Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, № 11, с. 72–77 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0119*

А.А. ВОРОНЕНКО, В.С. ФЕДОРОВА, Д.В. ЧИСТИКОВ

ПОВТОРНОСТЬ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ БАЗИСЕ

Аннотация. Доказывается новый критерий бесповторности булевой функции в базисе из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Устанавливается, что всякая булева функция либо является бесповторной, либо обладает множеством из четырех или шести наборов аргументов, значения на которых доказывают ее повторность. С использованием этого критерия выводится альтернативное доказательство известного критерия Стеценко.

Ключевые слова: бесповторная булева функция, критерий.

УДК: 519.716

Abstract. We establish a new criterion for a Boolean function to be read-once over the basis of conjunction, disjunction, and negation. We prove that each Boolean function is either read-once or has a set of four or six input vectors such that values of this function on these vectors show that it is iterated. We use this criterion to deduce an alternative proof of the known Stetsenko criterion.

Keywords: read-once Boolean function, criterion.

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, представимая (не представимая) бесповторной формулой в *элементарном* базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ называется *бесповторной* (*повторной*). Константы 0 и 1 считаются бесповторными функциями.

Напомним, что булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *монотонной* (*антимонотонной*) *по переменной* x_i, если для любого набора значений оставшихся переменных $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}$, $\alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$ выполнено соотношение

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \le f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$
$$(f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \ge f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)).$$

Функция, монотонная или антимонотонная по всем переменным, называется *поляризуемой.*

Предложение 1. *Любая бесповторная функция представима в виде дерева, во внутренних вершинах которого реализуются чередующиеся конъюнкции и дизъюнкции произвольной арности, а в листьях — тождественные функции и отрицания попарно различных переменных.*

Предложение 2. *Множество бесповторных функций замкнуто относительно подстановки констант.*

Предложение 3. *Неполяризуемая функция повторна.*

Поступила 25.05.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (МД-757.2011.9) и федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы".

Преобразованиями обобщенной однотипности называются замена переменной или самой функции на ее отрицание и перестановка переменных. Функции, получаемые друг из друга конечным числом преобразований обобщенной однотипности, называются *обобщенно однотипными.*

Предложение 4. *Обобщенно однотипные функции бесповторны одновременно.*

Существенная переменная x_i функции $g(x_1, \ldots, x_m)$ называется *отмеченной*, если обе функции $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ и $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ тождественно не равны константам и существенно зависят от всех существенных переменных g, кроме x_i.

Будем говорить, что функция имеет *запретную четверку*, если на области ее определения существуют две пары соседних по одной и той же переменной наборов, на которых функция совпадает с этой переменной и ее отрицанием соответственно. Заметим, что функция, не содержащая запретных четверок, является поляризуемой. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет *запретную шестерку*, если на области ее определения или области определения какой-либо обобщенно однотипной с ней функции существуют две тройки наборов: $(0, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, $(0, 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$, $(1, 0, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ и $(0, 1, \beta_3, \ldots, \beta_n)$, $(1, 0, \beta_3, \ldots, \beta_n)$, $(1, 1, \beta_3, \ldots, \beta_n)$, на которых рассматриваемая функция совпадает с дизъюнкцией $x_1 \vee x_2$ и конъюнкцией $x_1 \cdot x_2$ соответственно.

Функциями Стеценко называются функции следующих пяти семейств:

$$\begin{aligned}
f_d^{(s)} &= x_1 \cdot (x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_s) \vee x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s, && s \geqslant 3,\\
f_t^{(s)} &= x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_s \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s, && s \geqslant 2,\\
f_m^{(s)} &= x_1 \cdot (x_2 \vee \ldots \vee x_s) \vee x_2 \cdot \ldots \cdot x_s, && s \geqslant 3,\\
f_4 &= x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) \vee x_3 \cdot x_4, &&\\
f_5 &= x_1 \cdot (x_3 \cdot x_4 \vee x_5) \vee x_2 \cdot (x_3 \vee x_4 \cdot x_5). &&
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие свойства.

Свойство 1. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ повторна.*

Свойство 2. *Из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой констант можно получить функцию, обладающую отмеченной переменной.*

Свойство 3. *Из функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой констант можно получить функцию, обобщенно однотипную с некоторой функцией Стеценко.*

Свойство 4. *У функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеется запретная четверка или запретная шестерка.*

Здесь и далее считаем, что функция f также может быть получена из себя самой подстановкой констант.

Теорема Субботовской ([1]). *Свойства* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Теорема Стеценко ([2]). *Свойства* 2 *и* 3 *эквивалентны.*

Отметим, что следующие четыре утверждения доказываются тривиально.

Утверждение 1. *Всякая функция Стеценко имеет отмеченную переменную*: (3) $\Rightarrow$ (2).

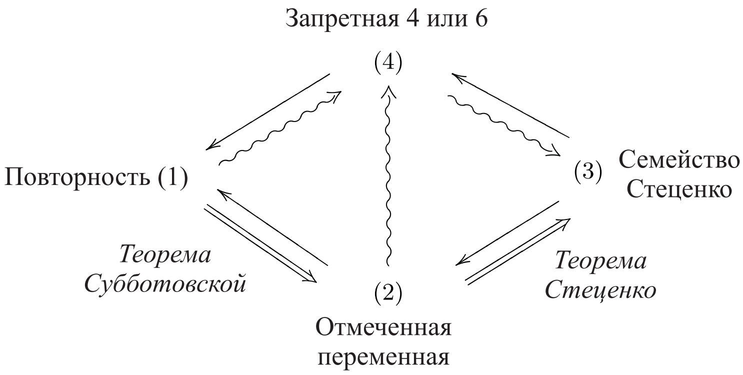
Утверждение 2. *Всякая функция, обладающая отмеченной переменной, повторна*: (2) $\Rightarrow$ (1).

Утверждение 3. *Всякая функция Стеценко имеет запретную четверку либо запретную шестерку*: (3) $\Rightarrow$ (4).

Утверждение 4. *Всякая функция, имеющая запретную четверку либо запретную шестерку, повторна*: $(4) \Rightarrow (1)$.

Из теоремы Субботовской, теоремы Стеценко и утверждений 3, 4 вытекает эквивалентность свойств 1, 2, 3 и 4.

В работе предложен обходной вариант доказательства теоремы Стеценко путем доказательства справедливости импликаций $(1), (2) \Rightarrow (4)$ и $(4) \Rightarrow (3)$. Справедливость теоремы Субботовской при этом предполагается известной.



Символом f^x_σ будем обозначать функцию, получаемую из f подстановкой константы σ на место переменной x. Вообще, функции, получаемые из f подстановками констант на места каких-либо переменных, будем называть *подфункциями* функции f. Функция f также считается своей подфункцией, в отличие от всех остальных — *собственных* подфункций.

Однозначность представления бесповторных функций деревьями, упомянутого в предложении 1, была доказана В.А. Гурвичем [3]: для любой пары существенных переменных x_i, x_j из бесповторной функции f подстановкой констант на места остальных переменных можно получить либо конъюнкцию $x_i \cdot x_j$, либо дизъюнкцию $x_i \vee x_j$, но не обе эти функции, при этом сама функция f однозначно определяется множеством ее существенных переменных и информацией о наличии всевозможных подфункций вида $x_i \cdot x_j$ и $x_i \vee x_j$.

Связь между бесповторными функциями различного числа переменных обсуждалась в работе [4], а однозначное представление бесповторных функций в более широких базисах получено в [5].

Лемма 1. *Для поляризуемой повторной функции можно найти шесть наборов, доказывающих ее повторность.*

Из леммы 1 (без использования теоремы Стеценко) вытекает

Теорема 1. *Всякая повторная функция имеет запретную четверку или запретную шестерку*: $(1), (2) \Rightarrow (4)$.

Перейдем к импликации $(4) \Rightarrow (3)$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть функция f имеет запретную четверку по переменной x и все ее собственные подфункции бесповторны. Пусть каждая из остальных переменных либо монотонна, либо антимонотонна. Тогда f обобщенно однотипна с функцией $f_d^{(3)}$ из первого семейства Стеценко.*

Лемма 3. *Пусть функция f имеет запретную четверку по переменной x и все ее собственные подфункции бесповторны. Пусть переменная z функции f не является ни монотонной, ни антимонотонной. Тогда f обобщенно однотипна с одной из функций $f_d^{(s)}$ или $f_t^{(s)}$ из первого или второго семейства Стеценко соответственно.*

Теорема 2. *Всякая функция, имеющая запретную четверку, обладает подфункцией, обобщенно однотипной с некоторой функцией первого или второго семейства Стеценко, т. е. с* $f_d^{(s)}$ *или* $f_t^{(s)}$.

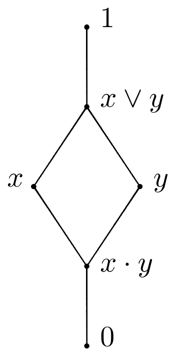
Доказательство теоремы 2 вытекает из лемм 2 и 3.

Рассмотрим теперь функцию $g(x, y, z_1, \dots, z_l)$ без запретной четверки, обладающую единственной запретной шестеркой вида

$$\begin{aligned} &g(0,0,\alpha_1,\dots,\alpha_l) = 0, \quad g(1,1,\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_l) = 1,\\ &g(1,0,\alpha_1,\dots,\alpha_l) = 1, \quad g(0,1,\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_l) = 0,\\ &g(0,1,\alpha_1,\dots,\alpha_l) = 1, \quad g(1,0,\overline{\alpha}_1,\dots,\overline{\alpha}_l) = 0. \end{aligned}$$

Она поляризуема, а следовательно, может рассматриваться как монотонная (воспользовавшись преобразованиями обобщенной однотипности, этого всегда можно добиться).

Введем дискретную функцию $F\colon \{0,1\}^l \to \{0, 1, x, y, x \vee y, x \cdot y\}$ по правилу $F(\beta_1, \dots, \beta_l) = g(x, y, \beta_1, \dots, \beta_l)$. При этом $F(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = x \vee y$, $F(\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_l) = x \cdot y$, на остальных наборах $F(\beta_1, \dots, \beta_l) \in \{0, 1, x, y\}$. Тогда F можно рассматривать как монотонное отображение переменных $z_1, \dots, z_l$, где $l \geqslant 1$, в частичный шестиэлементный порядок монотонных функций двух переменных $0 < x \cdot y < x, y < x \vee y < 1$ по правилу



Лемма 4. *Пусть f обладает запретной шестеркой и монотонна, а все ее собственные подфункции бесповторны. Пусть $F(0, \dots, 0) = x \cdot y$ и $F(1, \dots, 1) = x \vee y$. Тогда f обобщенно однотипна с некоторой функцией третьего либо четвертого семейства Стеценко, т. е. с $f_m^{(s)}$ при $s \geq 3$ либо с f_4.*

Лемма 5. *Пусть f обладает запретной шестеркой и монотонна, а все ее собственные подфункции бесповторны. Пусть* $F(0, \dots, 0) = 0$ *и* $F(1, \dots, 1) = 1$, *а на промежуточных наборах F принимает значения $x \cdot y$ и $x \vee y$ и, возможно, 0, 1, x и y. Тогда f обобщенно однотипна с некоторой функцией третьего либо пятого семейства Стеценко, т. е. с $f_m^{(s)}$ при $s \geq 3$ либо с f_5.*

Доказательство. Так как все собственные подфункции f бесповторны, то F принимает каждое из значений $x \cdot y$ и $x \vee y$ ровно на одном наборе, причем эти два набора противоположны. Рассмотрим интервалы булева куба между этими наборами и наборами **0**, **1**. Функция F обладает на этих интервалах следующими свойствами:

— на *нижнем левом* подкубе (от 0 до $x \cdot y$) функция F равна нулю всюду, кроме верхней точки, в которой она принимает значение $x \cdot y$;

— на *верхнем правом* подкубе (от $x \vee y$ до 1) функция F равна единице всюду, кроме нижней точки, в которой она принимает значение $x \vee y$;

— на *верхнем левом* подкубе (от $x \cdot y$ до 1) в нижней точке, и только в ней, функция F равна $x \cdot y$, а в промежуточных точках F принимает значения из множества $\{x, y, 1\}$. Из строения рассматриваемого частично упорядоченного множества следует, что на данном подкубе есть антицепи верхних x и верхних y (в объединении также образующие антицепь), везде под ними реализуются только x и y соответственно. Во всех остальных точках функция F равна единице;

— на *нижнем правом* подкубе (от 0 до $x \vee y$) в верхней точке, и только в ней, функция F равна $x \vee y$, в промежуточных точках — $\{x, y, 0\}$. Аналогично предыдущему пункту, на этом подкубе есть антицепи нижних x, нижних y, везде над ними реализуются только x и y соответственно. Во всех остальных точках функция F равна нулю.

Уточним строение верхнего левого и нижнего правого подкубов. Пусть $z_{ij}^{\vee}$, $i, j = 1, 2, 3$, — дизъюнкции различных групп переменных $\mathbf{z}_{ij}$, содержащих по $k_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, 3$, переменных соответственно; $z_{ij}^{\&}$, $i, j = 1, 2, 3$, — конъюнкции тех же групп переменных $\mathbf{z}_{ij}$. На исследуемых подкубах реализуются функции соответственно

$$(x \vee z_{11}^{\vee} \vee z_{12}^{\vee} \vee z_{13}^{\vee}) \cdot (y \vee z_{21}^{\vee} \vee z_{22}^{\vee} \vee z_{23}^{\vee}) \vee z_{31}^{\vee} \vee z_{32}^{\vee} \vee z_{33}^{\vee},$$
$$(x \cdot z_{11}^{\&} \cdot z_{21}^{\&} \cdot z_{31}^{\&} \vee y \cdot z_{12}^{\&} \cdot z_{22}^{\&} \cdot z_{32}^{\&}) \cdot z_{13}^{\&} \cdot z_{23}^{\&} \cdot z_{33}^{\&}.$$

Выясним конкретный вид этих функций, подставляя константы вместо x, y в f.

Подставим вначале $x = 0$. Предположим, что $k_{11} = k_{12} = k_{13} = 0$. Тогда функции на рассматриваемых подкубах равны соответственно

$$z_{31}^{\vee} \vee z_{32}^{\vee} \vee z_{33}^{\vee},$$
$$y \cdot z_{22}^{\&} \cdot z_{32}^{\&} \cdot z_{23}^{\&} \cdot z_{33}^{\&}.$$

Таким образом, подфункция функции f, получаемая подстановкой $x = 0$, обладает подфункциями $z_{32}^{\vee} \vee z_{33}^{\vee}$ и $z_{32}^{\&} \& z_{33}^{\&}$. С другой стороны, эта подфункция бесповторна и, следовательно, не имеет запретных шестерок. Следовательно, общее число переменных в множествах $\mathbf{z}_{32}$ и $\mathbf{z}_{33}$ не превосходит 1: $k_{32} + k_{33} \leq 1$. В случае же $k_{11} + k_{12} + k_{13} > 0$ с помощью аналогичных рассуждений получаем $k_{33} = k_{32} = k_{23} = k_{22} = 0$ и $k_{12} + k_{13} \leqslant 1$.

Три остальные подстановки приводят к следующим результатам:

— при $y = 0$, если $k_{21} = k_{22} = k_{23} = 0$, то $k_{31} + k_{33} \leqslant 1$; если же $k_{21} + k_{22} + k_{23} > 0$, то $k_{33} = k_{31} = k_{13} = k_{11} = 0$ и $k_{21} + k_{23} \leqslant 1$;

— при $x = 1$, если $k_{11} = k_{21} = k_{31} = 0$, то $k_{23} + k_{33} \leqslant 1$; если же $k_{11} + k_{21} + k_{31} > 0$, то $k_{33} = k_{32} = k_{23} = k_{22} = 0$ и $k_{21} + k_{31} \leqslant 1$;

— при $y = 1$, если $k_{12} = k_{22} = k_{32} = 0$, то $k_{13} + k_{33} \leqslant 1$; если же $k_{12} + k_{22} + k_{32} > 0$, то $k_{33} = k_{31} = k_{13} = k_{11} = 0$ и $k_{12} + k_{32} \leqslant 1$.

Лишь четыре группы переменных могут быть одновременно отличными от нуля: $k_{33} = 1$; $k_{12} \leqslant 1$, $k_{21} \leqslant 1$ и $k_{12} + k_{21} > 0$; k_{11}, $k_{13} \leqslant 1$, $k_{31} \leqslant 1$; k_{22}, $k_{23} \leqslant 1$, $k_{32} \leqslant 1$. Изучение порождаемых ими функций приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Всякая поляризуемая функция, имеющая запретную шестерку, обладает подфункцией, обобщенно однотипной с некоторой функцией третьего, четвертого или пятого семейства Стеценко, т. е. с* $f_m^{(s)}$, f_4 *или* f_5.

Доказательство теоремы 3 вытекает из лемм 4 и 5.

Теорема 4. *Всякая функция, имеющая запретную четверку или запретную шестерку, обладает подфункцией, обобщенно однотипной с некоторой функцией Стеценко*: (4) $\Rightarrow$ (3).

Доказательство теоремы 4 следует из теорем 2 и 3.

Литература

[1] Субботовская Б.А. *О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами*, ДАН СССР **149** (4), 784–787 (1963).

[2] Стеценко В.А. *О предплохих базисах в* P_2, Матем. вопр. кибернетики, 4, М.: Физматлит, 139–177 (1992).

[3] Гурвич В.А. *О бесповторных булевых функциях*, УМН **32** (3), 183–184 (1977).

[4] Вороненко А.А. *О длине проверяющего теста для бесповторных функций в базисе* $\{0, 1, \&, \vee, \neg\}$, Дискретн. математика **17** (2), 139–143 (2005).

[5] Вороненко А.А. *О проверяющих тестах для бесповторных функций*, Матем. вопр. кибернетики, 11, М.: Физматлит, 163–176 (2002).

А.А. Вороненко

профессор, кафедра математической кибернетики,
Московский государственный университет,
Ленинские горы, д. 1, ГСП-1, г. Москва, 119991,

e-mail: dm6@cs.msu.ru

В.С. Федорова

младший научный сотрудник, кафедра математической кибернетики,
Московский государственный университет,
Ленинские горы, д. 1, ГСП-1, г. Москва, 119991,

e-mail: fedorovavs@cs.msu.ru

Д.В. Чистиков

аспирант, кафедра математической кибернетики,
Московский государственный университет,
Ленинские горы, д. 1, ГСП-1, г. Москва, 119991,

e-mail: dch@cs.msu.ru

A.A. Voronenko

Professor, Chair of Mathematical Cybernetics,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, GSP-1, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: dm6@cs.msu.ru

V.S. Fedorova

Junior Researcher, Chair of Mathematical Cybernetics,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, GSP-1, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: fedorovavs@cs.msu.ru

D.V. Chistikov

Postgraduate, Chair of Mathematical Cybernetics,
Moscow State University,
Leninskie Gory 1, GSP-1, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: dch@cs.msu.ru