(t) + w(t), \quad 0 \le t \le T_0, \tag{21}$$

где $\|w(\cdot)\| \le \rho - \sigma\sqrt{T_0}$. Из условий $\|v(\cdot)\| \le \sigma\sqrt{T_0}$, $\|w(\cdot)\| \le \rho - \sigma\sqrt{T_0}$ и (21) имеем

$$\|u(\cdot)\| = \|v(\cdot) + w(\cdot)\| \le \|v(\cdot)\| + \|w(\cdot)\| \le \sigma\sqrt{T_0} + \rho - \sigma\sqrt{T_0} = \rho,$$

т. е. управление $u(\cdot)$ удовлетворяет первому ограничению из (5).

Используя лемму 1, можно показать, что проблема моментов (15) имеет решение при

$$\|w_k(\cdot)\| \le \Theta_k = \Big(\sqrt{(\mu_k z_k^0)^2 + (z_k^1)^2}/\sqrt{a^2+b^2}\Big)(\rho - \sigma\sqrt{T_0}).$$

4°. Допустим, что управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ удовлетворяют условиям (6) и $\rho > 0$.

В данном случае для завершения игры преследователю достаточно знать положение игры $(z, \dot z)$ в дискретные моменты времени.

Введем фиктивного убегающего игрока с управлением $w(t)$, $t \ge 0$, так, что $w(t) = 0$ почти для всех $t \ge 0$. Предположим, что это управление присутствует в правой части уравнения (3).

В дальнейшем преследователь борется только против фиктивного убегающего, не обращая внимания на второго убегающего игрока, у которого могут быть еще ненулевые ресурсы. Напомним, что преследователь стремится к тому, чтобы неравенства $\|z(t)\| \le \ell$, $\|\dot z(t)\| \le \ell$ были выполнены при некотором $t = t'$, а убегающие стремятся нарушить хотя бы одно из этих неравенств.

Из результатов п. 2° следует, что преследователь, борясь против фиктивного убегающего, переводит состояние $(z, \dot z)$ за время $T(z_0) = 2\pi m$ (при $\sigma = 0$), причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k z_k^0|^2 = a^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |z_k^1|^2 = b^2,$$

в положение

$$\begin{aligned} z_k(T_0) &= \frac{1}{\mu_k}\int_0^{T_0} \sin\mu_k(T_0-\tau)v_k(\tau)d\tau, \\ \dot z_k(T_0) &= \int_0^{T_0} \cos\mu_k(T_0-\tau)v_k(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{22}$$

где $T_0 = T(z_0)$.

Отсюда в силу (22)

$$\|z(T_0)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k^{r+1} z_k(T_0)|^2 \le T_0\sigma_1^2, \quad \|\dot z(T_0)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k^r \dot z_k(T_0)|^2 \le T_0\sigma_1^2, \tag{23}$$

где $\sigma_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k^{2r} \int\limits_0^{T_0} |v_k(\tau)|^2 d\tau = \int\limits_0^{T_0} \|v(\tau)\|^2 d\tau$.

Если $T_0\sigma_1^2 \le \ell^2$, то теорема доказана ((23)). В противном случае имеем $\ell^2 \le T_0\sigma_1^2 \le T_0\sigma^2$.

Далее, заметим, что, оставляя в силе утверждение леммы 2, числа a^2 и b^2 можно заменить на числа, большие чем $\|z^0\|^2$ и $\|z^1\|^2$ соответственно. При этом гарантированное время $T(z_0)$ завершения преследования лишь увеличивается. Аналогично этому число ρ можно заменить на число ρ_1, где $0 < \rho_1 \le \rho$.

Учитывая эти замечания, выберем числа ρ_1, a и b так, чтобы были выполнены следующие условия:

1) $a^2 = b^2 = T_1\sigma^2$, где $T_1 = \big((\sqrt{2}\pi\sigma + \sqrt{2(\pi\sigma)^2 + 12\pi\rho_1^2})/2\rho_1\big)^2$, $0 < \rho_1 \le \rho$;

2) $\frac{\pi\sigma^2+\rho_1^2+\sigma\sqrt{(\pi\sigma)^2+6\pi\rho_1^2}}{2\rho_1^2} = N$, где N — целое число такое, что

3) $N \ge [(\sqrt{\|z^0\|^2 + \|z^1\|^2} + \rho)2\rho]$.

Последнее неравенство означает, что $T_1 \ge T_0$, т. е. начиная со второго шага, время, затрачиваемое для завершения преследования фиктивного убегающего, не меньше, чем первоначальное время T_0.

Таким образом, $\|z(T_0)\|^2 \le T_1\sigma^2$ и $\|\dot z(T_0)\|^2 \le T_1\sigma^2$. Кроме того, легко показать, что $T_1 = \pi(\sqrt{a^2+b^2} + \rho_1)\rho_1 + 2\pi$, где a и b определяются из условия 1).

Отсюда, имея ввиду 1), 2), получим $T_1 = 2\pi(N+1)$. Следовательно, на втором шаге преследователь, действуя против фиктивного убегающего, за время $T_0 + T_1$ переводит состояние системы

в положение $z(T_0+T_1)$, $\dot z(T_0+T_1)$, для которого выполнены неравенства $\|z(T_0+T_1)\|^2 \le T_1\sigma_2^2$, $\|\dot z(T_0+T_1)\|^2 \le T_1\sigma_2^2$, где $\sigma_2^2 = \int\limits_{T_0}^{T_0+T_1} \|v(\tau)\|^2 d\tau$.

Если $T_1\sigma_2^2 < \ell^2$, то теорема доказана, иначе $\ell^2 \le T_1\sigma_2^2 \le T_1\sigma^2$. Тогда в силу последних предположений получим $\sigma_1^2+\sigma_2^2 \ge \ell^2(\frac{1}{T_0}+\frac{1}{T_1})$.

Повторив далее предыдущие рассуждения M раз, получим неравенство

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_{M+1}^2 \ge \ell^2\left(\frac{1}{T_0}+\frac{M}{T_1}\right). \tag{24}$$

Заметим, что в левой части неравенства (24) фиксированное число (σ^2), а в его правой части, из-за произвольности M, сколь угодно большое число.

Если в качестве гарантированного времени завершения преследования выбрать число $T = T_0+MT_1$, где M — первое целое число, для которого нарушается неравенство (24), то приходим к противоречию, доказывающему теорему.

4. В этом разделе для игры G_3 изучается задача уклонения от встречи.

Определение 2. В игре G_3 возможно уклонение от встречи (с точкой нуль) из начального положения z_0, $z_0 \ne 0$, если для любого $T > 0$ можно построить такую функцию $v(t)$, $0 \le t \le T$, $v(\cdot) \in L_2(0,T;H_r(\Omega))$, $\|v(t)\| \le \sigma$, что для произвольной функции $u(t)$, $0 \le t \le T$, $u(\cdot) \in L_2(0,T;H_r(\Omega))$, $\|u(\cdot)\| \le \rho$, решение $z(t)$, $0 \le t \le T$, задачи (3), (4) и его производная $\dot z(t)$, $0 \le t \le T$, одновременно в нуль не обращаются. При этом для нахождения значения $v(t)$ функции $v(\cdot)$ используется лишь z_0.

Пусть $Z = X \bigcup Y$, где

$$X = \bigcup_{k\ge1} X_k, \quad Y = \bigcup_{k\ge1} Y_k,$$

$$X_k = \left\{z_0 = (z^0, z^1) : z_i^0 = 0,\ i \ne k,\ |z_k^0| > \frac{\rho\sqrt{T}}{\mu_k^{r+1}},\ z^1 \in H_r(\Omega)\right\},$$

$$Y_k = \left\{z_0 = (z^0, z^1) : z^0 \in H_{r+1}(\Omega),\ z_i^1 = 0,\ i \ne k,\ |z_k^1| > \frac{\rho\sqrt{T}}{\mu_k^{r}}\right\}. \tag{25}$$

Утверждение. В игре G_3 для произвольного начального положения $z_0 \in Z$ возможно уклонение от встречи.

Доказательство. Пусть z_0 — произвольное начальное положение, $z_0 \in Z$. Для определенности допустим, что $z_0 \in X$ (в случае, когда $z_0 \notin X$, $z_0 \in Y$, рассуждения проводятся аналогично). Считая $v(\cdot) = 0$ в (10), для решения $z(t)$, $0 \le t \le T$, получим (ср. (12))

$$\ddot z_k(t) = -\lambda_k z_k(t) - u_k(t), \quad z_k(0) = z_k^0, \quad \dot z_k(0) = z_k^1,$$

где $u_k(t) = (u(t), \varphi_k)$. Пусть $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_k & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Легко убедиться, что

$$e^{-tC}\begin{pmatrix} z_k(t) \\ \dot z_k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_k^0 + \frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^t \sin\mu_k s\cdot u_k(s)ds \\ z_k^1 - \int\limits_0^t \cos\mu_k s\cdot u_k(s)ds \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Ясно, что если $z(t) = \dot z(t) = 0$ при некотором $t = t' \in [0,T]$, то и $z_k(t') = \dot z_k(t') = 0$. Но тогда и $\delta(t') = z_k^{(0)} + \frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^{t'} \sin\mu_k s\cdot u_k(s)ds = 0$ ((26)).

С другой стороны ((26)),

$$|\delta(t')| \geq |z_k^0| - \frac{1}{\mu_k}\int_0^{t'} |u_k(s)|ds. \tag{27}$$

В силу неравенства Коши–Буняковского $\int\limits_9^{t'} |u_k(s)|ds \leq \sqrt{T}\frac{\rho}{\mu_k^r}$. Следовательно ((27)), $0 = |\delta(t')| \geq |z_k^0| - \frac{\rho\sqrt{T}}{\mu_k^{r+1}}$, что противоречит определению множества X_k ((25)).

Таким образом, при предложенном выше выборе функции $v(\cdot)$ оказалось возможным уклонение от встречи из произвольного начального положения $z_0 \in Z$. $\square$

5. Пример. Пусть упругая струна единичной длины с закрепленными концами подвергается поперечному колебанию около своего положения равновесия. Тогда имеем задачу (3), (4) с

$$Az = -\frac{d^2z}{dx^2},$$

где областью определения оператора A является подпространство $\overset{\circ}{C}{}^2(0,1)$ пространства $L_2(0,1)$. Начальные функции z^0, z^1 выберем в виде

$$z^0 = \frac{1}{48\sqrt{2}}\begin{cases} -4x^3 + 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ -4(1-x)^3 + 3(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$z^1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Известно ([15], с. 69), что энергетическим пространством оператора A является пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Собственными функциями и собственными числами оператора A являются $\varphi_k = \sqrt{2}\sin\pi kx$, $0 \leq x \leq 1$, $\lambda_k = (\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ С помощью этих данных построим пространства $H_r(0,1)$, $r \geq 0$.

Непосредственным вычислением можно показать, что коэффициенты Фурье функций z^0 и z^1 имеют вид

$$z_k^0 = \begin{cases} \frac{1}{(\pi k)^4} & \text{при нечетном } k, \\ 0 & \text{при четном } k, \end{cases} \qquad z_k^1 = \begin{cases} \frac{1}{(\pi k)^3} & \text{при нечетном } k, \\ 0 & \text{при четном } k. \end{cases}$$

Заметим, что

$$a^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 (z_k^0)^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(2l-1)^2} = \frac{1}{8}, \quad b^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (z_k^1)^2 = \frac{1}{8}.$$

Отсюда $z^0 \in H_3(0,1)$, $z^1 \in H_2(0,1)$. При $\rho = 3$, $\sigma = 1$ для рассматриваемых игр выполнены все условия пп. 1°–4° теоремы. Поэтому в играх G_1, G_2, G_3 и G_4 для начального положения $z_0 = (z^0, z^1)$ разрешима задача преследования. При этом в играх G_1 и G_2 гарантированным временем преследования служат числа $T(z_0) = (2+\pi)/2\pi$, $T(z_0) = 2\pi$, соответственно (см. (8), п. 2° теоремы). Это означает, что струна приводится за каждое из этих времен в невозмущенное состояние из заданного начального положения z_0.

Для игры G_4 в качестве ρ_1 $(0 < \rho_1 \leq 3)$ выберем $\rho_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3\pi}$. Тогда имеем $T_0 = 2\pi$, $T_1 = 6\pi$ и $N = 2$.

Целое число M, для которого нарушается неравенство (24), можно выбрать в виде $M = \max\{[(6\pi)/l^2 - 3], 0\} + 1$.

Таким образом, гарантированным временем преследования в рассматриваемой игре G_4 является число $T(z_0) = (2 + 6M)\pi$.

Литература

1. Ильин В.А.,Тихомиров В.В. *Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса* // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 5. – С. 692–704.
2. Ильин В.А. *Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 11. – С. 1513–1528.
3. Ильин В.А. *Граничное управление процессом колебаний струны на одном ее конце при закрепленном втором конце и при условии существования конечной энергии* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 378. – № 6. – С. 743–747.
4. Осипов Ю.С. *К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами* // ДАН СССР. – 1975. – Т. 223. – № 6. – С. 1314–1317.
5. Осипов Ю.С. *Позиционное управление в параболических системах* // ПММ. – 1977. – Т. 41. – № 2. – С. 195–201.
6. Осипов Ю.С., Охеизин С.П. *К теории позиционного управления в гиперболических системах* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 233. – № 4. – С. 551–554.
7. Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* – М.: Мир, 1972. – 415 с.
8. Черноусько Ф.Л. *Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами* // ПММ. – 1992. – Т. 56. – № 5. – С. 810–826.
9. Авдонин С.А., Иванов С.А. *Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент.* – Киев: УМКВО, 1989. – 244 с.
10. Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами.* – М.: Наука, 1975. – 568 с.
11. Никольский М.С. *О задаче преследования при различных ограничениях на управления догоняющего и убегающего* // Теория оптимальных решений. – Киев: 1975. – С. 59–66.
12. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б., Ибрагимов Г. *Об одной дифференциальной игре многих лиц с интегральными ограничениями* // Актуальные вопросы теории оптимального управления и дифференциальных игр. – Ташкент: Фан, 1999. – С. 89–94.
13. Тухтасинов М. *О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами* // ПММ. – 1995. – Т. 59. – № 6. – С. 979–984.
14. Ибрагимов Г. *Об одной задаче оптимального преследования в системах с распределенными параметрами* // ПММ. – 2002. – Т. 66. – № 5. – С. 753–759.
15. Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных.* – М.: Высш. школа, 1977. – 431 с.

Национальный университет
Узбекистана

Поступили
первый вариант 18.06.2004
окончательный вариант 08.06.2006