ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 512.552

А.Н. АБЫЗОВ

СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ МОДУЛИ

В данной статье рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и унитарные модули над ними. Будем обозначать через $J(R)$, $J(M)$ соответственно радикалы Джекобсона кольца R и правого R-модуля M. Напомним некоторые определения из [1]. Правый R-модуль M называется слабо регулярным, если всякий его подмодуль, не содержащийся в радикале $J(M)$, имеет ненулевое прямое слагаемое модуля M. Если в модуле M каждый n-порожденный подмодуль, который не содержится в $J(M)$, выделяется в виде прямого слагаемого в M, то модуль M называется n-строго слабо регулярным. Слабо регулярные модули являются широким обобщением полупростых модулей. Хорошо известно, что классически полупростые кольца характеризуются как кольца, над которыми каждый модуль является полупростым. В данной статье рассматриваются кольца, над которыми всякий модуль слабо регулярен.

Теорема 1. *Пусть R — полусовершенное кольцо и $J(R)^2 \neq J(R)^3$. Тогда над кольцом R найдется неслабо регулярный модуль.*

Доказательство. Пусть R — полусовершенное кольцо, удовлетворяющее условию $J(R)^2 \neq J(R)^3$. Заметим, что если над некоторым кольцом все модули слабо регулярны, то над любым его фактор-кольцом все модули также слабо регулярны. Поэтому, переходя к фактор-кольцу $R/J(R)^3$, мы можем без ограничения общности считать, что у исходного кольца $J(R)^3 = 0$. Так как $J(R)^2 \neq 0$, то для некоторого неразложимого идемпотента e кольца R выполнено условие $eJ(R)^2 \neq 0$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму $M = eR \oplus (eJ(R)/eJ(R)^2)$. Выберем элемент x из правого идеала $eJ(R)$, удовлетворяющий условию $xJ(R) \neq 0$. Пусть $M_0 = (x, \overline{x})R$ — циклический подмодуль модуля M, порожденный элементом $(x, \overline{x})$, где $\overline{x}$ — образ элемента x при естественном эпиморфизме $eJ(R)$ на $eJ(R)/eJ(R)^2$. Так как согласно 18.25.2 [2] модуль M_0 является суммой локальных модулей и $M_0J(R) \neq 0$, то для некоторого локального подмодуля N модуля M_0 выполнено условие $NJ(R) \neq 0$. Тогда $N = (xr, \overline{x}r)R$, где r — некоторый элемент из кольца R. Покажем, что $\overline{x}r \neq 0$. Если $\overline{x}r = 0$, то $xr \in eJ(R)^2$ и $xrJ(R) = 0$. Следовательно, $NJ(R) = (xr, \overline{x}r)J(R) = 0$, что противоречит выбору N. Поскольку $\overline{x}r \neq 0$ и $eJ(R)/eJ(R)^2$ — полупростой правый R-модуль, то подмодуль N не содержится в радикале модуля M. Покажем теперь, что модуль M не является слабо регулярным. Предположим противное. Тогда $M = N \oplus N_0 = eR \oplus (eJ(R)/eJ(R)^2)$, где N_0 — некоторый подмодуль модуля M. Так как у модуля eR и любого простого модуля кольцо эндоморфизмов локально и модуль N неразложим, то согласно предложению 7.3.4 [1] модуль N изоморфен либо простому модулю, либо модулю eR. Следовательно, для модуля N либо $NJ(R) = 0$, либо $NJ(R)^2 \neq 0$. Это противоречит тому, что $NJ(R) \neq 0$ и $NJ(R)^2 = 0$. Таким образом, построенный модуль M не является слабо регулярным. □

Теорема 2. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *каждый правый R-модуль является слабо регулярным;*
2) *кольцо R является артиновым полуцепным и $J(R)^2 = 0$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть R — совершенное справа кольцо, над которым все правые R-модули слабо регулярны. Тогда если $J(R)^2 \neq 0$, то согласно теореме 11.5.5 [1] $J(R)^2 \neq J(R)^3$, что противоречит теореме 1. Следовательно, у кольца R квадрат радикала равен нулю. Пусть eR — правый главный неразложимый R-модуль, который не является простым модулем, и N — его инъективная оболочка. Если $eR \subset J(N) = NJ(R)$, то $eJ(R) \subset NJ(R)^2 = 0$, что противоречит выбору eR. Следовательно, в силу условия 1) eR является инъективным R-модулем. Так как всякий неразложимый инъективный модуль однороден и модуль eJ является полупростым, то $eJ(R)$ — простой R-модуль и отсюда eR — цепной модуль. Таким образом, всякий правый R-модуль есть сумма простых и локальных инъективных модулей. Значит, всякий неразложимый правый R-модуль является локальным цепным модулем. Поскольку R артиново справа, то всякий конечно-порожденный R-модуль представляется в виде прямой суммы неразложимых R-модулей. Поэтому всякий конечно-порожденный правый R-модуль является полуцепным и согласно теореме 25.4.2 [2] кольцо R артиново полуцепное.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть eR — непростой главный неразложимый правый R-модуль и N — его инъективная оболочка, которая, очевидно, неразложима. Так как кольцо R артиново полуцепное, то N является локальным цепным модулем. Поскольку $J(R)^2 = 0$, то $eR \not\subset NJ(R)$. Следовательно, eR — инъективный модуль и всякий локальный правый R-модуль является либо простым, либо инъективным. Пусть M — произвольный правый R-модуль и M_1 — некоторый его подмодуль такой, что $M_1 \not\subset J(M)$. Поскольку M_1 является суммой локальных модулей и не содержится в $J(M)$, то в нем найдется локальный подмодуль M_2, который также не содержится в $J(M)$. Так как M_2 является либо простым, либо инъективным, то он выделяется в виде прямого слагаемого в модуле M. $\square$

Теорема 3. *Пусть R — совершенное справа кольцо. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *над кольцом R все правые R-модули 1-строго слабо регулярны;*

2) *кольцо R является либо локальным артиновым полуцепным и $J(R)^2 = 0$, либо классически полупростым.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть над кольцом R все модули 1-строго слабо регулярны, тогда они, в частности, слабо регулярны. Следовательно, согласно теореме 2 кольцо R является полуцепным, а квадрат его радикала равен нулю. Если $J(R) = 0$, то все доказано. Допустим $J(R) \neq 0$ и покажем, что в этом случае R является локальным кольцом. Предположим противное и пусть $R_R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR$ — разложение R_R в прямую сумму главных неразложимых модулей. Тогда согласно предположению $n > 1$. Так как $J(R) \neq 0$, то для некоторого неразложимого идемпотента e_i можно найти такой элемент s из радикала кольца R, что $e_is \neq 0$. Подберем теперь неразложимый идемпотент e_j, для которого $e_ise_j \neq 0$, и пусть e_k — некоторый неразложимый идемпотент, для которого $e_ke_j = 0$. Рассмотрим внешнюю прямую сумму $M = e_iR \oplus e_kR$ и выделим в ней подмодуль $M_0 = (e_is, e_k)R$. Ясно, что подмодуль M_0 не содержится в $J(M)$ и, следовательно, M_0 является прямым слагаемым модуля M. Так как $e_iJ(R)$ является простым модулем и $(e_is, e_k)e_j = (e_ise_j, 0) \neq 0$, то $(e_ise_j, 0)R = (e_is, 0)R$ — простой подмодуль модуля M_0. Поскольку $J(M_0) = (e_is, e_k)J(R) = (0, e_kJ(R))$, то подмодуль $(e_is, 0)R$ не содержится в радикале модуля M_0. Поэтому он является прямым слагаемым модуля M_0. Так как подмодуль M_0 — прямое слагаемое модуля M, то подмодуль $(e_is, 0)R$ является прямым слагаемым модуля M, который содержится в $J(M)$, что противоречит косущественности радикала модуля M.

2) $\Rightarrow$ 1). Если кольцо R классически полупростое, то утверждение очевидно. Пусть R — локальное полуцепное кольцо и $J(R)^2 = 0$, тогда каждый циклический модуль является либо простым, либо инъективным и изоморфным R_R. Поэтому каждый модуль над кольцом R является 1-строго слабо регулярным. $\square$

Теорема 4. *Если над совершенным справа кольцом R каждая прямая сумма слабо регулярных правых R-модулей является слабо регулярным модулем, то кольцо R является полуцепным справа и $J(R)^2 = 0$.*

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что $J(R)^2 = 0$. Таким образом, осталось показать, что для каждого неразложимого идемпотента e кольца R радикал правого R-модуля eR является либо простым, либо нулевым. Допустим противное. Тогда для некоторого примитивного идемпотента e eJ не прост и, следовательно, над кольцом R найдется локальный правый модуль M, у которого $MJ = M_1 \oplus M_2$, где M_1 и M_2 — простые модули. Рассмотрим каноническое вложение f модуля M в модуль $M/M_1 \oplus M/M_2$. Поскольку $f(M) \not\subset J(M/M_1 \oplus M/M_2)$, то согласно условию $f(M)$ является прямым слагаемым в $M/M_1 \oplus M/M_2$. Из ([1], с. 176) следует, что у модулей M/M_1 и M/M_2 кольца эндоморфизмов локальны. Тогда согласно ([1], с. 179) $f(M)$ изоморфно либо M/M_1, либо M/M_2, что, очевидно, невозможно. $\square$

Правый R-модуль называется полым, если каждый его собственный подмодуль является косущественным. Легко видеть, что всякий полый модуль является либо радикальным, либо локальным. Заметим, что понятие полого модуля двойственно понятию однородного модуля. Имеют место следующие две теоремы, которые двойственны друг другу.

Теорема 5. *В модуле M каждый несущественный подмодуль является прямым слагаемым тогда и только тогда, когда модуль M либо полупростой, либо локальный, либо полый и $J(M) = M$.*

Доказательство. Пусть в модуле M каждый некосущественный подмодуль выделяется в виде прямого слагаемого. Если $J(M) = 0$, то модуль M, очевидно, является полупростым. Рассмотрим случай, когда $J(M) \neq 0$. Допустим, в модуле M найдется собственный некосущественный подмодуль N. Тогда $M = N \oplus L$, где L — подмодуль модуля M. Если N_0 — произвольный подмодуль модуля N, то модуль $N_0 \oplus L$ является некосущественным и, следовательно, является прямым слагаемым модуля M. Используя закон модулярности, получаем, что модуль N_0 является прямым слагаемым модуля N. Следовательно, N — полупростой модуль. Аналогичным образом можно показать, что модуль L так же является полупростым. Таким образом, модуль M является полупростым, что противоречит предположению. Следовательно, если $J(M) \neq 0$, то каждый собственный подмодуль модуля M является косущественным и модуль M полый. $\square$

Теорема 6. *В модуле M каждый несущественный подмодуль является прямым слагаемым тогда и только тогда, когда модуль M является либо полупростым, либо однородным с существенным простым подмодулем, либо однородным и $\operatorname{soc} M = 0$.*

Доказательство. Пусть в модуле M каждый собственный несущественный подмодуль выделяется в виде прямого слагаемого. Если $\operatorname{soc} M = M$, то модуль M является полупростым. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{soc} M \neq M$. Если в модуле M найдется собственный несущественный подмодуль N, то $N \oplus L = M$ для некоторого ненулевого подмодуля L. Так как любой подмодуль модуля N является несущественным в M, то он является прямым слагаемым модуля M и, следовательно, модуля N, т. е. N — полупростой модуль. Аналогичным образом можно показать, что модуль L также является полупростым. Таким образом, модуль M является полупростым, что противоречит предположению. Следовательно, модуль M является однородным и его цоколь либо нулевой, либо существенный и простой. $\square$

Теорема 7. *Модуль M является n-строго слабо регулярным ($n > 1$) тогда и только тогда, когда он либо регулярный, либо локальный, либо радикальный.*

Доказательство. Пусть M является нерадикальным n-строго слабо регулярным модулем и $J(M) \neq 0$. Если $b \notin J(M)$, то для любого элемента a из $J(M)$ имеем $(aR + bR) \oplus U = M$, где U — некоторый подмодуль модуля M. Поскольку aR косущественен в M, то $(aR + bR) \oplus U = bR \oplus U = M$ и, следовательно, $a \in bR$. Таким образом, $J(M) \subset bR$. Если $U \neq 0$, то аналогично показывается $J(M) \subset U$, что противоречит предположению $bR \cap U = 0$. Следовательно, модуль M порождается всяким элементом, лежащим вне радикала, что доказывает локальность модуля. Если $J(M)$=0, то регулярность модуля следует из следствия 1.3 [4]. $\square$

Теорема 3 показывает, что теорема 7, вообще говоря, не является верной для 1-строго слабо регулярных модулей.

Литература

1. Сахаев И.И., Хакми Х.И. *О сильно регулярных модулях и кольцах* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 2. – С. 60–63.
2. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории.* Т. 2 – М.: Мир, 1977. – 464 с.
3. Каш Ф. *Модули и кольца.* – М.: Мир, 1981. – 368 с.
4. Zelmanowitz J. *Regular modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – № 163. – P. 341–355.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
08.02.2002