И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.934

А.Г. ИВАНОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА

1. Обозначим через $B(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ и $S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$, $\mathfrak{Y}\subset\mathbb{R}^n$, совокупность почти периодических (п. п.) по Бору, соответственно по Степанову, функций $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{Y}$ [1]. Напомним, что для каждой п. п. (как по Бору, так и по Степанову) функции f существует среднее $M\{f(t)\}\doteq\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt$ и, если $\Lambda(f)$ — множество показателей Фурье п. п. функции f, то $\mathrm{Mod}(f)\doteq\mathrm{Mod}(\Lambda(f))$ — ее модуль, т. е. наименьшая группа по сложению, содержащая множество $\Lambda(f)$. В дальнейшем (Ω,ρ) — компактное метрическое пространство и $B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{Y})$ — совокупность отображений

$$(t,\omega)\mapsto f(t,\omega)\in\mathfrak{Y},\quad (t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega, \tag{1.1}$$

которые п. п. по t в смысле Бора равномерно по $\omega\in\Omega$ [2]. Далее будем говорить, что отображение (1.1) п. п. по $t\in\mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $\omega\in\Omega$ (пишем $f\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{Y})$), если оно удовлетворяет одновременно следующим условиям: $f(\cdot,\omega)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{Y})$ при каждом ω и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{d}_\gamma[f,\Omega]=0$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[f,\Omega]\doteq\sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega\\ \rho(\omega_1,\omega_2)\le\gamma}} d(f(\cdot,\omega_1),f(\cdot,\omega_2)) \tag{1.2}$$

(определение метрики d см. в [1]). Если $f\in B(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{Y})$ (или $f\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathfrak{Y})$), то множество $\Lambda(f)\doteq\bigcup\limits_{\omega\in\Omega}\Lambda(f(\cdot,\omega))$ назовем множеством показателей Фурье отображения f.

Введем теперь мерозначные п. п. функции. С этой целью обозначим через $(\mathrm{frm}(U),|\cdot|_w)$ (см. [3]) нормированное пространство таких мер Радона на $\mathbb{R}^m$, носитель которых содержится во множестве $U\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, и через $\mathrm{rpm}(U)$ — его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона. В дальнейшем $\mathrm{DIR}(U)$ — совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u\in U$, и $\mathcal{M}=\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathrm{frm}(U))$ — множество таких измеримых отображений $\mu:\mathbb{R}\to(\mathrm{frm}(U),|\cdot|_w)$, что $\|\mu\|\doteq\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}|\mu(t)|(U)<\infty$ ($|\mu(t)|(U)$ — вариация меры $\mu(t)$). Пусть далее $\mathfrak{B}_n=\mathfrak{B}(\mathbb{R}\times U,\mathbb{R}^n)$ — совокупность отображений $\varphi:\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих следующим условиям: при почти всех (п. в.) $t\in\mathbb{R}$ $\varphi(t,\cdot)\in C(U,\mathbb{R}^n)$, для каждого $u\in U$ отображение $t\mapsto\varphi(t,u)\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, измеримо и существует такая функция $\psi_\varphi\in L_1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\max\limits_{u\in U}|\varphi(t,u)|\le\psi_\varphi(t)$. Несложно показать, что отображение $\varphi\mapsto\|\varphi\|_{\mathfrak{B}_n}\doteq\int\limits_{\mathbb{R}}\max\limits_{u\in U}|\varphi(t,u)|dt$, $\varphi\in\mathfrak{B}_n$, является нормой в $\mathfrak{B}_n$, и незначительным изменением схемы доказательства теоремы Данфорда–Петтиса ([3], с. 299) можно показать, что $\mathcal{M}\cong\mathfrak{B}_1^*$. Это позволяет [4]–[6] ввести в $\mathcal{M}$ норму $\|\cdot\|_w$, относительно которой множества $\mathcal{M}_1\doteq\mathcal{M}(\mathbb{R},\mathrm{rpm}(U))$ и $\Sigma_1\doteq\{\mu\in\mathcal{M}:\|\mu\|\le 1\}$ компактны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97-01-00413 и 99-01-00454) и Конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 97-0-1.9).

Определение 1.1 [4]. Отображение $\mu \in \mathcal{M}$ называется п. п. по Степанову, если для любой функции $c \in C(U, \mathbb{R})$ отображение

$$t \mapsto \langle \mu(t), c(u) \rangle \doteq \int_U c(u)\mu(t)(du)$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Совокупность всех п. п. по Степанову отображений из $\mathcal{M}$ обозначим APM, и $\mathrm{APM}_1 \doteq \mathrm{APM} \cap \mathcal{M}_1$. Далее, через $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ обозначим совокупность $\mu \in \mathrm{APM}_1$ таких, что $\mu(t) = \delta_{u(t)}$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и некотором измеримом отображении $u : \mathbb{R} \to U$. Можно показать, что $S(\mathbb{R}, U) \cong \mathrm{APM}_1^{(1)}$, и, следовательно, каждое $u(\cdot) \in S(\mathbb{R}, U)$ можно рассматривать как элемент множества $\mathrm{APM}_1^{(1)} \subset \mathrm{APM}$, отождествляя его с отображением $t \to \delta_{u(t)} \in \mathrm{DIR}(U)$. Каждому $\mu \in \mathrm{APM}$ можно однозначно поставить в соответствие мерозначный ряд Фурье [4]–[6] и определить множество $\Lambda(\mu)$ его показателей Фурье, и $\mathrm{Mod}(\mu) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\mu))$, если $\mu \in \mathrm{APM}$.

Определение 1.2. Отображение $(t, \omega) \to \mu(t, \omega) \in \mathrm{frm}(U)$ называется п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Степанова равномерно по $\omega \in \Omega$ (пишем $\mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{frm}(U))$), если для каждой функции $c \in C(U, \mathbb{R})$ отображение

$$(t, \omega) \to \langle \mu(t, \omega), c(u) \rangle \doteq \int_U c(u)\mu(t, \omega)(du)$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R})$.

Из определений 1.1 и 1.2 вытекает, что $\mu(\cdot, \omega) \in \mathrm{APM}$ при каждом $\omega \in \Omega$. Поэтому следующее множество $\Lambda(\mu) = \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} \Lambda(\mu(\cdot, \omega))$ естественно назвать множеством показателей Фурье отображения $\mu \in S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathrm{rpm}(U))$, а множество $\mathrm{Mod}(\mu) \doteq \mathrm{Mod}(\Lambda(\mu))$ — его модулем.

В дальнейшем каждую функцию g из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}))$ представляем в виде отображения $(t, u) \mapsto g(t, u) \in \mathbb{R}, (t, u) \in \mathbb{R} \times U$, и через $S(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких функций g из $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}))$, что для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_S(f, \varepsilon) \doteq \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u \in U} |g(s + \tau, u) - g(s, u)| ds \le \varepsilon \right\}$$

относительно плотно. Отметим, что $S(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R})) \subset S(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R})$.

Лемма 1.1. *Если $g \in S(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}))$, то $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \Big(\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} w_\gamma[g(s, \cdot), U] ds \Big) = 0$, где $w_\gamma[g(s, \cdot), U]$ — γ-колебание функции $u \mapsto g(s, u)$ на множестве U.*

Доказательство. Так как $g \in S(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}))$, то для заданного $\varepsilon > 0$ множество $E_S(f, \varepsilon/3)$ относительно плотно и, следовательно, найдется такое $l > 0$, что при каждом $t \in \mathbb{R}$ существует $\tau \in [-t, -t + l] \cap E_S(g, \varepsilon/3)$. Поэтому при каждом $t \in \mathbb{R}$

$$\int_t^{t+1} w_\gamma[g(s, \cdot), U] ds \le 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \max_{u \in U} |g(s + \tau, u) - g(s, u)| ds + \mathfrak{f}(\gamma) < 2\varepsilon/3 + \mathfrak{f}(\gamma) < 2,$$

где $\mathfrak{f}(\gamma) \doteq \int\limits_0^{l+1} w_\gamma[g(s, \cdot), U] ds$. Используя теорему, приведенную в ([3], с. 158), несложно показать, что $\lim\limits_{\gamma \downarrow 0} \mathfrak{f}(\gamma) = 0$. Отсюда совместно с приведенными выше соотношениями получаем нужное равенство. $\square$

Теорема 1.1. *Пусть (Ω, ρ) — компактное метрическое пространство, множество $\mathfrak{A} \doteq \{\mu(\cdot, \omega), \omega \in \Omega\} \subset APM_1$ и равностепенно п. п.*[1]*. Тогда для любой функции $g \in S(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R}))$*

[1] т. е. для каждой функции $c \in C(U, \mathbb{R})$ совокупность отображений $\{\langle \mu(\cdot, \omega), c(u) \rangle, \omega \in \Omega\} \subset S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ равностепенно п. п.

совокупность отображений $\{t \mapsto f(t,\omega) \doteq \langle \mu(t,\omega), g(t,u)\rangle, \omega \in \Omega\}$, *где*

$$\langle \mu(t,\omega), g(t,u)\rangle \doteq \int_U g(t,u)\mu(t,\omega)(du),$$

принадлежит $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и является равностепенно п. п. Кроме того, если* $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(U))$, *то функция* $(t,\omega) \mapsto f(t,\omega)$ *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R})$, *и ее модуль содержится в* $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g))$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы 1.1 можно доказать, следуя схеме доказательства теоремы 3.1 из [7] (см. также [5]). Докажем второе утверждение. Так как $g \in S(\mathbb{R}, C(U,\mathbb{R}))$, то по лемме 1.1 для заданного $\varepsilon{>}0$ найдется такое $\gamma{>}0$, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} w_\gamma[g(s,\cdot),U]ds < \varepsilon/6$. Пусть, далее, $\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_p$ — такое открытое покрытие компакта U, что $\max\limits_{1\le j\le p}(\mathrm{diam}\,\mathcal{U}_j) \le \gamma$, и через $\{\alpha_j\}_{j=1}^p$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь для каждого $j=1,\dots,p$ фиксируем точку $u_j \in U\cap\mathcal{U}_j$, в которой $\alpha_j(u_j)>0$, и рассмотрим отображение $(t,\omega)\mapsto\lambda_j(t,\omega) \doteq \langle\mu(t,\omega),\alpha_j(u)\rangle \in [0,1]$, $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$. Так как $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$, то (см. определение 1.2) $\lambda_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R})$ при каждом $j=1,\dots,p$ и, кроме того, $\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j(t,\omega)=1$, $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$. Далее, для каждой функции $g(\cdot,u_j)\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $j=1,\dots,p$, возьмем такую функцию $\mathfrak{f}_j \in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (см. [1], с. 231), что $\mathrm{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |\mathfrak{f}_j(t)| \doteq \mathfrak{k}_j < \infty$ и $d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{f}_j(\cdot)) < \varepsilon/3p$. Поскольку $\lambda_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R})$, $j=1,\dots,p$, то найдется такое $\widehat{\gamma}\in(0,\gamma)$, что при всех $\beta\in(0,\widehat{\gamma})$ будет выполнено неравенство (см. (1.2)) $\mathfrak{d}_\beta[\lambda_j,\Omega] < \varepsilon/3p\mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k} \doteq \max\limits_{1\le j\le p}\mathfrak{k}_j$. Тогда при этих β получаем

$$\mathfrak{d}_\beta[f,\Omega] \le 2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} w_\gamma[g(s,\cdot),U]ds + \sum_{j=1}^p d(g(\cdot,u_j),\mathfrak{f}_j(\cdot)) + \mathfrak{k}\sum_{j=1}^p \mathfrak{d}_\beta[\lambda_j,\Omega] < \varepsilon.$$

Отсюда и из утверждения первой части теоремы 1.1 (см. определение 1.2) вытекает, что $f \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R})$. Доказательство, что модуль функции f содержится в $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g))$, аналогично доказательству соответствующего утверждения в теореме 3.1 из [7]. $\square$

Лемма 1.2. *Функция* $u \in S(\mathbb{R}\times\Omega,U)$ *в том и только том случае, если отображение* $(t,\omega)\mapsto\delta_{u(t,\omega)}$ *принадлежит* $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$ *и их модули совпадают.*

Доказательство вытекает из определения пространства $S(\mathbb{R}\times\Omega,U)$ и неравенства (см. (1.2))

$$\sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega\\ \rho(\omega_1,\omega_2)\le\gamma}} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1} |c(u(s,\omega_1)) - c(u(s,\omega_2))|ds\right) \le \frac{2}{\sigma}\|c\|_{C(U,\mathbb{R})}\cdot\mathfrak{d}_\gamma[u,\Omega] + w_\sigma[c,U],$$

справедливого для каждой функции $c\in C(U,\mathbb{R})$ и фиксированных констант $\sigma,\gamma>0$, где $w_\sigma[c,U]$ — σ-колебание функции $c(\cdot)$ на множестве U.

Из леммы 1.2 и теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.1. Пусть $g\in S(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R}))$ и $u\in S(\mathbb{R}\times\Omega,U)$. Тогда отображение $(t,\omega)\mapsto g(t,u(t,\omega))$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R})$, и его модуль содержится в $\mathrm{Mod}(\Lambda(g)\cup\Lambda(u))$.

Следствие 1.2. Пусть отображение $g:\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}$ принадлежит либо пространству $S(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R}))$, либо $B(\mathbb{R}\times U,\mathbb{R})$. Тогда для всякого $\mu\in\mathrm{APM}_1$ и $u\in S(\mathbb{R},U)$ функции $t\mapsto\langle\mu(t),g(t,u)\rangle$, $t\mapsto g(t,u(t))$ принадлежат пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, и их модули содержатся в $\mathrm{Mod}(\Lambda(\mu)\cup\Lambda(g))$ и $\mathrm{Mod}(\Lambda(g)\cup\Lambda(u))$ соответственно.

Целью данной работы является

Теорема 1.2. *Пусть* (Ω,ρ) *— компактное метрическое пространство, функция* $c\in C(U,\mathbb{R}^n)$ *и отображение* $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$ *такое, что при каждом* $\omega\in\Omega$ *уравнение*

$$\dot{x} = \langle\mu(t,\omega),c(u)\rangle, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

имеет п. п. по Бору решение $x(t,\omega)=\int\limits_0^t\langle\mu(s,\omega),c(u)\rangle ds$, $t\in\mathbb{R}$. *Тогда существует такая последовательность функций* $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}\subset S(\mathbb{R}\times\Omega,U)$, *что* $\mathrm{Mod}(v_i)\subset\mathrm{Mod}(\mu)$ *при каждом* $i\in\mathbb{N}$, *и уравнение* $\dot{x}=c(v_i(t,\omega))$, $t\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$, *имеет п. п. по Бору решение* $x_i(t,\omega)=\int\limits_0^t c(v_i(s,\omega))ds$, $t\in\mathbb{R}$. *При этом множество функций* $\{x_i(\cdot,\omega),i\in\mathbb{N},\omega\in\Omega\}\subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ *ограничено и*

$$\lim_{i\to\infty}(\sup_{\omega\in\Omega}M\{|x(t,\omega)-x_i(t,\omega)|\})=0.$$

Доказательству теоремы 1.2 предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

2. Имеет место

Теорема 2.1. *Пусть* (Ω,ρ) — *компактное метрическое пространство. Тогда для каждого отображения* $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$ *существует последовательность функций* $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ *из пространства* $S(\mathbb{R}\times\Omega,U)$, *для которой* $\mathrm{Mod}(u_j)\subset\mathrm{Mod}(\mu)$ *при всех* $j\in\mathbb{N}$ *и которая обладает следующими свойствами*: 1) *имеет место равенство* $\lim\limits_{j\to\infty}(\sup\limits_{\omega\in\Omega}\|\mu(\cdot,\omega)-\delta_{u_j(\cdot,\omega)}\|_w)=0$; 2) *при каждом* $j\in\mathbb{N}$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Bigg(\sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega\\ \rho(\omega_1,\omega_2)\le\gamma}}\Bigg(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}|\delta_{u_j(s,\omega_1)}-\delta_{u_j(s,\omega_2)}|(U)\Bigg)\Bigg)ds=0;$$

3) *для всякой функции* $g\in S(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R}))$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_t^{t+1}\langle\mu(s,\omega)-\delta_{u_j(s,\omega)},g(s,u)\rangle ds\right|\underset{\omega\in\Omega}{\rightrightarrows}0\ \ \text{при}\ \ j\to\infty,$$
$$M\{g(t,u_j(t,\omega))\}\underset{\omega\in\Omega}{\rightrightarrows}M\{\langle\mu(t,\omega),g(t,u)\rangle\}\ \ \text{при}\ \ j\to\infty.$$

Доказательство теоремы 2.1, а также доказательство нижеприводимой леммы 2.1, аналогичны доказательствам соответствующих утверждений, приведенных в [5], для отображения $(t,\omega)\mapsto\mu(t,\omega)\in\mathrm{rpm}(U)$ такого, что (ср. с определением 1.2) для каждой функции $c\in C(U,\mathbb{R})$ отображение $(t,\omega)\mapsto\langle\mu(t,\omega),c(u)\rangle$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R}))$. Поэтому приведем лишь кратко необходимую в дальнейшем конструкцию функций $u_j(\cdot)$ из теоремы 2.1.

Для каждого $j\in\mathbb{N}$ строим такое открытое покрытие $\mathcal{U}_1^{(j)},\dots,\mathcal{U}_{p_j}^{(j)}$ компакта U, что $\max\limits_{1\le k\le p_j}(\mathrm{diam}\,\mathcal{U}_k^{(j)})\le 1/j$, и через $\{\alpha_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}$ обозначим непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Теперь для каждого $k=1,\dots,p_j$ фиксируем точку $u_k^{(j)}\in U\cap\mathcal{U}_k^{(j)}$, в которой $\alpha_k^{(j)}(u_k^{(j)})>0$, и рассмотрим функцию $(t,\omega)\mapsto\lambda_k^{(j)}(t,\omega)\doteq\langle\mu(t,\omega),\alpha_k^{(j)}(u)\rangle\in[0,1]$, $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$. Так как $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$, то (см. определение 1.2) $\{\lambda_k^{(j)}\}_{k=1}^{p_j}\subset S(\mathbb{R}\times\Omega,[0,1])$ и при этом $\sum\limits_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t,\omega)=1$, $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$. При каждом $j\in\mathbb{N}$ введем отображение $(t,\omega)\to\Delta_j(t,\omega)\doteq\sum\limits_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t,\omega)\delta_{u_k^{(j)}}\in\mathrm{rpm}(U)$, $(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$. Можно показать, что при каждом $j\in\mathbb{N}$ $\Delta_j\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$ и $\mathrm{Mod}(\Delta_j)\subset\mathrm{Mod}(\mu)$. Выбираем далее число $a>0$ таким, чтобы $4\pi/a\in\mathrm{Mod}(\mu)$ и отрезок $[0,a]$ разбиваем на j равных отрезков $I_l^{(j)}=[\frac{l-1}{j}a,\frac{l}{j}a]$, $l=1,\dots,j$. В свою очередь, каждый отрезок $I_l^{(j)}$ разобьем на p_j частичных подотрезков $I_{l_k}^{(j)}(\xi,\omega)$, $k=1,\dots,p_j$, зависящих от $(\xi,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega$, определенных равенствами

$$\begin{aligned}
&I_{l_1}^{(j)}(\xi,\omega)\doteq\frac{l-1}{j}a+\left[0,\int_{I_l^{(j)}}\lambda_1^{(j)}(t+\xi,\omega)dt\right],\\
&I_{l_k}^{(j)}(\xi,\omega)\doteq\frac{l-1}{j}a+\left[\sum_{p=1}^{k-1}\int_{I_l^{(j)}}\lambda_p^{(j)}(t+\xi,\omega)dt,\ \sum_{p=1}^{k}\int_{I_l^{(j)}}\lambda_p^{(j)}(t+\xi,\omega)dt\right],\quad k=2,\dots,p_j.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что отрезки $I^{(j)}_{l_1}(\xi,\omega),\dots,I^{(j)}_{l_{p_j}}(\xi,\omega)$ примыкают друг к другу и при каждом $l=1,\dots,j$ отрезок $I^{(j)}_l$ совпадает с их объединением. Теперь рассмотрим последовательность $\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, состоящую из отображений $w^{(j)}_m:[0,a]\times\Omega\to U$, $m\in\mathbb{Z}$, определенных равенством

$$w^{(j)}_m(t,\omega)\doteq\sum_{l=1}^{j}\chi_{I^{(j)}_l}(t)\sum_{k=1}^{p_j}\chi_{I^{(j)}_{l_k}(ma,\omega)}(t)u^{(j)}_k,\quad (t,\omega)\in[0,a]\times\Omega, \tag{2.2}$$

где $I^{(j)}_{l_k}(ma,\omega)$, $k=1,\dots,p_j$, задаются равенствами (2.1) при $\xi=ma$, а $\chi_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества $A\subset\mathbb{R}$.

Определение 2.1. Последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений

$$(t,\omega)\to\mathfrak{f}_m(t,\omega)\in\mathfrak{Y},\quad (t,\omega)\in[0,a]\times\Omega, \tag{2.3}$$

называется п. п. равномерно по $\omega\in\Omega$, если при каждом $\omega\in\Omega$ последовательность $\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\omega)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ содержится в $L_1([0,a],\mathfrak{Y})$, является п. п. (т. е. для любого $\varepsilon>0$ множество $\mathcal{E}(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\omega)\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon)\doteq\Big\{n\in\mathbb{Z}:\sup\limits_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_0^a|\mathfrak{f}_{m+n}(t,\omega)-\mathfrak{f}_m(t,\omega)|dt<\varepsilon\Big\}$ относительно плотно), и, кроме того, $\lim\limits_{\gamma\downarrow0}\mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\Omega]=0$, где

$$\mathfrak{d}_\gamma[\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\Omega]\doteq\sup_{\substack{\omega_1,\omega_2\in\Omega\\ \rho(\omega_1,\omega_2)\le\gamma}}\left(\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^a|\mathfrak{f}_m(t,\omega_1)-\mathfrak{f}_m(t,\omega_2)|dt\right).$$

Если последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений (2.3) п. п. равномерно по $\omega\in\Omega$, то согласно определению 2.1 при каждом $\omega\in\Omega$ последовательность $\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\omega)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ из $L_1([0,a],\mathfrak{Y})$ п. п., и, следовательно, для нее можно определить множество показателей Фурье последовательности $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\omega)\}_{m\in\mathbb{Z}})$. Тогда множество $\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\doteq\bigcup\limits_{\omega\in\Omega}\Lambda(\{\mathfrak{f}_m(\cdot,\omega)\}_{m\in\mathbb{Z}})$ называется множеством показателей Фурье последовательности $\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, а $\mathrm{Mod}(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\doteq\mathrm{Mod}(\Lambda(\{\mathfrak{f}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}))$ — ее модулем.

Так же, как и в [5], показываем, что последовательность $\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ отображений (2.2) является п. п. равномерно по $\omega\in\Omega$ и

$$\mathrm{Mod}(\{w^{(j)}_m\}_{m\in\mathbb{Z}})\subset a\,\mathrm{Mod}(\mu)+2\pi\mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Отсюда (см. определения 1.2 и 2.1) несложно заключить, что при каждом $j\in\mathbb{N}$ функция $u_j:\mathbb{R}\times\Omega\to U$, определенная на каждом множестве $[ma,(m+1)a]\times\Omega$, $m\in\mathbb{Z}$, равенством $u_j(t+ma,\omega)\doteq w^{(j)}_m(t,\omega)$, $(t,\omega)\in[0,a]\times\Omega$, принадлежит $S(\mathbb{R}\times\Omega,U)$, и, кроме того, в силу выбора числа $a>0$ и включения (2.4) $\mathrm{Mod}(u_j)\subset\mathrm{Mod}(\mu)$.

Полагаем

$$\eta^{(1)}_j(t,\omega)\doteq\mu(t,\omega)-\Delta_j(t,\omega),\quad \eta^{(2)}_j(t,\omega)\doteq\Delta_j(t,\omega)-\delta_{u_j(t,\omega)},\quad (t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega,\ \ j\in\mathbb{N}.$$

Ясно, что для всех $j\in\mathbb{N}$ $\eta^{(\mathfrak{q})}_j\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{frm}(U))$, $\|\eta^{(\mathfrak{q})}_j\|\le2$, $\mathfrak{q}=1,2$. Так как $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$ и $\mathrm{diam}\,\mathcal{U}^{(j)}_k\le1/j$, то из соотношений

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\mathfrak{l}}|\langle\eta^{(1)}_j(s,\omega),c(u)\rangle|ds\le\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\mathfrak{l}}\left(\sum_{k=1}^{p_j}\int_U\alpha^{(j)}_k(u)|c(u^{(j)}_k)-c(u)|\mu(s,\omega)(du)\right)ds\le\mathfrak{l}w_{\frac1j}[c,U]$$

вытекает, что при каждом $\mathfrak{l}>0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\mathfrak{l}}|\langle\eta^{(1)}_j(s,\omega),c(u)\rangle|ds\underset{\omega\in\Omega}{\rightrightarrows}0\ \text{ при }\ j\to\infty. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Для каждой функции $g\in S(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R}))$ и любого фиксированного $\mathfrak{l}>0$*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_t^{t+\mathfrak{l}}\langle\eta^{(2)}_j(s,\omega),g(s,u)\rangle ds\right|\underset{\omega\in\Omega}{\rightrightarrows}0\ \ \textit{при}\ \ j\to\infty. \tag{2.6}$$

Следствие 2.1. Пусть $c \in C(U,\mathbb{R})$. Тогда при любом фиксированном $\mathfrak{l} > 0$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sup_{t\in[m\mathfrak{l},(m+1)\mathfrak{l}]}\left|\int_{m\mathfrak{l}}^{t}\langle\eta_j^{(2)}(s,\omega),c(u)\rangle ds\right|\right) \underset{\omega\in\Omega}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{2.7}$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся константа $\gamma > 0$, строго возрастающая последовательность $\{j(N)\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, а также последовательности $\{\omega_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \Omega$, $\{m_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ и $\{t_N\}_{N=1}^{\infty}$, где $t_N \doteq m_N\mathfrak{l} + \theta_N\mathfrak{l}$, $\theta_N \in [0,1)$, такие, что для каждого $N \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство

$$\left|\int_{m_N\mathfrak{l}}^{t_N}\langle\eta_{j(N)}^{(2)}(s,\omega_N),c(u)\rangle ds\right| \geq \gamma.$$

Поскольку $\{\theta_N\}_{N=1}^{\infty} \subset [0,1)$, то можно считать, что $\lim\limits_{N\to\infty}\theta_N = \theta \in [0,1]$. Поэтому, учитывая $|\langle\eta_j^{(2)}(t,\omega),c(u)\rangle| \leq 2\|c\|_{C(U,\mathbb{R})}$, $(t,\omega) \in \mathbb{R}\times\Omega$, $j\in\mathbb{N}$, из указанного выше неравенства получим существование $\widehat{N} \in \mathbb{N}$, начиная с которого будут выполняться неравенства

$$\sup_{\omega\in\Omega}\left(\sup_{m\in\mathbb{Z}}\left|\int_{m\mathfrak{l}}^{m\mathfrak{l}+\mathfrak{l}}\langle\eta_{j(N)}^{(2)}(s,\omega),g(s,u)\rangle ds\right|\right) \geq \gamma/2,$$

где $g(t,u) \doteq \mathfrak{f}(t)c(u)$, $(t,u) \in \mathbb{R}\times U$, а $\mathfrak{f} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — $\mathfrak{l}$-периодическая функция, которая на $[0,\mathfrak{l}]$ определяется равенством $\mathfrak{f}(t) \doteq \chi_{[0,\theta\mathfrak{l}]}(t)$, $t\in[0,\mathfrak{l}]$. Очевидно, так заданная функция g принадлежит $S(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R}))$ и, следовательно, полученное неравенство несовместно с предельным соотношением (2.6).

Далее, при каждом $\omega\in\Omega$ и любых $m\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{N}$ (см. определение мер Δ_j и (2.2)) имеем

$$\int_{ma}^{(m+1)a}\langle\eta_j^{(2)}(s,\omega),c(u)\rangle ds = \sum_{l=1}^{j}\left(\int_{I_l^{(j)}}\sum_{k=1}^{p_j}\lambda_k^{(j)}(t+ma,\omega)c(u_k^{(j)})dt - \sum_{k=1}^{p_j}\int_{I_{l_k}^{(j)}(ma,\omega)}c(u_k^{(j)})dt\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{p_j}\left(\int_{I_l^{(j)}}\lambda_k^{(j)}(t+ma,\omega)dt - \operatorname{mes}I_{l_k}^{(j)}(ma,\omega)\right)c(u_k^{(j)}) \overset{(2.1)}{=} 0,$$

поэтому при каждом $\omega\in\Omega$, $j\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Z}$

$$\int_0^{qa}\langle\Delta_j(s,\omega),c(u)\rangle ds = \int_0^{qa}c(u_j(s,\omega))ds. \tag{2.8}$$

3. В этом пункте приведем еще ряд свойств введенных отображений $\Delta_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$ и $u_j \in S(\mathbb{R}\times\Omega,U)$, $j\in\mathbb{N}$, отвечающих $\mu\in S(\mathbb{R}\times\Omega,\mathrm{rpm}(U))$ в предположении, что для этого μ уравнение (1.3) при каждом $\omega\in\Omega$ имеет п. п. по Бору (или, что равносильно, ограниченное на $\mathbb{R}$) решение $x(t,\omega) = \int\limits_0^t\langle\mu(s,\omega),c(u)\rangle ds$.

Лемма 3.1. *Допустим, что при каждом* $\omega\in\Omega$ $\{f_j(\cdot,\omega)\}_{j=1}^{\infty} \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *и существуют такие строго возрастающие последовательности* $\{j(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, *что при каждом* $l\in\mathbb{N}$

$$\left|\int_0^{q(l)}f_{j(l)}(s,\omega_l)ds\right| \geq l. \tag{3.1}$$

Тогда найдутся строго возрастающая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$ *и константа* $\gamma > 0$ *такие, что*

$$\inf_{N\in\mathbb{N}}\left(\sup_{\substack{k,l\geq N\\ p\in\mathbb{N}}}\left(\sup_{\omega\in\Omega}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_{t+h_k}^{t+h_{k+p}}f_{j(l)}(s,\omega)ds\right|\right)\right)\right) \geq \gamma. \tag{3.2}$$

Доказательство. Допустив противное, получим, что для последовательности $h_k \doteq k$, $k \in \mathbb{N}$, и константы $\gamma \doteq 1/4$ найдется такое $\widehat{N} \in \mathbb{N}$, что при всех $k, l \geq \widehat{N}$ и $p = k$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int_{t+k}^{t+2k} f_{j(l)}(s, \omega_l) ds \right| < \frac{1}{2}.$$

Теперь, взяв $l_0 \geq \widehat{N}$ таким, чтобы $q(l_0) \geq \widehat{N}$, принимая во внимание (3.1), получим противоречивые неравенства

$$l_0 \leq \left| \int_0^{q(l_0)} f_{j(l_0)}(s, \omega_{l_0}) ds \right| < \frac{1}{2}. \quad \square$$

Лемма 3.2. *Допустим, что* $\{f_j(\cdot, \omega)\}_{j=1}^\infty \subset L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *при каждом* $\omega \in \Omega$, *и существуют константа* $\kappa > 0$ *и строго возрастающие последовательности* $\{j(l)\}_{l=1}^\infty$, $\{q(l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ *такие, что при каждом* $l \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_0^{q(l)} f_{j(l)}(s, \omega_l) ds \right| \geq \kappa. \tag{3.3}$$

Тогда найдутся строго возрастающая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset (0, \infty)$ *и константа* γ, *принадлежащая* $(0, \kappa)$, *для которых будет выполнено неравенство* (3.2).

Для доказательства леммы, предположив противное, возьмем последовательность $h_k \doteq k$, $k \in \mathbb{N}$, константу $\gamma \doteq \kappa/8$ и так же, как при доказательстве предыдущей леммы, придем к неравенству, противоречащему (3.3).

Аналогично доказываются следующие два утверждения.

Лемма 3.3. *Допустим, что* $\{f_j(\cdot, \omega)\}_{j=1}^\infty \subset L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *при каждом* $\omega \in \Omega$, *и существуют такие строго возрастающая* $\{j(l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ *и строго убывающая* $\{q(l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{Z}_-$ *последовательности, что при каждом* $l \in N$ *выполнено неравенство* (3.1). *Тогда найдутся строго убывающая последовательность* $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset (-\infty, 0)$ *и константа* $\gamma > 0$, *для которых будет выполняться неравенство* (3.2).

Лемма 3.4. *Допустим, что* $\{f_j(\cdot, \omega)\}_{j=1}^\infty \subset L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *при каждом* $\omega \in \Omega$, *и существуют константа* $\kappa > 0$, *а также строго возрастающая* $\{j(l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ *и строго убывающая* $\{q(l)\}_{l=1}^\infty \subset \mathbb{Z}_-$ *последовательности такие, что при каждом* $l \in N$ *выполнено неравенство* (3.3). *Тогда найдутся строго убывающая последовательность* $\{h_k\}_{k=1}^\infty \subset (-\infty, 0)$ *и константа* $\gamma \in (0, \kappa)$, *для которых будет выполнено неравенство* (3.2).

Теперь при каждом $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение

$$(t, \omega) \mapsto f_j(t, \omega) \doteq \langle \Delta_j(t, \omega), c(u) \rangle \in \mathbb{R}^n, \quad (t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega, \tag{3.4}$$

принадлежащее (см. определение 1.2) $S(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n)$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t, \omega)| < \infty$ *при каждом* $\omega \in \Omega$. *Тогда*

$$\varlimsup_{j\to\infty} \left(\sup_{\omega\in\Omega} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \int_0^t f_j(s, \omega) ds \right| \right) \right) < \infty.$$

Доказательство. Так как (см. определение мер Δ_j и (3.4)) $\sup\limits_{(t,\omega)\in\mathbb{R}\times\Omega} |f_j(t, \omega)| \leq \mathfrak{c}$, $j \in \mathbb{N}$, где (всюду далее) $\mathfrak{c} \doteq \max\limits_{u\in U} |c(u)|$, то для доказательства леммы 3.5 достаточно показать, что

$$\varlimsup_{j\to\infty} \left(\sup_{\omega\in\Omega} \left(\sup_{q\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^q f_j(s, \omega) ds \right| \right) \right) < \infty.$$

Если допустить противное, то найдутся последовательности $\{\omega_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \Omega$, $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$, а также строго возрастающая последовательность $\{j(l)\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что при каждом $l \in \mathbb{N}$ для функций $f_{j(l)}$, определенных равенством (3.4), будет выполнено неравенство (3.1), которое в силу условия леммы 3.5 и предельного соотношения (2.5) невозможно, если $\sup\limits_{l\in\mathbb{N}}|q(l)| < \infty$, т. е. при сделанном предположении необходимо $\lim\limits_{l\to\infty}|q(l)| = \infty$. Поэтому возможны случаи, когда из последовательности $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty}$ можно выделить строго возрастающую подпоследовательность, принадлежащую $\mathbb{N}$, либо строго убывающую подпоследовательность из $\mathbb{Z}_{-}$. Рассмотрим первый возможный случай, и для простоты будем считать, что сама последовательность $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ является строго возрастающей. Тогда по лемме 3.1 найдутся строго возрастающая последовательность $\{h_k\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$ и константа $\gamma > 0$ такие, что будет выполнено неравенство (3.2). Из него вытекает, что для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдутся такие $k(N), l(N) \geq N$ и $p(N) \in \mathbb{N}$, при которых

$$\sup_{\omega\in\Omega} F_N(\omega) \geq \frac{\gamma}{2}, \quad F_N(\omega) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_{t+a(N)}^{t+b(N)} f_{\mathfrak{j}(N)}(s,\omega)ds\right|, \tag{3.5}$$

где $a(N) \doteq h_{k(N)}$, $b(N) \doteq h_{k(N)+p(N)}$, $\mathfrak{j}(N) \doteq j(l(N))$, $N \in \mathbb{N}$. Из (3.5) получаем, что для всякого $N \in \mathbb{N}$ $\ b(N) - a(N) \geq \mathfrak{l} \doteq \frac{\gamma}{2\mathfrak{c}}$ и, кроме того, найдется такая последовательность $\{\omega(N)\}_{N=1}^{\infty} \subset \Omega$, что при каждом $N \in \mathbb{N}$ $\ F_N(\omega(N)) > \gamma/4$. Далее, т. к. (Ω,ρ) — компактное метрическое пространство, то без ограничения общности можно считать, что $\omega(N) \to \widehat{\omega} \in \Omega$ при $N \to \infty$. Теперь из неравенства $F_N(\omega(N)) > \gamma/4$ (см. (3.4), (3.5)), $N \in \mathbb{N}$, получаем, что при всех $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{\gamma}{4} \leq \sup_{\omega\in\Omega}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\mathfrak{l}}|\langle\eta^{(1)}_{\mathfrak{j}(N)}(s,\omega), c(u)\rangle|ds\right) + I_{\mathfrak{l}}(N) + \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_{t+a(N)}^{t+b(N)}\langle\mu(s,\widehat{\omega}), c(u)\rangle ds\right|, \tag{3.6}$$

где

$$I_{\mathfrak{l}}(N) \doteq \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\mathfrak{l}}|\langle\mu(s,\omega(N)) - \mu(s,\widehat{\omega}), c(u)\rangle|ds.$$

Покажем, что $\lim\limits_{N\to\infty} I_1(N) = 0$. В самом деле, т. к. $\mu \in S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathrm{rpm}(U))$, то отображение (см. определение 1.2) $(t,\omega) \to \mathfrak{f}(t,\omega) \doteq \langle\mu(t,\omega), c(u)\rangle$ принадлежит $S(\mathbb{R}\times\Omega, \mathbb{R}^n)$ и, следовательно (см. определение 1.1 и (1.2)), для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\gamma_0 > 0$, что $\mathfrak{d}_{\gamma_0}[\mathfrak{f},\Omega] < \varepsilon$. Так как $\rho(\omega(N),\widehat{\omega}) \to 0$ при $N \to \infty$, то найдется такое N_0, что при всех $N \geq N_0$ $\ \rho(\omega(N),\widehat{\omega}) \leq \gamma_0$, и поэтому $I_1(N) \leq \mathfrak{d}_{\gamma_0}[\mathfrak{f},\Omega] < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} I_1(N) = 0$. Отсюда, используя топологическую эквивалентность d_l-расстояний ([1], с. 198), получаем $\lim\limits_{N\to\infty} I_{\mathfrak{l}}(N) = 0$. Тогда в силу (2.5) из (3.6) вытекает, что найдется такое $\widehat{N} \in \mathbb{N}$, что при всех $N \geq \widehat{N}$ $\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x(t+b(N),\widehat{\omega}) - x(t+a(N),\widehat{\omega})| \geq \gamma/8$. Последнее означает, что множество п. п. по Бору функций $\{x(\cdot+\mathfrak{h}_n,\widehat{\omega})\}_{n=1}^{\infty}$, где $\mathfrak{h}_1 \doteq a(\widehat{N})$, $\mathfrak{h}_2 \doteq b(\widehat{N})$, $\mathfrak{h}_3 \doteq a(\widehat{N}+1)$, $\mathfrak{h}_4 \doteq b(\widehat{N}+1), \ldots$, не имеет конечной $\gamma/8$-сети, что в силу теоремы Бохнера [1] невозможно. Точно так же, используя лемму 3.3, придем к противоречию в случае, когда из последовательности $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty}$ можно выделить строго убывающую подпоследовательность, содержащуюся в $\mathbb{Z}_{-}$.

Из леммы 3.5 и теоремы об интеграле от п. п. по Степанову функций ([1], с .206) с учетом неравенства (см. (3.4)) $|f_j(t,\omega)| \leq \mathfrak{c}$, $j \in \mathbb{N}$, вытекает

Следствие 3.1. Пусть при каждом $\omega \in \Omega$ $\ \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x(t,\omega)| < \infty$. Тогда существует строго возрастающая последовательность $\{j(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такая, что при любых $l \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$ уравнение $\dot{x} = \langle\Delta_{j(l)}(t,\omega), c(u)\rangle$ имеет п. п. по Бору решение

$$\mathfrak{x}_{j(l)}(t,\omega) = \int_0^t \langle\Delta_{j(l)}(s,\omega), c(u)\rangle ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

причем множество $\{\mathfrak{x}_{j(l)}(\cdot,\omega),\ l \in \mathbb{N},\ \omega \in \Omega\} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ ограничено.

Из следствия 3.1 и равенства (2.8) получаем

Следствие 3.2. Пусть при каждом $\omega \in \Omega$ $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x(t,\omega)| < \infty$ и $\{j(l)\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность из следствия 3.1. Тогда при любых $l \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega$ уравнение $\dot{x} = c(u_{j(l)}(t,\omega))$ имеет п. п. по Бору решение

$$x_{j(l)}(t,\omega) = \int_0^t c(u_{j(l)}(s,\omega))ds, \tag{3.8}$$

и при этом множество $\{x_{j(l)}(\cdot,\omega), l \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ ограничено.

4. При каждом $l \in \mathbb{N}$ рассмотрим (см. следствия 3.1, 3.2) п. п. по Бору функции $\Delta x_{j(l)}(\cdot,\omega) \doteq x(\cdot,\omega) - \mathfrak{x}_{j(l)}(\cdot,\omega)$, $\Delta\mathfrak{x}_{j(l)}(\cdot,\omega) \doteq x_{j(l)}(\cdot,\omega) - \mathfrak{x}_{j(l)}(\cdot,\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Лемма 4.1. *Пусть при каждом* $\omega \in \Omega$ $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x(t,\omega)| < \infty$. *Тогда*

$$\varlimsup_{l\to\infty}(\sup_{\omega\in\Omega}(\sup_{q\in\mathbb{Z}}|\Delta x_{j(l)}(q,\omega)|)) = 0.$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие константа $\kappa > 0$, последовательности $\{\omega_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \Omega$, $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$, строго возрастающая подпоследовательность $\{\mathfrak{j}(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \{j(l)\}_{l=1}^{\infty}$, что при каждом $l \in \mathbb{N}$ для функции (см. (3.7))

$$(t,\omega) \to f_{\mathfrak{j}(l)}(t,\omega) \doteq \langle \eta^{(1)}_{\mathfrak{j}(l)}(t,\omega), c(u)\rangle \in \mathbb{R}^n, \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}\times\Omega, \tag{4.1}$$

будет выполнено неравенство (3.3) при $j(l) \doteq \mathfrak{j}(l)$, которое в силу предельного соотношения (2.5) невозможно, если $\sup\limits_{l\in\mathbb{N}}|q(l)| < \infty$, т. е. при сделанном предположении необходимо $\lim\limits_{l\to\infty}|q(l)| = \infty$. Поэтому возможны случаи, когда из этой последовательности можно выделить строго возрастающую подпоследовательность, принадежащую $\mathbb{N}$, либо строго убывающую подпоследовательность из $\mathbb{Z}_-$. В первом случае считаем, что сама последовательность $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ является строго возрастающей. По лемме 3.2 найдутся строго возрастающая последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$ и константа $\gamma \in (0,\kappa)$ такие, что для функции $f_{\mathfrak{j}(l)}$, определенной равенством (4.1), при $j(l) = \mathfrak{j}(l)$ будет выполнено неравенство (3.2). Из него вытекает, что для этой функции и для каждого $N \in \mathbb{N}$ найдутся такие $k(N), l(N) \geq N$ и $p(N) \in \mathbb{N}$, что будет иметь место неравенство (3.5) при $\mathfrak{j}(N) = \mathfrak{i}(N) \doteq \mathfrak{j}(l(N))$. Отсюда для всякого $N \in \mathbb{N}$ $b(N) - a(N) \geq \frac{\gamma}{4\mathfrak{c}}$ и существует такая последовательность точек $\{\omega_N\}_{N=1}^{\infty} \subset \Omega$, что $F_N(\omega_N) \geq \gamma/4$. Следовательно, выполняется неравенство

$$\frac{\gamma}{4} \leq \sup_{\omega\in\Omega}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\mathfrak{l}}|\langle\eta^{(1)}_{\mathfrak{i}(N)}(s,\omega_N), c(u)\rangle|ds\right),$$

которое не совместно с (2.5) при $\mathfrak{l} \doteq \frac{\gamma}{4\mathfrak{c}}$. Точно так же, используя лемму 3.4, придем к противоречию в случае, когда из последовательности $\{q(l)\}_{l=1}^{\infty}$ можно выделить строго убывающую подпоследовательность, содержащуюся в $\mathbb{Z}_-$.

Доказательство теоремы 1.2. В силу леммы 4.1 из последовательности $\{j(l)\}_{l=1}^{\infty}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{\mathfrak{j}(i)\}_{i=1}^{\infty}$, что (см. следствие 3.2) при каждом $i \in \mathbb{N}$ и всяком $\omega \in \Omega$ функция $x_i(\cdot,\omega) \doteq x_{\mathfrak{j}(i)}(\cdot,\omega)$ — п. п. по Бору решение уравнения $\dot{x} = c(v_i(t,\omega))$, где $v_i(t,\omega) \doteq u_{j(i)}(t,\omega)$, $(t,\omega) \in \mathbb{R}\times\Omega$. При этом множество функций $\{x_i(\cdot,\omega), i \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega\} \subset B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ ограничено и

$$\lim_{i\to\infty}(\sup_{\omega\in\Omega}(\sup_{m\in\mathbb{Z}}|\Delta x_{\mathfrak{j}(i)}(m,\omega)|)) = 0. \tag{4.2}$$

При любых $q \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$ и всяком $\omega \in \Omega$ (см. (2.8), (3.7) и (3.8)) имеем соотношения

$$\frac{1}{qa}\int_0^{qa}|x(t,\omega)-x_{\mathfrak{j}(i)}(t,\omega)|dt \leq \frac{1}{qa}\sum_{m=0}^{q-1}\int_{ma}^{(m+1)a}(|\Delta x_{\mathfrak{j}(i)}(t,\omega)|+|\Delta\mathfrak{x}_{\mathfrak{j}(i)}(t,\omega)|)dt \leq$$
$$\leq \sup_{\omega\in\Omega}(\sup_{m\in\mathbb{Z}}|\Delta x_{\mathfrak{j}(l)}(m,\omega)|) + \sup_{\omega\in\Omega}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}|\langle\eta^{(1)}_{\mathfrak{j}(i)}(s,\omega),c(u)\rangle|ds\right) +$$
$$+\sup_{\omega\in\Omega}\left(\sup_{m+\mathbb{Z}}\left(\sup_{t\in[ma,(m+1)a]}\left|\int_{ma}^{t}\langle\eta^{(2)}_{\mathfrak{j}(i)}(s,\omega),c(u)\rangle ds\right|\right)\right),$$

из которых в силу предельных равенств (2.5) и (2.7) при $\mathfrak{l} \doteq a$ и (4.2) получаем

$$\lim_{i\to\infty}\sup_{\omega\in\Omega}M\{|x(t,\omega)-x_i(t,\omega)|\} \doteq \lim_{i\to\infty}\sup_{\omega\in\Omega}M\{|x(t,\omega)-x_{\mathfrak{j}(i)}(t,\omega)|\}=0. \quad \square$$

Отметим, что доказанная теорема 1.2 играет важную роль, во-первых, при обосновании корректности расширения задач оптимального управления п. п. движениями (напр., [8]) с уравнениями связи вида $\dot{x}=c(u(t))$, $t\in\mathbb{R}$, $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},U)$, а во-вторых, при доказательстве необходимых условий оптимальности в таких задачах.

Литература

1. Левитан Б.М. *Почти периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. Fink A.M. *Almost periodic differential equation* // Lect. Notes Math. – 1973. – V. 377. – 336 p.
3. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 623 с.
4. Иванов А.Г. *Мерозначные почти периодические функции.* – Препринт. ФТИ УрО АН СССР, 1990. – 53 с.
5. Иванов А.Г. *Мерозначные почти периодические функции.* – Удмуртск. ун-т. – Ижевск, 1991. 62 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.04.91, № 1721-В91.
6. Иванов А.Г. *О ляпуновской почти периодической задаче* // ПММ. – 1991. – Т. 55. – Вып. 5. – С. 718–724.
7. Иванов А.Г. *Об эквивалентности дифференциальных включений и управляемых почти периодических систем* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 7. – С. 876–884.
8. Иванов А.Г. *Об оптимальном управлении почти периодическими движениями* // ПММ. – 1992. – Т. 56. – Вып. 5. – С. 718–724.

Удмуртский государственный университет

Поступила 12.03.2001