Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №11, с. 3–21 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0099*

В.Ю. ЗИНЧЕНКО, Е.И. ЯКОВЛЕВ

ГЛАДКИЕ ПОЧТИ Δ-РАССЛОЕНИЯ НАД ПОЛИЭДРАМИ

Аннотация. В работе строится и исследуется категория главных расслоений, обладающих свойствами: базой является полиэдр, а структурной группой — k-мерный тор; функции перехода произвольного атласа расслоения гладкие на симплексах; на базе задано симплициальное действие конечной группы Δ, обладающее многозначным поднятием на тотальное пространство. Изучены инвариантные связности, построены характеристические классы, доказаны их целочисленность и реализуемость.

Ключевые слова: полиэдр, симплициальное действие группы, форма Тома–Уитни, главное расслоение, многозначное действие, инвариантная связность, почти Δ-расслоение.

УДК: 515.164

Abstract. In this paper we construct and study a category of principal fiber bundles with the following properties: 1) the base is a simplicial complex and the structure group is a k-dimensional torus, 2) maps of any atlas are smooth on every simplex of the base, and 3) the finite group Δ acts on the base and this action has a multi-valued lifting to the total space. We study invariant connections and built integer-valued realizable characteristic classes.

Keywords: simplicial complex, simplicial group action, Thom–Whitney forms, principal fiber bundle, multi-valued action, invariant connection, almost Δ-bundles.

Введение

Как известно [1], механическая система с гироскопическими силами может обладать многозначным функционалом действия. Данное обстоятельство существенно усложняет исследование ее глобальной динамики в силу неприменимости классических результатов и методов вариационного исчисления. В ряде случаев преодолению этих трудностей способствует применение ассоциированных с гироскопической системой Γ главных расслоений ξ над конфигурационным многообразием B [2]. При этом оказывается, что наличие у Γ конечной группы симметрий Δ равносильно тому, что ξ обладает структурой почти Δ-расслоения [3].

По видимому, системы указанного типа имеет смысл рассматривать не только на обычных гладких многообразиях, но и на многообразиях с особенностями, например, орбифолдах. Особенности могут быть различными, но, как правило, обобщения гладкого многообразия обладают триангуляциями. Поэтому, на наш взгляд, целесообразно распространить исследование ассоциированных с гироскопическими системами расслоений на случай, когда база B является полиэдром. Поскольку полиэдр изначально представляет собой только топологический и кусочно линейный объект, то первым шагом на пути к решению данной

Поступила 31.03.2009

задачи является задание гладкой структуры на B. Существенную роль при этом играют дифференциальные формы на полиэдрах и их открытых подмножествах — формы Тома–Уитни.

1. Гладкая структура на полиэдре

Всюду в работе будем считать, что B — связный полиэдр, состоящий из конечного числа прямолинейных симплексов пространства $\mathbb{R}^N$, $K(B)$ — его симплициальный комплекс, а $K^n(B)$ — множества симплексов из $K(B)$ размерностей $n = 0, 1, \ldots, m$, где $m = \dim B \leqslant N$. Для каждого $\sigma \in K^n(B)$ символом Q_σ будем обозначать n-мерную плоскость пространства $\mathbb{R}^N$, содержащую симплекс σ. Топология на B предполагается индуцированной обычной топологией пространства $\mathbb{R}^N$. Также везде, называя тот или иной объект гладким, мы подразумеваем его гладкость класса C^∞.

Пусть U — открытое подмножество полиэдра B. Если $\sigma \in K(B)$ и $\sigma \cap U \neq \emptyset$, то пересечение $\sigma \cap U$ будем называть U-симплексом. Если γ — грань симплекса σ, имеющая непустое пересечение с U, то множество $\gamma \cap U$ назовем гранью U-симплекса $\sigma \cap U$. Совокупность всех U-симплексов обозначим символом $K(U)$.

Рассмотрим целое неотрицательное число q, U-симплекс $\sigma \cap U \in K(U)$ и набор $\widehat{\Lambda}^q(\sigma \cap U)$ гладких внешних q-форм, заданных на его окрестностях $O(\sigma \cap U) \subset Q_\sigma$. Две формы из этого набора будем считать эквивалентными, если они совпадают на пересечении их областей определения. Класс эквивалентности $\omega_U^\sigma \subset \widehat{\Lambda}^q(\sigma \cap U)$ назовем гладкой q-формой на $\sigma \cap U$.

Если $\gamma \cap U$ — грань U-симплекса $\sigma \cap U$, то $O(\gamma \cap U) = O(\sigma \cap U) \cap Q_\gamma$ — окрестность множества $\gamma \cap U$ в плоскости Q_γ. При этом сужение представителя формы ω_U^σ с ее области определения $O(\sigma \cap U)$ на подмножество $O(\gamma \cap U) \subset O(\sigma \cap U)$ определяет гладкую q-форму на $\gamma \cap U$, которую естественно называть сужением формы ω_U^σ.

Предположим теперь, что на каждом U-симплексе $\sigma \cap U \in K(U)$ задана гладкая q-форма ω_U^σ, причем если $\gamma \cap U$ — грань $\sigma \cap U$, то ω_U^γ совпадает с сужением на $\gamma \cap U$ формы ω_U^σ. Тогда формы из семейства $\omega_U = \{\omega_U^\sigma \mid \sigma \cap U \in K(U)\}$ будут называться согласованными, а само семейство ω_U — гладкой q-формой на U.

Заметим, что множество U может совпадать со всем полиэдром B. Как указано в [4], подобные конструкции для $U = B$ впервые рассматривались Р. Томом (не опубликовано) и Х. Уитни [5]. Поэтому их естественно назвать формами Тома–Уитни.

На множестве Λ_U^q всех гладких q-форм на U естественным образом вводятся операции сложения и умножения на действительные числа. С этими операциями Λ_U^q является линейным пространством. Для $U' \subset U$ определены гомоморфизмы ограничения $\Lambda_U^q \to \Lambda_{U'}^q$. Таким образом, сопоставив каждому открытому подмножеству $U \subset B$ абелеву группу Λ_U^q, мы построили предпучок $\mathcal{L}^q$ на B.

Лемма 1. *Предпучок $\mathcal{L}^q$ является пучком.*

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $\mathcal{V}$ множества U, состоящее из подмножеств $V \subset U$. Тогда если $\omega_U = \{\omega_U^\sigma \mid \sigma \cap U \in K(U)\} \in \Lambda_U^q$ и $\omega_U|_V = 0$ для всех $V \in \mathcal{V}$, то для произвольных $\sigma \cap U \in K(U)$ и $u \in \sigma \cap U$ найдется окрестность точки u, на которой форма ω_U^σ обращается в нуль. Поэтому $\omega_U^\sigma = 0$ на всем $\sigma \cap U$. Поскольку это верно для всех $\sigma \cap U \in K(U)$, то и $\omega_U = 0$.

Предположим теперь, что на каждом элементе V покрытия $\mathcal{V}$ задана q-форма ω_V, причем если $V, W \in \mathcal{V}$ и $V \cap W \neq \emptyset$, то $\omega_V|_{V \cap W} = \omega_W|_{V \cap W}$. Выберем произвольный U-симплекс $\sigma \cap U \in K(U)$. Непустые пересечения $\sigma \cap V$, $V \in \mathcal{V}$, образуют его открытое покрытие $\mathcal{V}(\sigma)$. По условию сужения форм ω_V^σ и ω_W^σ на непустых пересечениях $\sigma \cap V \cap W$ совпадают.

Следовательно, найдется такая гладкая q-форма ω_U^σ на U-симплексе $\sigma\cap U$, что $\omega_U^\sigma|_{\sigma\cap V} = \omega_V^\sigma$ для всех $\sigma \cap V \in \mathcal{V}(\sigma)$. Этим построено семейство $\omega_U = \{\omega_U^\sigma \mid \sigma \cap U \in K(U)\}$.

Если $\gamma\cap U$ — грань U-симплекса $\sigma\cap U$, то для любой точки $u \in \gamma\cap U$ найдется содержащий ее элемент V покрытия $\mathcal{V}$. При этом $\omega_U^\sigma|_{\sigma\cap V} = \omega_V^\sigma$ и $\omega_U^\gamma|_{\gamma\cap V} = \omega_V^\gamma$. Но сужение формы ω_V^σ на $\gamma\cap V$ совпадает с ω_V^γ, поскольку обе они принадлежат ω_V. Таким образом, формы $\omega_U^\sigma|_{\gamma\cap U}$ и ω_U^γ равны на окрестности $\gamma\cap V$ произвольной точки $u \in \gamma\cap U$. Следовательно, $\omega_U^\sigma|_{\gamma\cap U} = \omega_U^\gamma$ и $\omega_U \in \Lambda_U^q$. По построению $\omega_U|_V = \omega_V$ для всех $V \in \mathcal{V}$. □

Лемма 2. *Для любого локально конечного открытого покрытия $\mathcal{U}$ полиэдра B существует подчиненное ему гладкое разбиение единицы.*

Доказательство. В силу компактности полиэдра B покрытие $\mathcal{U}$ конечно. Каждое множество $U \in \mathcal{U}$ представляет собой пересечение полиэдра B с некоторым открытым подмножеством $W_U \subset \mathbb{R}^N$. При этом объединение $M = \cup_{U\in\mathcal{U}} W_U$ является открытым подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$, а семейство $\{W_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ — его конечным открытым покрытием. Если $\{l_U : M \to \mathbb{R} \mid U \in \mathcal{U}\}$ — подчиненное этому покрытию гладкое разбиение единицы на M, то сужения $l_U|_B : B \to \mathbb{R}$ образуют гладкое разбиение единицы на B подчиненное покрытию $\mathcal{U}$. □

Из леммы 2 следует (см., например, [6], гл. 5, п. 5.33)

Лемма 3. *Пучок $\mathcal{L}^q$ тонкий и потому для любых целых $n > 0$ и $q \geqslant 0$ группы когомологий $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{L}^q)$ произвольного локально конечного открытого покрытия $\mathcal{U}$ полиэдра B с коэффициентами в пучке $\mathcal{L}^q$ равны нулю.*

Полагая $d\omega_U = \{d\omega_U^\sigma \mid \sigma\cap U \in K(U)\}$ для всех $\omega_U = \{\omega_U^\sigma \mid \sigma\cap U \in K(U)\} \in \Lambda_U^q$, определим гомоморфизм $d : \Lambda_U^q \to \Lambda_U^{q+1}$. Группы гомологий соответствующего коцепного комплекса обозначим символами $H_{deR}^q(U)$.

Лемма 4. *Пусть $\rho \in K(B)$ и $U = \mathrm{st}(\rho)$ — открытая звезда симплекса ρ. Тогда $H_{deR}^q(U)=0$ для всех $q > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим замкнутую форму $\omega_U = \{\omega_U^\sigma \mid \sigma \cap U \in K(U)\} \in \Lambda_U^q$ и произвольный U-симплекс $\sigma \cap U \in K(U)$. Если $\dim\sigma = n$, то имеются содержащая σ n-мерная плоскость $Q_\sigma \subset \mathbb{R}^N$, окрестность $O(\sigma \cap U) \subset Q_\sigma$ и гладкая q-форма $\widetilde{\omega}^\sigma \in \omega_U^\sigma$ на $O(\sigma \cap U)$. Без ограничения общности можно предполагать, что $O(\sigma \cap U)$ — звездное множество относительно барицентра w симплекса ρ. Кроме того, если ρ имеет вершины $v_0, v_1, \dots, v_k$, то $n \geqslant k$ и симплекс σ натянут на вершины $v_0, v_1, \dots, v_n$. Введем на Q_σ декартову систему координат, считая w начальной точкой, а направленные отрезки $\overline{wv_1}, \dots, \overline{wv_n}$ — базисными векторами.

Положим $I = [0,1]$, $W_\sigma = I \times O(\sigma \cap U)$ и определим отображение $p_\sigma : W_\sigma \to O(\sigma \cap U)$ формулой $p_\sigma(t, u^1, \dots, u^n) = (tu^1, \dots, tu^n)$. Тогда W_σ — гладкое многообразие с краем, а p_σ — гладкое отображение. При этом

$$p_\sigma^*\widetilde{\omega}^\sigma = dt \wedge \sum_{i_1<\dots<i_{q-1}} \alpha^\sigma_{i_1\dots i_{q-1}} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{q-1}} + \sum_{j_1<\dots<j_q} \beta^\sigma_{j_1\dots j_q} du^{j_1} \wedge \dots \wedge du^{j_q}.$$

Полагая

$$\widetilde{\lambda}^\sigma_{i_1\dots i_{q-1}}(u^1, \dots, u^n) = \int_0^1 \alpha^\sigma_{i_1\dots i_{q-1}}(t, u^1, \dots, u^n)dt, \quad \widetilde{\lambda}^\sigma = \sum_{i_1<\dots<i_{q-1}} \widetilde{\lambda}^\sigma_{i_1\dots i_{q-1}} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{q-1}},$$

построим гладкую $(q-1)$-форму $\widetilde{\lambda}^\sigma$ на $O(\sigma \cap U)$. Согласно стандартному доказательству леммы Пуанкаре (см., например, [7]) из равенства $d\widetilde{\omega}^\sigma = 0$ следует $d\widetilde{\lambda}^\sigma = \widetilde{\omega}^\sigma$. Если λ_U^σ — класс эквивалентности формы $\widetilde{\lambda}^\sigma$, то $d\lambda_U^\sigma = \omega_U^\sigma$.

Выполнив указанные построения для всех $\sigma \cap U \in K(U)$, получим набор $\lambda_U = \{\lambda_U^\sigma \mid \sigma \cap U \in K(U)\} \in \Lambda_U^{q-1}$.

Пусть теперь $\tau \cap U$ — грань U-симплекса $\sigma \cap U$. Рассмотрим плоскость Q_τ, окрестность $O(\tau \cap U) \subset Q_\tau$ и представитель $\widetilde{\omega}^\tau$ формы ω_U^τ на $O(\tau \cap U)$. Как уже отмечалось выше, окрестность можно выбрать так, чтобы $O(\tau \cap U) \subset O(\sigma \cap U)$. При этом определены включения $\imath : O(\tau \cap U) \to O(\sigma \cap U)$ и $\jmath : W_\tau \to W_\sigma$. Они удовлетворяют равенству $\imath \circ p_\tau = p_\sigma \circ \jmath$.

В силу согласованности форм ω_U^τ и ω_U^σ имеем $\widetilde{\omega}^\tau = \imath^* \widetilde{\omega}^\sigma$. Поэтому $p_\tau^* \widetilde{\omega}^\tau = p_\tau^*(\imath^* \widetilde{\omega}^\sigma) = \jmath^*(p_\sigma^* \widetilde{\omega}^\sigma)$. Отсюда по построению следует $\widetilde{\lambda}^\tau = \imath^* \widetilde{\lambda}^\sigma$. Таким образом, формы λ_U^τ и λ_U^σ согласованы, а набор λ_U является корректно определенной $(q-1)$-формой на U, удовлетворяющей равенству $d\lambda_U = \omega_U$. □

Предположим, что $\mathfrak{g}$ — векторное пространство с базисом $E_1, \dots, E_k$ и $\omega_U^i \in \Lambda_U^q$, $i = 1, \dots, k$. Тогда линейную комбинацию $\omega_U = \omega_U^1 E_1 + \dots + \omega_U^k E_k$ естественно называть гладкой q-формой на U со значениями в $\mathfrak{g}$. При этом если $\omega_U^i = \{\omega_U^{i\sigma} \mid \sigma \cap U \in K(U)\}$, то ω_U состоит из согласованных $\mathfrak{g}$-значных q-форм $\omega_U^{1\sigma} E_1 + \dots + \omega_U^{k\sigma} E_k$ на U-симплексах $\sigma \cap U \in K(U)$.

Пусть U — открытое подмножество полиэдра B, M — гладкое многообразие и $\sigma \cap U \in K(U)$. Рассмотрим набор гладких отображений вида $f_{O(\sigma \cap U)} : O(\sigma \cap U) \to M$, где $O(\sigma \cap U)$ — некоторая окрестность U-симплекса $\sigma \cap U$ в плоскости Q_σ. Как и выше, два таких отображения будут считаться эквивалентными, если они совпадают на пересечении их областей определения. Соответствующие классы эквивалентности будут называться гладкими отображениями из $\sigma \cap U$ в M.

Непрерывное отображение $f : U \to M$ называется гладким, если для произвольного $\sigma \cap U \in K(U)$ сужение $f^\sigma = f|_{\sigma \cap U}$ является гладким отображением из $\sigma \cap U$ в M ([8], гл. 2, п. 8). Совокупность всех гладких отображений из U в M обозначим символом $\mathcal{F}(U, M)$.

Множество функций $\mathcal{F}(B, \mathbb{R}) = \Lambda_B^0$ является гладкостью на B в смысле ([9], гл. 4, п. 1). При этом пара $(B, \mathcal{F}(B, \mathbb{R}))$ представляет собой гладкое предмногообразие.

Рассмотрим гладкое отображение $f : U \to M$ и точки $u \in U$ и $v = f(u)$. Если $u \in \sigma \cap U$, то имеются окрестности $O(\sigma \cap U) \subset Q_\sigma$ и гладкие отображения $f_{O(\sigma \cap U)} : O(\sigma \cap U) \to M$, представляющие f^σ. Их дифференциалы в точке u совпадают и потому корректно определяют линейное отображение $df_u^\sigma : T_u Q_\sigma \to T_v M$. Если $\gamma \cap U$ — грань U-симплекса $\sigma \cap U$ и $u \in \gamma \cap U$, то в силу согласованности отображений f^σ и f^γ сужение $df_u^\sigma|_{Q_\gamma}$ совпадает с df_u^γ. Поэтому семейство $df_u = \{df_u^\sigma \mid \sigma \cap U \in K(U)\}$ логично называть дифференциалом отображения f в точке u ([8], гл. 2, п. 8).

Пусть G — k-мерная группа Ли, а $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Тогда на G определена каноническая 1-форма θ, ставящая в соответствие точке $g \in G$ и касательному вектору $Y \in T_g G$ левоинвариантное векторное поле $A \in \mathfrak{g}$, принимающее в точке g значение $A(g) = Y$. Если $E_1, \dots, E_k$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$, то $\theta = \theta^1 E_1 + \dots + \theta^k E_k$, где θ^i — обычные формы на G с действительными значениями.

Рассмотрим гладкое отображение $f : U \to G$, число $i \in \{1, \dots, k\}$, U-симплекс $\sigma \cap U$ и представитель $\widehat{f} = f|_{O(\sigma \cap U)} \in f^\sigma$. Произвольной точке $\widehat{u} \in O(\sigma \cap U)$ поставим в соответствие композицию $\theta_{\widehat{g}}^i \circ d\widehat{f}_{\widehat{u}}$, где $\widehat{g} = \widehat{f}(\widehat{u})$. Этим определена гладкая 1-форма $\theta^i d\widehat{f}$ на $O(\sigma \cap U)$. Ее класс эквивалентности обозначим символом $\theta^i df^\sigma$. Тогда набор $\theta^i df = \{\theta^i df^\sigma \mid \sigma \cap U \in K(U)\}$ является гладкой 1-формой на U, а линейная комбинация $\theta df = \theta^1 df + \dots + \theta^k df$ — гладкой 1-формой со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

2. Расслоения с симплициальным действием группы на базе

Пусть Δ — конечная группа и $R : B \times \Delta \to B$ — правое симплициальное действие. Как обычно, будем полагать $R(a, \delta) = R_\delta(a) = a \cdot \delta$ для всех $a \in B$ и $\delta \in \Delta$. Действие R называется регулярным, если выполнены следующие условия:

1) для любых $\delta \in \Delta$ и $\sigma \in K(B)$ все точки множества $\sigma \cap \sigma \cdot \delta$ неподвижны относительно гомеоморфизма $R_\delta : B \to B$;

2) если $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$ и комплекс $K(B)$ содержит симплексы с вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_n$ и $v_0 \cdot \delta_0, v_1 \cdot \delta_1, \ldots, v_n \cdot \delta_n$ соответственно, то существует такой элемент $\delta \in \Delta$, что $v_i \cdot \delta_i = v_i \cdot \delta$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$.

Любое симплициальное действие конечной группы на полиэдре становится регулярным после второго барицентрического подразделения ([10], гл. III, п. 1). Поэтому всюду далее предполагается, что R — регулярное действие.

Рассмотрим главное расслоение $\xi = (E, p, B, T^k)$ с проекцией $p : E \to B$ и структурной группой $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$.

Определение 1. Открытое покрытие $\mathcal{U}$ полиэдра B будем называть

1. (ξ, Δ)-покрытием, если $R_\delta(U) = U$ для всех $U \in \mathcal{U}$, $\delta \in \Delta$ и существует ассоциированный с $\mathcal{U}$ атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ расслоения ξ;
2. простым Δ-покрытием, если $R_\delta(U) = U$ и $H^q_{deR}(U) = 0$ для тех же U и δ и всех $q > 0$.

Предложение 1. *Для любого регулярного симплициального действия $R : B \times \Delta \to B$ существует простое Δ-покрытие полиэдра B, являющееся (ξ, Δ)-покрытием для произвольного главного расслоения $\xi = (E, p, B, T^k)$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{st}(v)$ — открытая звезда вершины $v \in K^0(B)$. В силу регулярности действия R ее орбита $\mathrm{st}(v) \cdot \Delta$ представляет собой объединение попарно непересекающихся открытых звезд вершин из орбиты $v \cdot \Delta$. Положим $\mathcal{U} = \{\mathrm{st}(v) \cdot \Delta \mid v \in K^0(B)\}$. Тогда $\mathcal{U}$ — открытое покрытие полиэдра B, все его элементы инвариантны относительно действия R, а компонентами связности множеств $U \in \mathcal{U}$ являются открытые звезды вершин.

Если звезды $\mathrm{st}(v_1), \ldots, \mathrm{st}(v_k)$ имеют непустое пересечение V, то комплекс $K(B)$ содержит симплекс σ с вершинами $v_1, \ldots, v_k$. При этом $V = \mathrm{st}(\sigma)$ — открытая звезда симплекса σ и первое утверждение следует из леммы 4. Второе утверждение следует из того, что над объединением попарно непересекающихся стягиваемых открытых подмножеств базы B главное расслоение ξ тривиально. □

Пусть для главного расслоения $\xi = (E, p, B, T^k)$ заданы (ξ, Δ)-покрытие $\mathcal{U}$ базы B и ассоциированный с $\mathcal{U}$ атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Если $\xi_U : U \times T^k \to E_U$ и $\xi_V : V \times T^k \to E_V$ — карты атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $U \cap V \neq \emptyset$, то имеется непрерывное отображение $\xi_{VU} : U \bigcap V \to T^k$, удовлетворяющее равенству $\xi_U(a, t) = \xi_V(a, \xi_{VU}(a) + t)$ для $a \in U \cap V$ и $t \in T^k$. Оно называется функцией перехода от ξ_U к ξ_V.

Предположим, что $\xi_{VU} : U \bigcap V \to T^k$ — гладкое отображение, $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли группы T^k и θ — каноническая 1-форма на T^k. Тогда на пересечении $U \cap V$ определена 1-форма $\theta d\xi_{VU}$ со значениями в алгебре $\mathfrak{t}$. Договоримся ее называть формой перехода от карты ξ_U к карте ξ_V.

Определение 2. Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — атлас главного расслоения $\xi = (E, p, B, T^k)$, ассоциированный с (ξ, Δ)-покрытием $\mathcal{U}$ полиэдра B. Если все его функции перехода ξ_{VU} являются гладкими отображениями, а формы перехода $\theta d\xi_{VU}$ инвариантны относительно действия

$R : B \times \Delta \to B$, то назовем $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ гладким почти Δ-атласом. Два таких атласа договоримся считать эквивалентными, если их объединение также является гладким почти Δ-атласом. Класс эквивалентности $\mathcal{A}$ гладкого почти Δ-атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ назовем гладкой почти Δ-структурой на ξ, а пару $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ — гладким почти Δ-расслоением над полиэдром B.

Отказавшись в определении 2 от инвариантности элементов покрытия $\mathcal{U}$ и форм перехода атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, получим определение гладкого атласа и гладкой структуры на ξ, а также гладкого расслоения над B. В такой ситуации функцию $f : E \to \mathbb{R}$ логично считать гладкой в случае гладкости композиции $f \circ \xi_U : U \times T^k \to \mathbb{R}$ для любой карты $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$. При этом гладкость функций перехода атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ обеспечит корректность определения, а пространство E получит структуру гладкого предмногообразия, относительно которой проекция $p : E \to B$ станет гладким отображением. Но мы не будем систематически развивать эту точку зрения, поскольку далее она по существу нигде не понадобится.

Пусть $f : \xi \to \xi'$ — морфизм над B главных расслоений $\xi = (E, p, B, T^k)$ и $\xi' = (E', p', B, T^k)$. Предположим, что они обладают почти Δ-атласами $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ соответственно. Рассмотрим карты $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\xi'_V \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$, для которых $U \cap V \neq \emptyset$. Тогда найдется функция перехода $\zeta_{VU} : V \cap U \to T^k$, удовлетворяющая равенству $f \circ \xi_U(a, t) = \xi'_V(a, \zeta_{VU}(a) + t)$ для всех $a \in V \cap U$ и $t \in T^k$. Если она является гладким отображением, то на $V \cap U$ определена форма перехода $\theta d\zeta_{VU}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$ группы T^k.

Определение 3. Допустим, что расслоения ξ и ξ' обладают почти Δ-структурами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ и $f : \xi \to \xi'$ — морфизм над B. Если все функции перехода ζ_{VU}, связывающие карты некоторых атласов $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$, являются гладкими, а соответствующие формы перехода $\theta d\zeta_{VU}$ инвариантны относительно действия $R : B \times \Delta \to B$, то назовем f *морфизмом гладких почти Δ-расслоений* $\rho = (\xi, A)$ и $\rho' = (\xi', A')$ или *почти Δ-морфизмом.*

Нетрудно показать, что это определение не зависит от выбора атласов $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$. Следующее утверждение доказывается так же, как и в случае почти Δ-расслоений над гладкими многообразиями.

Предложение 2. *Пусть $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ и $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$ — почти Δ-расслоения с общей базой B, а $\{\xi_{VU}\}$ и $\{\xi'_{VU}\}$ — системы функций перехода атласов $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$. Морфизм $f : \rho \to \rho'$ существует в том и только том случае, если найдется семейство гладких отображений $\{\zeta_U : U \to T^k \mid U \in \mathcal{U}\}$ такое, что*

1) $\xi'_{VU} = \zeta_V + \xi_{VU} - \zeta_U$ *для всех $U, V \in \mathcal{U}$, $V \cap U \neq \emptyset$;*
2) *форма $\theta d\zeta_U$ инвариантна относительно действия R для каждого $U \in \mathcal{U}$.*

Следствие 1. Любой морфизм над B почти Δ-расслоений $\rho = (\xi, A)$ и $\rho' = (\xi', A')$ является изоморфизмом.

При фиксированных B, k, Δ и R почти Δ-расслоения с базой B и структурной группой T^k и их морфизмы образуют категорию $\mathcal{KP}(B, T^k, \Delta, R)$.

Рассмотрим расслоения $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$ и $\rho'' = (\xi', \mathcal{A}'')$ из категории $\mathcal{KP}(B, T^k, \Delta, R)$ и простое Δ-покрытие $\mathcal{U}$ базы B из предложения 1. Тогда найдутся почти Δ-атласы $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}''$ с системами функций перехода $\{\xi'_{VU}\}$ и $\{\xi''_{VU}\}$. Так как группа T^k коммутативна, то суммы $\xi_{VU} = \xi'_{VU} + \xi''_{VU}$ образуют коцикл. Поэтому существует главное расслоение ξ с базой B, структурной группой T^k и атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, обладающим системой функций перехода $\{\xi_{VU}\}$. Функции ξ_{VU} являются гладкими, а соответствующие формы перехода инвариантны относительно действия R в силу его перестановочности с действием структурной группы. Следовательно, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — почти Δ-атлас и, если $\mathcal{A}$ — его класс эквивалентности, то пара $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ представляет собой почти Δ-расслоение. При этом формула $[\rho] = [\rho'] + [\rho'']$

корректно определяет алгебраическую операцию на множестве $\mathcal{BP}(B, T^k, \Delta, R)$ классов эквивалентности объектов категории $\mathcal{KP}(B, T^k, \Delta, R)$, относительно которой $\mathcal{BP}(B, T^k, \Delta, R)$ становится абелевой группой.

Пусть ξ — главное расслоение с проекцией $p : E \to B$, структурной группой T^k и атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Каждая карта $\xi_U : U \times T^k \to E_U$ атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ позволяет определить действие $R^U : E_U \times \Delta \to E_U$ группы Δ на подпространстве $E_U = p^{-1}(U) \subset E$ с помощью формулы

$$R^U(\xi_U(a, t), \delta) = R^U_\delta(\xi_U(a, t)) = \xi_U(a \cdot \delta, t). \tag{1}$$

При этом для каждого $\delta \in \Delta$ выполнено равенство $p \circ R^U_\delta = R_\delta \circ p$.

Определение 4. Если $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — почти Δ-атлас расслоения ξ, то набор $\mathcal{R} = \{R^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ действий, определенных формулой (1), договоримся называть *многозначным действием группы* Δ *на* E.

Поскольку для каждого $\delta \in \Delta$ отображение $R^U_\delta : E_U \to E_U$ является автоморфизмом сужения расслоения ξ над U, то для любого элемента $\delta \in \Delta$ набор $\mathcal{R}_\delta = \{R^U_\delta \mid U \in \mathcal{U}\}$ можно считать *многозначным автоморфизмом* расслоения ξ, а Δ — *группой многозначных автоморфизмов*.

3. Инвариантные связности

Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — атлас расслоения $\xi = (E, p, B, T^k)$, для которого система функций перехода $\{\xi_{VU}\}$ состоит из гладких отображений. При этом определена система форм перехода $\{\theta d\xi_{VU}\}$. Предположим, что на каждом множестве $U \in \mathcal{U}$ задана гладкая 1-форма ω_U со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$ группы T^k, причем если $U, V \in \mathcal{U}$ и $U \cap V \neq \emptyset$, то на $U \cap V$ имеет место равенство

$$\omega_U - \omega_V = \theta d\xi_{VU}. \tag{2}$$

Если $E_1, \ldots, E_k$ и $e_1, \ldots, e_k$ — стандартные базисы алгебры $\mathfrak{t}$ и пространства $\mathbb{R}^k$ соответственно, то полагая $\mathfrak{i}(E_i) = e_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$, получим изоморфизм векторных пространств $\mathfrak{i} : \mathfrak{t} \to \mathbb{R}^k$. Положим $\overline{\omega}_U = \mathfrak{i} \circ \omega_U$ и $\overline{\theta} = \mathfrak{i} \circ \theta$. Поскольку $T^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$, то определено фактор отображение $\operatorname{Exp} : \mathbb{R}^k \to T^k$. При этом для всех $i = 1, \ldots, k$ имеют место равенства

$$\theta d \operatorname{Exp}(e_i) = E_i \quad \text{и} \quad \overline{\theta} d \operatorname{Exp}(e_i) = e_i. \tag{3}$$

Для произвольного открытого подмножества $U \subset B$ символом $\Omega(U)$ обозначим пространство кусочно-гладких путей в U, а символом $\widehat{U}$ — множество пар $(v, x) \in E \times \Omega(U)$, удовлетворяющих равенству $p(v) = x(0)$. Топологию на $\widehat{U}$ будем считать индуцированной топологией произведения $E \times \Omega(U)$. Пусть также $\Omega(E)$ — пространство всех путей в E.

Рассмотрим произвольную карту $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, кусочно-гладкий путь $x : I \to U$, некоторый элемент $g^U_0 \in T^k$ и точку $v = \xi_U(g^U_0, x(0)) \in E_U \subset E$. Тогда $(v, x) \in \widehat{U}$. Для любого $t \in I$ определим путь $x_t : I \to U$ формулой $x_t(s) = x(ts)$ и положим

$$H_U(v, x)(t) = \xi_U\Bigg(x(t), g^U_0 - \operatorname{Exp}\bigg(\int_{x_t} \overline{\omega}_U\bigg)\Bigg). \tag{4}$$

Предложение 3. *Формула* (4) *определяет непрерывное отображение* $H_U : \widehat{U} \to \Omega(E)$. *Оно инвариантно относительно действия структурной группы* T^k *на* E, *т. е.* $H_U(v \cdot g, x) = H_U(v, x) \cdot g$ *для всех* $(v, x) \in \widehat{U}$ *и* $g \in T^k$. *Если* ξ_V *— другая карта атласа* $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, $H_V : \widehat{V} \to \Omega(E)$ *— соответствующее ей отображение, определенное формулой вида* (4), *и* $U \cap V \neq \emptyset$, *то на* $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \widehat{U \cap V}$ *отображения* H_U *и* H_V *совпадают.*

Доказательство. Первые два утверждения следуют непосредственно из (4), в частности, в силу непрерывной зависимости интеграла от пути x_t.

Чтобы убедиться в совпадении H_U и H_V на пересечении $\widehat{U} \cap \widehat{V}$ рассмотрим кусочно-гладкий путь $x : I \to U \cap V$. Тогда если $\xi_U(g_0^U, x(0)) = v = \xi_V(g_0^V, x(0))$, то $g_0^V = g_0^U + \xi_{VU}(x(0))$. Отсюда согласно (4) и (2) следует

$$H_V(v,x)(t) = \xi_V\left(x(t), g_0^U + \xi_{VU}(x(0)) - \operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\omega}_U\right) + \operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\theta} d\xi_{VU}\right)\right). \qquad (5)$$

Так как $\operatorname{Exp} : \mathbb{R}^k \to T^k$ — накрытие, то найдется путь $\overline{x}_t : I \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющий равенству $\xi_{VU} \circ x_t = \operatorname{Exp} \circ \overline{x}_t$. При этом в силу (3)

$$\overline{\theta} d\xi_{VU}\left(\frac{dx_t}{ds}\right) = \overline{\theta} d \operatorname{Exp}\left(\frac{d\overline{x}_t}{ds}\right) = \frac{d\overline{x}_t}{ds}.$$

Но тогда

$$\int_{x_t} \overline{\theta} d\xi_{VU} = \int_0^1 \overline{\theta} d\xi_{VU}\left(\frac{dx_t}{ds}\right) ds = \overline{x}_t(1) - \overline{x}_t(0).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\theta} d\xi_{VU}\right) = \xi_{VU}(x_t(1)) - \xi_{VU}(x_t(0)) = \xi_{VU}(x(t)) - \xi_{VU}(x(0)).$$

Подставив полученный результат в (5), получим

$$H_V(v,x)(t) = \xi_V\left(x(t), \xi_{VU}(x(t)) + g_0^U - \operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\omega}_U\right)\right) = H_U(v,x)(t). \qquad \square$$

Рассмотрим пару $(v, x) \in \widehat{B}$. Найдутся числа $t_0, t_1, \ldots, t_m$ из отрезка $I = [0,1]$ и карты $\xi_{U_1}, \ldots, \xi_{U_m}$ атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ такие, что $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ и $x([t_{i-1}, t_i)) \subset U_i$ при всех $i = 1, \ldots, m$.

Построим путь $x^* \in \Omega(E)$, полагая $v_0 = v$, $x_i(s) = x((1-s)t_{i-1} + st_i)$ для $s \in I$, $x_i^* = H_{U_i}(v_{i-1}, x_i)$, $v_i = x_i^*(1)$ и $x^*(t) = x_i^*((t - t_{i-1})/(t_i - t_{i-1}))$ для $t \in [t_{i-1}, t_i]$ и $i = 1, \ldots, m$.

Согласно предложению 3 путь x^* не зависит от произвола в выборе разбиения отрезка I и карт атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Поэтому равенство $H(v,x) = x^*$ корректно определяет отображение $H : \widehat{B} \to \Omega(E)$. Оно также непрерывно и инвариантно относительно действия группы T^k.

Определение 5. Построенное отображение $H : \widehat{B} \to \Omega(E)$ назовем T^k-*связностью* на расслоении ξ, а использованные в (4) формы ω_U — локальными формами связности H, соответствующими атласу $\mathcal{A}(\mathcal{U})$.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$ — эквивалентные гладкие атласы расслоения $\xi = (E, p, B, T^k)$, а H — T^k-связность на расслоении ξ с набором локальных форм связности $\{\omega'_U \mid U' \in \mathcal{U}'\}$, соответствующим атласу $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$. Тогда найдется набор форм $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$, ассоциированный с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и определяющий связность H.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $U \in \mathcal{U}$. В силу компактности полиэдра B найдутся такие $U'_1, \ldots, U'_l \in \mathcal{U}'$, что $U \subset U'_1 \cup \cdots \cup U'_l$. Поскольку атласы $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$ эквивалентны, то функции перехода $\xi_{U'_i U}$ являются гладкими. Зададим форму ω_U на U со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$, полагая для каждого $i = 1, \ldots, l$

$$\omega_U|_{U \cap U'_i} = \omega'_{U'_i}|_{U \cap U'_i} + \theta d\xi_{U'_i U}.$$

Прямые вычисления показывают, что формы из построенного набора $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ удовлетворяют условию (2) и определяют связность H. $\square$

Пусть главные расслоения $\xi = (E, p, B, T^k)$ и $\xi' = (E', p', B, T^k)$ обладают гладкими атласами $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ и $f : \xi \to \xi'$ — гладкий морфизм над B. Тогда найдется такое семейство $\{\zeta_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ гладких отображений $\zeta_U : U \to T^k$, что $\xi'_{VU} = \zeta_V + \xi_{VU} - \zeta_U$ для функций перехода ξ_{VU} и ξ'_{VU} атласов $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$, где $U, V \in \mathcal{U}$ и $U \cap V \neq \emptyset$. Соответствующие формы перехода удовлетворяют равенству

$$\theta d\xi'_{VU} = \theta d\zeta_V + \theta d\xi_{VU} - \theta d\zeta_U. \tag{6}$$

Рассмотрим T^k-связность H на ξ, заданную набором локальных форм $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ определим 1-форму ω'_U на U со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$, полагая $\omega'_U = \omega_U - \theta d\zeta_U$. Тогда в силу (6) $\omega'_U - \omega'_V = \theta d\xi'_{VU}$ для всех $U, V \in \mathcal{U}$ с непустым пересечением $U \cap V$. Поэтому набор $\{\omega'_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ определяет T^k-связность H' на ξ'.

Легко видеть, что для произвольного пути $x : I \to B$ и точки v в слое $p^{-1}(x(0))$ верно равенство $f(H(v, x)) = H'(f(v), x)$. Для проверки этого утверждения достаточно рассмотреть случай, когда путь x лежит в зоне U некоторой карты $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$. При этом если $v = \xi_U(x(0), g_0^U)$, то $f(v) = f \circ \xi_U(x(0), g_0^U) = \xi'_U(x(0), \zeta_U(x(0)) + g_0^U)$. Но тогда

$$H'_U(f(v), x)(t) = \xi'_U\left(x(t), \zeta_U(x(0)) + g_0^U - \operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\omega}_U\right) + \operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\theta} d\zeta_U\right)\right).$$

Тем же методом, что и в доказательстве предложения 3, получим равенство

$$\operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\theta} d\zeta_U\right) = \zeta_U(x(t)) - \zeta_U(x(0)).$$

Следовательно,

$$H'_U(f(v), x)(t) = \xi'_U\left(x(t), \zeta_U\big(x(t)\big) + g_0^U - \operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\omega}_U\right)\right) = f \circ H_U(v, x)(t).$$

Определение 6. Связность H' назовем образом связности H при морфизме f и положим $H' = f(H)$.

Пусть $\mathcal{U}$ — (ξ, Δ)-покрытие полиэдра B, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — ассоциированный с ним атлас расслоения $\xi = (E, p, B, T^k)$, $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $R^U : E_U \times \Delta \to E_U$ — действие, определенное формулой (1).

Предложение 5. *Если T^k-связность H на ξ задана набором локальных форм $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$, то она инвариантна относительно действия R^U на E_U тогда и только тогда, когда $R^*_\delta \omega_U = \omega_U$ для любого $\delta \in \Delta$.*

Доказательство. Связность $H : \widehat{B} \to \Omega(E)$ инвариантна относительно R^U, если

$$H_U(R^U_\delta(v), R_\delta \circ x) = R^U_\delta \circ H_U(v, x)$$

для всех $(v, x) \in \widehat{U}$ и $\delta \in \Delta$. Согласно (1) и (4) это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Exp}\left(\int_{R_\delta \circ x_t} \overline{\omega}_U\right) = \operatorname{Exp}\left(\int_{x_t} \overline{\omega}_U\right)$$

или, что равносильно,

$$\int_0^t (R^*_\delta \overline{\omega}_U - \overline{\omega}_U)\left(\frac{dx}{d\tau}\right) d\tau = \int_{x_t} (R^*_\delta \overline{\omega}_U - \overline{\omega}_U) \in \mathbb{Z}^k.$$

Так как интегралы в последней формуле непрерывно зависят от t, то они могут быть целочисленными в том и только том случае, если они тождественно равны нулю. В силу произвольности пути x это эквивалентно тому, что $R^*_\delta \overline{\omega}_U - \overline{\omega}_U = 0$. $\square$

Определение 7. Связность H на расслоении ξ назовем инвариантной относительно многозначного действия $\mathcal{R} = \{R^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ группы Δ на E, если она инвариантна относительно R^U для всех $U \in \mathcal{U}$.

Пусть снова $\xi = (E, p, B, T^k)$ и $\xi' = (E', p', B, T^k)$ — главные расслоения, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ — их гладкие атласы, а $f : \xi \to \xi'$ — гладкий морфизм над B. Выберем элемент $\delta \in \Delta$ и карты $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ и $\xi'_V \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$ такие, что $V \cap U \neq 0$. Тогда имеет место

Предложение 6. *Пусть T^k-связность H на ξ инвариантна относительно преобразования $R^U_\delta : E_U \to E_U$, а $H' = f(H)$ — ее образ при морфизме f. Тогда T^k-связность H' инвариантна на $E'_{V\cap U}$ относительно $R'^V_\delta : E'_V \to E'_V$ в том и только том случае, если форма перехода $\theta d\zeta_{VU}$ от карты ξ_U к карте ξ'_V инвариантна относительно действия R на $V \cap U$.*

Доказательство. Рассмотрим карту $\xi_V \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$, а также функцию перехода ξ_{VU} от ξ_U к ξ_V и функцию перехода $\zeta_V = \zeta_{VV}$ от карты ξ_V к карте ξ'_V. Тогда на пересечении $V \cap U$ имеет место равенство $\theta d\zeta_{VU} = \theta d\zeta_V + \theta d\xi_{VU}$. Если ω_U, ω_V и ω'_V — локальные формы связностей H и H', то по построению $\omega'_V = \omega_V - \theta d\zeta_V$ и $\omega_V = \omega_U - \theta d\xi_{VU}$. Таким образом, $\omega'_V = \omega_U - \theta d\xi_{VU} - \theta d\zeta_V = \omega_U - \theta d\zeta_{VU}$.

Согласно условию и предложению 5 форма ω_U инвариантна относительно действия R. Полученное выше равенство означает, что в этой ситуации на $V \cap U$ формы ω'_V и $\theta d\zeta_{VU}$ инвариантны или нет относительно R одновременно. Для завершения доказательства осталось снова применить предложение 5. □

Следствие 2. Предположим, что $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ — почти Δ-расслоение и T^k-связность H на ξ инвариантна относительно многозначного действия $\mathcal{R} = \{R^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ группы Δ на его пространстве E, ассоциированного с атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}'(\mathcal{U}')$ — другой атлас расслоения ξ, то связность H инвариантна относительно ассоциированного с ним набора локальных действий $\mathcal{R}' = \{R^{U'} \mid U' \in \mathcal{U}'\}$ той же группы Δ на E тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}'(\mathcal{U}')$ — почти Δ-атлас и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}') \in \mathcal{A}$.

Таким образом, имеет смысл следующее

Определение 8. Пусть $G = \Delta \times T^k$, $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ — почти Δ-расслоение и T^k-связность H на ξ инвариантна относительно многозначного действия $\mathcal{R} = \{R^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ группы Δ, ассоциированного с некоторым атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$. Тогда H назовем *G-связностью.*

Следствие 3. Допустим, что $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ и $\rho' = (\xi', \mathcal{A}')$ — гладкие почти Δ-расслоения, $f : \xi \to \xi'$ — морфизм гладких главных расслоений над B, H и $H' = f(H)$ — T^k-связности на ξ и ξ' соответственно, причем H — G-связность по отношению к почти Δ-структуре $\mathcal{A}$. Тогда H' есть G-связность по отношению к $\mathcal{A}'$ в том и только том случае, если $f : \rho \to \rho'$ — морфизм почти Δ-расслоений.

Теорема 1. *Пусть $\xi = (E, p, B, T^k)$ — главное расслоение с проекцией $p : E \to B$ и структурной группой T^k и $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — его гладкий атлас. Тогда*

- *на ξ существует T^k-связность;*
- *если $R : B \times \Delta \to B$ — регулярное симплициальное действие, $\mathcal{U}$ — (ξ, Δ)-покрытие полиэдра B и $\mathcal{R} = \{R^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ — набор локальных действий группы Δ на E, соответствующий атласу $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, то на расслоении ξ найдется T^k-связность, инвариантная относительно $\mathcal{R}$, тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — почти Δ-атлас.*

Доказательство. В силу компактности полиэдра B можно выбрать конечный податлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}')$ атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Произвольному $i \in \{1, \dots, k\}$ и каждой паре U, V элементов покрытия $\mathcal{U}'$ с непустым пересечением $U \cap V$ поставим в соответствие компоненту $\theta^i d\xi_{VU}$ формы перехода $\theta d\xi_{VU} = \theta^1 d\xi_{VU} E_1 + \dots + \theta^k d\xi_{VU} E_k$ от карты $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U}')$ к карте $\xi_V \in \mathcal{A}(\mathcal{U}')$, где $E_1, \dots, E_k$ — базис алгебры $\mathfrak{t}$. Этим определен одномерный коцикл $\{\theta^i d\xi_{VU}\}$ на $\mathcal{U}'$ со значениями в пучке $\mathcal{L}^1$. По лемме 3 $H^1(\mathcal{U}', \mathcal{L}^1) = 0$. Следовательно, найдется нульмерная коцепь $\{\omega^i_U\} \in C^0(\mathcal{U}', \mathcal{L}^1)$, кограница которой равна $\{\theta^i d\xi_{VU}\}$. Положим $\omega'_U = \omega^1_U E_1 + \dots + \omega^k_U E_k$. Этим построен набор $\{\omega'_U \mid U \in \mathcal{U}'\}$ гладких 1-форм на элементах покрытия $\mathcal{U}'$ со значениями в алгебре $\mathfrak{t}$, удовлетворяющий условию вида (2). По предложению 3 он определяет некоторую T^k-связность H' на ξ.

Согласно предложению 4 связность H' порождает набор ее локальных форм $\{\omega'_U \mid U \in \mathcal{U}\}$, ассоциированный с исходным атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Если $\mathcal{U}$ — (ξ, Δ)-покрытие, то $R_\delta(U) = U$ для всех $U \in \mathcal{U}$ и $\delta \in \Delta$. При этом на каждом $U \in \mathcal{U}$ корректно определена форма

$$\omega_U = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} R^*_\delta \omega'_U, \tag{7}$$

где $|\Delta|$ — порядок группы Δ.

Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — почти Δ-атлас. Тогда его формы перехода $\theta d\xi_{VU}$ инвариантны относительно R на непустых пересечениях $V \cap U$ для $U, V \in \mathcal{U}$. Поэтому

$$\omega_U - \omega_V = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} R^*_\delta (\omega'_U - \omega'_V) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} R^*_\delta (\theta d\xi_{VU}) = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} \theta d\xi_{VU} = \theta d\xi_{VU}.$$

Таким образом, набор форм $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ определяет некоторую новую T^k-связность H на ξ. По построению формы ω_U инвариантны относительно действия R. Согласно предложению 5 отсюда следует инвариантность H относительно $\mathcal{R}$.

Если теперь дано, что H — T^k-связность на ξ, инвариантная относительно $\mathcal{R}$, то применим предложение 6 для случая, когда $\xi' = \xi$, $f = \mathrm{id}$ и $H' = H$. Тогда все формы перехода $\theta d\xi_{VU} = \theta d\zeta_{VU}$ атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ окажутся инвариантными относительно действия R. А это значит, что $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — почти Δ−атлас. □

4. Базовая форма кривизны T^k-связности

Пусть $\xi = (E, p, B, T^k)$ — гладкое главное расслоение с базой B и структурной группой T^k, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — его гладкий атлас и H — T^k-связность на ξ, заданная набором локальных форм $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Предположим, что $U, V \in \mathcal{U}$ и $U \cap V \neq \emptyset$. Рассмотрим произвольную точку $a \in V \cap U$ и ее односвязную окрестность $W \subset V \cap U$. Тогда для сужения $\xi_{VU} : W \to T^k$ найдется гладкое отображение $\bar{\xi}_{VU} : W \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющее равенству $\xi_{VU} = \operatorname{Exp} \circ \bar{\xi}_{VU}$. При этом если $\bar{\xi}_{VU} = \bar{\xi}^1_{VU} e_1 + \dots + \bar{\xi}^k_{VU} e_k$ и $\theta = \theta^1 E_1 + \dots + \theta^k E_k$, то $\theta d\xi_{VU} = \theta d \operatorname{Exp} \circ d\bar{\xi}_{VU} = d\bar{\xi}^1_{VU} E_1 + \dots + d\bar{\xi}^k_{VU} E_k$ и, следовательно, $\theta^i d\xi_{VU} = d\bar{\xi}^i_{VU}$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Так как последнее верно в окрестности любой точки $a \in V \cap U$, то на всем $V \cap U$ имеют место равенства $d\omega_U - d\omega_V = d(\theta d\xi_{VU}) = d(d\bar{\xi}^1_{VU}) E_1 + \dots + d(d\bar{\xi}^k_{VU}) E_k = 0$. Но в такой ситуации по лемме 1 на полиэдре B можно определить 2-форму F со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$ группы T^k, полагая $F|_U = d\omega_U$ для всех $U \in \mathcal{U}$. Поскольку $dF|_U = dd\omega_U = 0$ для тех же U, то форма F замкнута.

Определение 9. Назовем F базовой формой кривизны связности H.

Теорема 2. *Пусть F — базовая форма кривизны некоторой T^k-связности H на расслоении $\xi = (E, p, B, T^k)$, $\overline{F} = \mathfrak{i} \circ F$ и c — симплициальный 2-цикл полиэдра B с целыми коэффициентами. Тогда $\int\limits_c \overline{F} \in \mathbb{Z}^k$.*

Доказательство. Обозначим символом $K^2(c)$ множество ориентированных треугольников цепи c, символом $K^1(c)$ — множество инцидентных им ребер, а символом $K^0(c)$ — множество вершин треугольников из $K^2(c)$. Тогда $c = \sum\limits_{\sigma \in K^2(c)} n_\sigma \sigma$. Меняя в случае необходимости ориентации симплексов, можем без ограничения общности считать, что все коэффициенты n_σ положительны.

Составим список $\widehat{K}^2(c)$, в который каждый треугольник $\sigma \in K^2(c)$ входит n_σ раз. При этом $c = \sum\limits_{\sigma \in \widehat{K}^2(c)} \sigma$.

Рассмотрим ребро $e \in K^1(c)$ и список $\widehat{K}^2(e)$ треугольников из $\widehat{K}^2(c)$, инцидентных e. Тогда $\widehat{K}^2(e) = \widehat{K}^2_+(e) \cup \widehat{K}^2_-(e)$, где $\widehat{K}^2_+(e)$ состоит из треугольников, индуцирующих на e одну ориентацию, а $\widehat{K}^2_-(e)$ — из треугольников, индуцирующих противоположную ориентацию. Поскольку c — цикл, то существует биекция $\beta_e : \widehat{K}^2_+(e) \to \widehat{K}^2_-(e)$.

Пусть далее $v \in K^0(c)$, а $\widehat{K}^2(v)$ — список треугольников из $\widehat{K}^2(c)$, инцидентных v. Для каждого $\sigma \in \widehat{K}^2(v)$ обозначим символом $e_\sigma(v)$ ребро треугольника σ, не содержащее вершину v и снабженное ориентацией, индуцированной ориентацией симплекса σ. Набор всех таких ребер и множество их вершин образуют ориентированный мультиграф $L(v)$. Заметим, что различные элементы σ и τ списка $\widehat{K}^2(v)$ могут совпадать в множестве $K^2(c)$. В такой ситуации ребра $e_\sigma(v)$ и $e_\tau(v)$ в $L(v)$ считаются различными, но каждый из двух общих концов ребер $e_\sigma(v)$ и $e_\tau(v)$ представляет собой одну вершину графа $L(v)$.

В силу наличия биекции β_e для любой вершины мультиграфа $L(v)$ количества входящих и выходящих ребер одинаковы. Поэтому $L(v) = L_1(v) \cup \dots \cup L_{n(v)}(v)$, где $L_i(v)$ — простые контуры, причем $L_i(v)$ и $L_j(v)$ не имеют общих ребер при $i \neq j$. Набор треугольников $\sigma \in \widehat{K}^2(v)$, для которых $e_\sigma(v) \in L_i(v)$, обозначим символом $\widehat{K}^2_i(v)$. Тогда $\widehat{K}^2(v) = \widehat{K}^2_1(v) \cup \dots \cup \widehat{K}^2_{n(v)}(v)$, где при $i \neq j$ наборы $\widehat{K}^2_i(v)$ и $\widehat{K}^2_j(v)$ не имеют элементов, входящих в список $\widehat{K}^2(v)$ с одним и тем же номером.

Контур $L_i(v)$ представляет собой последовательность когерентно ориентированных ребер графа $L(v)$, в которой конец каждого элемента является началом следующего, причем следующим для последнего считается первый элемент последовательности. В соответствии с этим $\widehat{K}^2_i(v) = \{\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{in(v,i)}\}$, где при $j < n(v,i)$ треугольники σ_{ij} и σ_{ij+1} имеют общее ребро, содержащее вершину v, и индуцируют на нем противоположные ориентации. То же верно и для треугольников $\sigma_{in(v,i)}$ и σ_{i1}. Никакая другая пара треугольников из $\widehat{K}^2_i(v)$ общих ребер не имеет.

Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — гладкий атлас расслоения ξ. Рассмотрим произвольные $U, V \in \mathcal{U}$ с непустым пересечением $V \cap U$ и кусочно гладкий путь $x : I \to V \cap U$. Если ξ_{VU} — функция перехода от карты ξ_U к карте ξ_V, то $\xi_{VU} \circ x$ — кусочно гладкий путь в T^k. Повторяя рассуждения из доказательства предложения 3, построим путь $\overline{x} : I \to \mathbb{R}^k$, для которого $\xi_{VU} \circ x = \operatorname{Exp} \circ \overline{x}$, и получим равенства

$$\operatorname{Exp}\left(\int_x \overline{\theta} d\xi_{VU}\right) = \operatorname{Exp}(\overline{x}(1) - \overline{x}(0)) = \xi_{VU}(x(1)) - \xi_{VU}(x(0)).$$

Отсюда в силу (2)

$$\operatorname{Exp}\left(\int_x (\overline{\omega}_U - \overline{\omega}_V)\right) = \xi_{VU}(x(1)) - \xi_{VU}(x(0)). \tag{8}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что каждый треугольник $\sigma \in \widehat{K}^2(c)$ лежит в некотором элементе $U(\sigma)$ покрытия $\mathcal{U}$. При этом

$$\int_\sigma \overline{F} = \int_\sigma d\overline{\omega}_{U(\sigma)} = \int_{\partial\sigma} \overline{\omega}_{U(\sigma)}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Exp}\left(\int_c \overline{F}\right) = \sum_{\sigma\in\widehat{K}^2(c)} \operatorname{Exp}\left(\int_{\partial\sigma} \overline{\omega}_{U(\sigma)}\right).$$

Индуцируем на каждом ребре $e \in K^1(c)$ ориентацию с треугольников списка $\widehat{K}^2_+(e)$. Тогда

$$\sum_{\sigma\in\widehat{K}^2(c)} \operatorname{Exp}\left(\int_{\partial\sigma} \overline{\omega}_{U(\sigma)}\right) = \sum_{e\in K^1(c)} \sum_{\sigma_+\in\widehat{K}^2_+(e)} \operatorname{Exp}\left(\int_e \left(\overline{\omega}_{U(\sigma_+)} - \overline{\omega}_{U(\sigma_-)}\right)\right),$$

где $\sigma_- = \beta_e(\sigma_+)$.

В силу (8) из последних двух выделенных равенств следует

$$\operatorname{Exp}\left(\int_c \overline{F}\right) = \sum_{e\in K^1(c)} \sum_{\sigma_+\in\widehat{K}^2_+(e)} (\xi_{U(\sigma_-)U(\sigma_+)}(v_+(e)) - \xi_{U(\sigma_-)U(\sigma_+)}(v_-(e))),$$

где $v_+(e)$ — конец ребра e, а $v_-(e)$ — его начало. Поскольку $-\xi_{U(\sigma_-)U(\sigma_+)} = \xi_{U(\sigma_+)U(\sigma_-)}$, то полученный результат может быть переписан в более симметричном виде

$$\operatorname{Exp}\left(\int_c \overline{F}\right) = \sum_{e\in K^1(c)} \left(\sum_{\sigma_+\in\widehat{K}^2_+(e)} \xi_{U(\sigma_-)U(\sigma_+)}(v_+(e)) + \sum_{\sigma_+\in\widehat{K}^2_+(e)} \xi_{U(\sigma_+)U(\sigma_-)}(v_-(e))\right).$$

Теперь очевидно, что ориентации ребер $e \in K^1(c)$ в этой сумме влияют только на порядок слагаемых. Поэтому их можно перегруппировать, беря за основу вершины. В результате получим

$$\operatorname{Exp}\left(\int_c \overline{F}\right) = \sum_{v\in K^0(c)} \sum_{e\in K^1_+(v)} \sum_{\sigma_+\in\widehat{K}^2_+(v,e)} \xi_{U(\sigma_-)U(\sigma_+)}(v), \tag{9}$$

где $K^1_+(v)$ — множество инцидентных v ребер из $K^1(c)$, ориентированных так, чтобы вершина v была их общим концом, а $\widehat{K}^2_+(v,e)$ — соответствующий этой ориентации набор 2-симплексов из списка $\widehat{K}^2(e)$. Выбор биекции $\beta_e : \widehat{K}^2_+(v,e) \to \widehat{K}^2_-(v,e)$ влияет на значения слагаемых $\xi_{U(\sigma_-)U(\sigma_+)}(v)$ в сумме

$$S(v,e) = \sum_{\sigma_+\in\widehat{K}^2_+(v,e)} \xi_{U(\sigma_-)U(\sigma_+)}(v),$$

но не на саму величину $S(v,e)$. Поэтому для вершин $v, w \in \partial e$ можно использовать различные биекции $\beta_{v,e} : \widehat{K}^2_+(v,e) \to \widehat{K}^2_-(v,e)$ и $\beta_{w,e} : \widehat{K}^2_+(w,e) \to \widehat{K}^2_-(w,e)$. Следовательно, для всех номеров $i = 1, \dots, n(v)$, $j = 1, \dots, n(v,i)$ и ребра $e = \sigma_{ij} \cap \sigma_{ij+1}$ можно положить

$\beta_e(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij+1}$, где сумма $j+1$ вычисляется по модулю $n(v,i)$. Тогда (9) преобразуется к виду

$$\operatorname{Exp}\left(\int_c \overline{F}\right) = \sum_{v \in K^0(c)} \sum_{i=1}^{n(v)} \sum_{j=1}^{n(v,e)} \xi_{U(\sigma_{ij+1})U(\sigma_{ij})}(v).$$

Но

$$\sum_{j=1}^{n(v,e)} \xi_{U(\sigma_{ij+1})U(\sigma_{ij})}(v) = 0,$$

поскольку функции перехода атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ образуют коцикл. Таким образом, $\operatorname{Exp}\left(\int_c \overline{F}\right) = 0$ и, следовательно, $\int_c \overline{F} \in \mathbb{Z}^k$. $\square$

Предложение 7. *Пусть на гладком расслоении $\xi = (E, p, B, T^k)$ задана T^k связность H с базовой формой кривизны F. Форма F инвариантна относительно действия R группы Δ тогда и только тогда, когда ξ обладает почти Δ-структурой, по отношению к которой H является G-связностью.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{A}$ — почти Δ-структура на ξ и H — G-связность относительно $\mathcal{A}$. Рассмотрим произвольный атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{U}$ — (ξ, Δ)-покрытие полиэдра B, а связность H инвариантна относительно ассоциированного с $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ многозначного действия $\mathcal{R} = \{R^U \mid U \in \mathcal{U}\}$ группы Δ. Если $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ — набор локальных форм связности H, то по предложению 5 для любых $U \in \mathcal{U}$ и $\delta \in \Delta$ верно равенство $\omega_U = R_\delta^*(\omega_U)$. Дифференцируя его, получим

$$F|_U = d\omega_U = R_\delta^*(d\omega_U) = R_\delta^* F|_U.$$

Так как $\mathcal{U}$ — покрытие полиэдра B, то этим доказано, что $F = R_\delta^* F$.

Пусть далее дано, что форма F инвариантна относительно действия R. Рассмотрим построенное в предложении 1 простое Δ-покрытие $\mathcal{U}$ полиэдра B и ассоциированный с ним атлас $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$ расслоения ξ. Согласно определению 6 и предложению 4 им соответствует набор $\{\omega'_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ локальных форм связности H. При этом $d\omega'_U = F|_U$ для всех $U \in \mathcal{U}$. Определим 1-формы ω_U на $U \in \mathcal{U}$ формулой (7).

Как и в доказательстве теоремы 1 легко проверяется, что формы ω_U инвариантны относительно действия R. Дифференцируя определяющую их формулу, получим

$$d\omega_U = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} R_\delta^* d\omega'_U = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} R_\delta^* F|_U = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{\delta \in \Delta} F|_U = F|_U. \tag{10}$$

Пусть $\omega_U = \omega_U^1 E_1 + \cdots + \omega_U^k E_k$ и $\omega'_U = \omega_U'^1 E_1 + \cdots + \omega_U'^k E_k$, где ω_U^i и $\omega_U'^i$ — вещественные 1-формы на U, $i = 1, \ldots, k$, а $E_1, \ldots, E_k$ — базис алгебры Ли $\mathfrak{t}$. Согласно доказанному в предыдущем абзаце формы $\omega_U^i - \omega_U'^i$ замкнуты. По лемме 4 отсюда следует существование гладких функций $\mu_U^i : U \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих равенствам $d\mu_U^i = \omega_U^i - \omega_U'^i$. Положим $\overline{\mu}_U = \mu_U^1 e_1 + \cdots + \mu_U^k e_k$.

Для карты $\xi'_U \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$ определим отображение $\xi_U : U \times T^k \to E_U$ формулой $\xi_U(b,t) = \xi'_U(b, \operatorname{Exp}(\overline{\mu}_U(b)) + t)$. Этим построен еще один атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U}) = \{\xi_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ расслоения ξ.

По построению отображений $\overline{\mu}_U : U \to \mathbb{R}^k$ и в силу (3) $\theta d \operatorname{Exp} \circ d\overline{\mu}_U = \omega_U - \omega'_U$. Так как $\operatorname{Exp} \circ \overline{\mu}_U$ — функции перехода от карт ξ_U к картам ξ'_U, то отсюда $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ — набор форм связности H, соответствующий атласу $\mathcal{A}(\mathcal{U})$.

Если $\{\xi_{VU}\}$ — система функций перехода атласа $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, то для всех $U, V \in \mathcal{U}$ с $U \cap V \neq \emptyset$ на $U \cap V$ имеет место равенство (2). При этом из инвариантности форм ω_U и ω_V следует инвариантность формы перехода $\theta d\xi_{VU}$. Таким образом, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — почти Δ-атлас, а H — G-связность относительно почти Δ-структуры на ξ, содержащей атлас $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. □

5. Характеристические классы почти Δ-расслоений

Пусть как обычно $C_n(B)$, $Z_n(B)$ и $B_n(B)$ — группы симплициальных цепей, циклов и границ полиэдра B с целыми коэффициентами. Обозначим символом $\Lambda^n_\Delta(B,\mathfrak{t})$ группу инвариантных относительно действия R гладких n-форм на B со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$, а символом $H^n_\Delta(B,\mathfrak{t})$ — группу гомологий коцепного комплекса

$$\cdots \to \Lambda^{n-1}_\Delta(B,\mathfrak{t}) \xrightarrow{d} \Lambda^n_\Delta(B,\mathfrak{t}) \xrightarrow{d} \Lambda^{n+1}_\Delta(B,\mathfrak{t}) \to \cdots.$$

Для любой замкнутой формы $\Phi \in \Lambda^n_\Delta(B,\mathfrak{t})$ рассмотрим форму $\overline{\Phi} = \mathfrak{i}\circ\Phi$ на B со значениями в $\mathbb{R}^k$ и определим гомоморфизм $I_{[\Phi]} : H_n(B) \to \mathbb{R}^k$ формулой $I_{[\Phi]}([c]) = \int\limits_c \overline{\Phi}$. Положим

$$H^n_\Delta(B,\mathfrak{t}|\mathbb{Z}^k) = \{[\Phi]_\Delta \in H^n_\Delta(B,\mathfrak{t}) \mid \operatorname{im} I_{[\Phi]} \subset \mathbb{Z}^k\}.$$

Теорема 3. *Пусть $\xi = (E,p,B,T^k)$ — гладкое главное расслоение, $\mathcal{A}$ — почти Δ-структура на ξ, H — G-связность на ξ относительно $\mathcal{A}$ и F — базовая форма кривизны связности H. Тогда $F \in \Lambda^2_\Delta(B,\mathfrak{t})$, а когомологический класс $[F]_\Delta \in H^2_\Delta(B,\mathfrak{t})$ принадлежит группе $H^2_\Delta(B,\mathfrak{t}|\mathbb{Z}^k)$ и является инвариантом почти Δ-расслоения $\rho = (\xi,\mathcal{A})$ в категории $\mathcal{KP}(B,T^k,\Delta,R)$.*

Доказательство. По построению форма F замкнута, а по предложению 7 $F \in \Lambda^2_\Delta(B,\mathfrak{t})$. Следовательно, определен когомологический класс $[F]_\Delta \in H^2_\Delta(B,\mathfrak{t})$. Согласно теореме 2 $\operatorname{im} I_{[F]} \subset \mathbb{Z}^k$ и потому $[F]_\Delta \in H^2_\Delta(B,\mathfrak{t}|\mathbb{Z}^k)$.

Рассмотрим главное расслоение $\xi' = (E',p',B,T^k)$ с почти Δ-структурой $\mathcal{A}'$ и G-связность H' на ξ' относительно $\mathcal{A}'$. Предположим, что существует морфизм $f : \rho \to \rho'$ почти Δ-расслоений ρ и $\rho' = (\xi',\mathcal{A}')$. Тогда если $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'(\mathcal{U}) \in \mathcal{A}'$, то имеется система функций перехода $\{\zeta_U\}$ от карт $\xi_U \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ к картам $\xi'_U \in \mathcal{A}'(\mathcal{U})$. Для всех $U \in \mathcal{U}$ локальные формы ω_U и ω^*_U G-связностей H и $H^* = f(H)$ удовлетворяют равенствам $\omega^*_U = \omega_U - \theta d\zeta_U$. Поэтому $d\omega^*_U = d\omega_U$ и базовые формы связностей H^* и H совпадают.

Если $\{\xi_{VU}\}$ — система функций перехода атласа $\mathcal{A}'(\mathcal{U})$, а $\{\omega'_U\}$ — набор локальных форм связности H', то $\omega^*_U - \omega^*_V = \theta\xi'_{VU} = \omega'_U - \omega'_V$ на $U \cap V$ для всех $U, V \in \mathcal{U}$ с $U \cap V \neq \emptyset$. При этом $\omega^*_U - \omega'_U = \omega^*_V - \omega'_V$, откуда по лемме 1 вытекает существование гладкой 1-формы φ на B со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$ такой, что $\varphi|_U = \omega^*_U - \omega'_U$ для всех $U \in \mathcal{U}$. Поскольку H^* и H' — G-связности относительно $\mathcal{A}'$, то формы ω^*_U и ω'_U инвариантны относительно действия R. Но тогда форма φ также инвариантна относительно R. Наконец, из равенств $d\varphi|_U = d\omega^*_U - d\omega'_U$ следует $d\varphi = F - F'$. Поэтому $[F]_\Delta = [F']_\Delta$. □

Определение 10. Когомологический класс $[F]_\Delta$ назовем характеристическим классом почти Δ-расслоения $\rho = (\xi,\mathcal{A})$.

Формула $\eta([\rho]) = [F]_\Delta$, где $[\rho]$ — класс эквивалентности расслоения ρ в категории $\mathcal{KP}(B,T^k,\Delta,R)$, а $[F]_\Delta$ — его характеристический класс, определяет гомоморфизм $\eta : \mathcal{BP}(B,T^k,\Delta,R) \to H^2_\Delta(B,\mathfrak{t}|\mathbb{Z}^k)$.

Теорема 4. *Для гомоморфизма η существует правый обратный гомоморфизм $\overline{\eta} : H^2_\Delta(B,\mathfrak{t}|\mathbb{Z}^k) \to \mathcal{BP}(B,T^k,\Delta,R)$.*

Доказательство. Пусть $[F]_\Delta \in H^2_\Delta(B, \mathfrak{t}|\mathbb{Z}^k)$. Тогда F — замкнутая $\mathfrak{t}$-значная 2-форма на B, инвариантная относительно действия R и удовлетворяющая условию $\operatorname{im} I_{[F]} \subset \mathbb{Z}^k$. Рассмотрим простое Δ-покрытие $\mathcal{U}$ полиэдра B из предложения 1. При этом для произвольного элемента $U \in \mathcal{U}$ найдется гладкая 1-форма ω'_U такая, что $d\omega'_U = F|_U$. Пользуясь формулой (7), построим инвариантную относительно R форму ω_U на U. Для нее верно равенство (10). Проделав описанную операцию для всех элементов покрытия $\mathcal{U}$, получим набор инвариантных 1-форм $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$.

Для произвольной границы $x \in B_1(B)$ выберем 2-цепь $c_x \in C_2(B)$ такую, что $\partial c_x = x$, и положим

$$h_0(x) = \operatorname{Exp}\left(\int_{c_x} \overline{F}\right), \tag{11}$$

где $\overline{F} = \mathfrak{i} \circ F$. Если c'_x — другая 2-цепь из $C_2(B)$ с той же границей $\partial c'_x = x$, то $c_x - c'_x \in Z_2(B)$ и по выбору формы F имеет место равенство $\operatorname{Exp}\big(I_{[F]}([c_x - c'_x])\big) = 0$. Таким образом, формула (11) корректно определяет гомоморфизм $h_0 : B_1(B) \to T^k$. Поскольку $\operatorname{Ext}(H_1(B), T^k) = 0$, для h_0 найдется продолжение $h : Z_1(B) \to T^k$.

В одномерном остове B^1 полиэдра B выберем и зафиксируем максимальное дерево $D \subset B^1 \subset B$ с начальной вершиной v_0. Тогда для любой вершины $v \in K^0(B)$ имеется единственная цепь $x_v \in C_1(D)$ с границей $\partial x_v = v - v_0$.

Рассмотрим $U, V \in \mathcal{U}$ и симплекс $\sigma \in K(B)$, для которых $\sigma \cap U \cap V \neq \emptyset$. Тогда согласно разделу 1 на $\sigma \cap U$ имеется 1-форма $\omega^\sigma_U \in \omega_U$, являющаяся классом эквивалентности гладкой 1-формы $\omega_{O(\sigma\cap U)}$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{t}$, определенной на некоторой окрестности $O(\sigma\cap U)$ множества $\sigma\cap U$ в плоскости Q_σ. Аналогично найдутся окрестность $O(\sigma\cap V) \subset Q_\sigma$ пересечения $\sigma \cap V$ и гладкая $\mathfrak{t}$-значная 1-форма $\omega_{O(\sigma\cap V)}$ на ней, представляющая форму $\omega^\sigma_V \in \omega_V$.

С другой стороны, по построению используемого покрытия U-симплекс $\sigma \cap U$ лежит в открытой звезде $\operatorname{st}(u)$ некоторой вершины $u \in K^0(B)$, а V-симплекс $\sigma \cap V$ — в звезде $\operatorname{st}(v)$ вершины $v \in K^0(B)$. Следовательно, $\sigma \cap U \cap V \subset \operatorname{st}[uv]$, где $\operatorname{st}[uv]$ — открытая звезда ребра $[uv] \in K^1(B)$. Положим $x_{vu} = x_v - [uv] - x_u$.

Как и в лемме 4, найдется окрестность $O(\sigma \cap U \cap V)$ пересечения $\sigma \cap U \cap V$, лежащая в $O(\sigma \cap U) \cap O(\sigma \cap V)$ и являющаяся звездным множеством относительно барицентра b_{uv} ребра $[uv]$. Поэтому для произвольной точки $a \in O(\sigma \cap U \cap V)$ можно положить

$$\xi_{O(\sigma\cap U\cap V)}(a) = h(x_{vu}) + \operatorname{Exp}\left(\int_{[ub_{uv}]+[b_{uv}a]} \overline{\omega}_{O(\sigma\cap U)} - \int_{[vb_{uv}]+[b_{uv}a]} \overline{\omega}_{O(\sigma\cap V)}\right), \tag{12}$$

где $\overline{\omega}_{O(\sigma\cap U)} = \mathfrak{i} \circ \omega_{O(\sigma\cap U)}$ и $\overline{\omega}_{O(\sigma\cap V)} = \mathfrak{i} \circ \omega_{O(\sigma\cap V)}$. Если a' — достаточно близкая к a точка из $O(\sigma \cap U \cap V)$, то

$$\xi_{O(\sigma\cap U\cap V)}(a') - \xi_{O(\sigma\cap U\cap V)}(a) = \operatorname{Exp}\left(\int_{[aa']} \big(\overline{\omega}_{O(\sigma\cap U)} - \overline{\omega}_{O(\sigma\cap V)}\big)\right).$$

Поэтому формула (12) определяет гладкое отображение $\xi_{O(\sigma\cap U\cap V)} : O(\sigma \cap U \cap V) \to T^k$ и $\theta d\xi_{O(\sigma\cap U\cap V)} = \omega_{O(\sigma\cap U)} - \omega_{O(\sigma\cap V)}$.

Пусть τ — грань симплекса σ и $\tau \cap U \cap V \neq \emptyset$. Тогда окрестность $O(\tau \cap U \cap V)$ можно выбрать лежащей в $O(\sigma\cap U\cap V)$. При этом в силу согласованности форм ω^σ_U и ω^τ_U, а также форм ω^σ_V и ω^τ_V для всех $a \in O(\tau\cap U\cap V)$ имеет место равенство $\xi_{O(\sigma\cap U\cap V)}(a) = \xi_{O(\tau\cap U\cap V)}(a)$. Таким образом, если ξ^σ_{VU} и ξ^τ_{VU} — классы эквивалентности отображений $\xi_{O(\sigma\cap U\cap V)}$ и $\xi_{O(\tau\cap U\cap V)}$, то $\xi^\sigma_{VU}|_{\tau\cap U\cap V} = \xi^\tau_{VU}$.

Доказанное выше означает, что набор $\xi_{VU} = \{\xi^\sigma_{VU} \mid \sigma\cap U\cap V \in K(U\cap V)\}$ представляет собой гладкое отображение $\xi_{VU} : U\cap V \to T^k$, удовлетворяющее равенству (2). Выполнив подобные построения для всех пар $U, V \in \mathcal{U}$ с непустым пересечением $U\cap V$, получим набор $\{\xi_{VU}\}$.

Предположим далее, что $U, V, W \in \mathcal{U}$, $\sigma \in K(B)$ и $\sigma\cap U\cap V\cap W \neq \emptyset$. Тогда пересечения $\sigma\cap U$, $\sigma\cap V$ и $\sigma\cap W$ также не пусты и лежат в открытых звездах вершин u, v и w соответственно. Рассмотрим, как и выше, окрестности $O(\sigma\cap U\cap V)$, $O(\sigma\cap V\cap W)$ и $O(\sigma\cap W\cap U)$ пересечений $\sigma\cap U\cap V$, $\sigma\cap V\cap W$ и $\sigma\cap W\cap U$ в плоскости Q_σ, являющиеся звездными множествами относительно барицентров $b(uv)$, $b(vw)$ и $b(wu)$ соответствующих ребер. В их пересечении содержится окрестность $O(\sigma\cap U\cap V\cap W)$ множества $\sigma\cap U\cap V\cap W$, звездная относительно барицентра b треугольника $[uvw]$.

Если $a \in O(\sigma\cap U\cap V\cap W)$, то треугольник $[b_{uv}ba]$ целиком лежит в $O(\sigma\cap U\cap V)$. Отсюда и из формулы Стокса следует

$$\int_{[b_{uv}a]} \left(\overline{\omega}_{O(\sigma\cap U)} - \overline{\omega}_{O(\sigma\cap V)}\right) = \int_{[b_{uv}b]+[ba]} \left(\overline{\omega}_{O(\sigma\cap U)} - \overline{\omega}_{O(\sigma\cap V)}\right).$$

Аналогичные равенства верны и для пар V, W и W, U. Поэтому значение суммы

$$S = \xi_{O(\sigma\cap U\cap V)} + \xi_{O(\sigma\cap V\cap W)} + \xi_{O(\sigma\cap W\cap U)}$$

в произвольной точке $a \in O(\sigma\cap U\cap V\cap W)$ совпадает с ее значением в барицентре b треугольника $[uvw]$.

По той же формуле Стокса

$$\int_{[ub_{uv}]+[b_{uv}b]-[ub_{uw}]-[b_{uw}b]} \overline{\omega}_{O(\sigma\cap U)} = \int_{[ub_{uv}b]+[ubb_{wu}]} \overline{F}.$$

Аналогичные равенства имеют место и для входящих в $S(b)$ интегралов от форм $\overline{\omega}_{O(\sigma\cap V)}$ и $\overline{\omega}_{O(\sigma\cap W)}$. Следовательно, сумма всех интегралов в $S(b)$ равна интегралу от $\overline{F}$ по треугольнику $[uvw]$.

С другой стороны, $h(x_{vu}) + h(x_{wv}) + h(x_{uw}) = -h(\partial[uvw])$, а в силу (11)

$$h(\partial[uvw]) = h_0(\partial[uvw]) = \mathrm{Exp}(I_{[F]}([uvw])).$$

Таким образом, $S(b) = 0$ и потому $S \equiv 0$ на $O(\sigma\cap U\cap V\cap W)$. Но тогда $\xi^\sigma_{UW}+\xi^\sigma_{WV}+\xi^\sigma_{VU} = 0$ на $\sigma\cap U\cap V\cap W$. Поскольку это верно для любого $U\cap V\cap W$-симплекса $\sigma\cap U\cap V\cap W$, то $\xi_{UW} + \xi_{WV} + \xi_{VU} = 0$.

Итак, набор $\{\xi_{VU}\}$ является коциклом. Поэтому существует главное расслоение $\xi = (E, p, B, T^k)$ с проекцией $p : E \to B$ и структурной группой T^k, обладающее атласом $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ с системой функций перехода $\{\xi_{VU}\}$. Согласно (2) из инвариантности форм ω_U для всех $U \in \mathcal{U}$ следует инвариантность форм перехода $\theta d\xi_{VU}$ относительно действия R группы Δ. Это значит, что $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ — почти Δ-атлас. Обозначим буквой $\mathcal{A}$ его класс эквивалентности и положим $\rho = (\xi, \mathcal{A})$.

Предположим, что F^* — другая форма из когомологического класса $[F]_\Delta$. Тогда $F^* = F + dA$, где $A\in\Lambda^1_\Delta(B, \mathfrak{t})$, и формула $h_A(x)=\mathrm{Exp}\left(\int_x \overline{A}\right)$ определяет гомоморфизм $h_A : C_1(B)\to T^k$. Для любых $U \in \mathcal{U}$ и $a \in U$ найдется такая вершина $u \in K^0(B)$, что $a \in \mathrm{st}(u)$. Полагая в такой ситуации $\zeta_U(a) = h_A(x_u)$, определим локально постоянное и, следовательно, гладкое отображение $\zeta_U : U \to T^k$. Соответствующая форма $\theta d\zeta_U$ тождественно равна нулю и потому инвариантна относительно действия R.

Применив (11) к форме F^*, получим гомоморфизм $h_0^* : B_1(B) \to T^k$, связанный с h_0 равенством $h_0^* = h_0 + h_A|_{B_1(B)}$. При этом сумма $h^* = h + h_A|_{Z_1(B)}$ представляет собой продолжение гомоморфизма h_0^* на группу циклов $Z_1(B)$. Формы $\omega_U^* = \omega_U + A|_U$ инвариантны относительно R и удовлетворяют равенствам $d\omega_U^* = F^*|_U$ для любых $U \in \mathcal{U}$.

Если теперь построить отображения $\xi_{VU}^* : U \cap V \to T^k$ для всех $U, V \in \mathcal{U}$, $U \cap V \neq \emptyset$, используя в (12) гомоморфизм h^* и формы ω_U^* и ω_V^*, то они будут удовлетворять равенствам $\xi_{VU}^* = \zeta_V + \xi_{VU} - \zeta_U$. А это согласно предложению 2 означает, что соответствующие коциклам $\{\xi_{VU}\}$ и $\{\xi_{VU}^*\}$ почти Δ-расслоения ρ и ρ^* изоморфны в категории $\mathcal{KP}(B, T^k, \Delta, R)$. Следовательно, формула $\overline{\eta}([F]_\Delta) = [\rho]$ корректно определяет отображение $\overline{\eta} : H_\Delta^2(B, \mathfrak{t} \mid \mathbb{Z}^k) \to \mathcal{BP}(B, T^k, \Delta, R)$.

Так как формы из набора $\{\omega_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ инвариантны относительно R и удовлетворяют условию (2), то на расслоении ρ существует G-связность H с локальными формами связности $\{\omega_U\}$. При этом F — ее базовая форма кривизны. Отсюда следует $\eta[\rho] = [F]_\Delta$ и $\eta \circ \overline{\eta} = \mathrm{id}$.

Рассмотрим, наконец, элементы $[F]_\Delta^1$, $[F]_\Delta^2$ и $[F]_\Delta = [F]_\Delta^1 + [F]_\Delta^2$ группы $H_\Delta^2(B, \mathfrak{t}|\mathbb{Z}^k)$ и построим указанным образом соответствующие им гомоморфизмы $h^1, h^2, h : Z_1(B) \to T^k$, наборы форм $\{\omega_U^1\}$, $\{\omega_U^2\}$, $\{\omega_U\}$ и коциклов $\{\xi_{VU}^1\}$, $\{\xi_{VU}^2\}$, $\{\xi_{VU}\}$. При этом без ограничения общности можно выбрать $h = h^1 + h^2$ и $\omega_U = \omega_U^1 + \omega_U^2$ для всех $U \in \mathcal{U}$. Но тогда в силу (12) $\xi_{VU} = \xi_{VU}^1 + \xi_{VU}^2$ для любых $U, V \in \mathcal{U}$, $U \cap V \neq \emptyset$. Таким образом, для соответствующих коциклам $\{\xi_{VU}^1\}$, $\{\xi_{VU}^2\}$ и $\{\xi_{VU}\}$ почти Δ-расслоений ρ^1, ρ^2 и ρ имеет место равенство $[\rho] = [\rho^1] + [\rho^2]$. А это значит, что $\overline{\eta}$ — гомоморфизм. □

Пример. Пусть для любого $[i] \in \Delta = \mathbb{Z}_4$ символ $\widehat{R}_{[i]}$ обозначает поворот пространства $\mathbb{R}^3$ на угол $i\pi/4$ вокруг оси $(0,0) \times \mathbb{R}$. Тогда формула $\widehat{R}(x, [i]) = \widehat{R}_{[i]}(x)$ для $[i] \in \Delta$ и $x \in \mathbb{R}^3$ определяет правое действие $\widehat{R} : \mathbb{R}^3 \times \Delta \to \mathbb{R}^3$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ точки $v_l = (0, 0, l)$, $w_{[0]} = (1, 0, 0)$, $w_{[i]} = \widehat{R}_{[i]}(w_{[0]})$, а также треугольники $\sigma_{[0]}^l = \left[w_{[0]} w_{[1]} v_l\right]$ и $\sigma_{[i]}^l = \widehat{R}_{[i]}\left(\sigma_{[0]}^l\right) = \left[w_{[i]} w_{[i+1]} v_l\right]$, $l = -1, 0, 1$, $[i] \in \Delta$. Положим $B_l = \cup_{[i] \in \Delta} \sigma_{[i]}^l$ и $B = B_{-1} \cup B_0 \cup B_1$. Тогда B — полиэдр, а $R = \widehat{R}|_{B \times \Delta}$ — регулярное симплициальное действие группы Δ на B.

Цепи $c_1 = \sum\limits_{[i] \in \Delta} \left(\sigma_{[i]}^0 + \sigma_{[i]}^1\right)$ и $c_{-1} = \sum\limits_{[i] \in \Delta} \left(\sigma_{[i]}^0 + \sigma_{[i]}^{-1}\right)$ являются 2-циклами, гомологические классы которых образуют базис группы $H_2(B)$. Согласно симплициальной теореме де Рама ([4], гл. III, п. 3) и предложению 2 из [11] произвольным $m, n \in \mathbb{Z}$ соответствует такой элемент $[F]_\Delta \in H_\Delta^2(B, \mathfrak{t}|\mathbb{Z})$, где $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли группы T^1, что $I_{[F]}([c_1]) = m$ и $I_{[F]}([c_{-1}]) = n$. По теореме 4 форма F в свою очередь порождает гладкое почти Δ-расслоение $\rho = (\xi, \mathcal{A})$ с проекцией $p : E \to B$ и структурной группой T^1, а также некоторую G-связность H на ξ с базовой формой кривизны F.

Допустим, что E_l — пространство сужения расслоения ξ над подполиэдром $B_l \cup B_0$ для $l = -1, 1$ и E_0 — сужение ξ над B_0. Тогда E_1 и E_{-1} гомеоморфны линзам типов $(|m|, 1)$ и $(|n|, 1)$, а E_0 — полноторию. Таким образом, топологически E представляет собой результат склейки двух линз по полноториям.

В заключение отметим следующее. Пусть B' — топологическое пространство, для которого существует гомеоморфизм $f : B \to B'$. Тогда f определяет (криволинейную) триангуляцию пространства B' и позволяет перенести на B' все конструкции настоящей работы. В частности, таким образом полученные здесь результаты могут быть применены к расслоениям над гладкими многообразиями [8] и орбифолдами [12].

Литература

[1] Новиков С.П. *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса*, УМН **37** (5), 3–49 (1982).
[2] Яковлев Е.И. *Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами*, Современная математика. Фундаментальные направления **22**, 100–126 (2007).
[3] Рыжкова А.В., Яковлев Е.И. *Расслоения с группами многозначных автоморфизмов*, Матем. заметки **77** (4), 600–616 (2005).
[4] Леманн Д. *Гомотопическая теория дифференциальных форм*, в сб. "Математика. Новое в зарубежной науке" (Мир, М., 1981), с. 7–85.
[5] Уитней Х. *Геометрическая теория интегрирования* (Ин. лит., М., 1969).
[6] Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли* (Мир, М., 1987).
[7] Суон Р.Дж. *Теория Тома дифференциальных форм на симплициальных множествах*, в сб. "Математика. Новое в зарубежной науке" (Мир, М., 1981), с. 172–176.
[8] Манкрс Дж. *Элементарная дифференциальная топология.* Дополнение в кн: Милнор Дж., Сташеф Дж. *Характеристические классы* (Мир, М., 1979).
[9] Постников М.М. *Введение в теорию Морса* (Наука, М., 1971).
[10] Бредон Г. *Введение в теорию компактных групп преобразований* (Наука, М., 1980).
[11] Рыжкова А.В., Яковлев Е.И. *Главные расслоения, допускающие почти инвариантные структуры*, Изв. вузов. Математика, №8, 48–59 (2007).
[12] Moerdijk I., Pronk D.A. *Simplicial cohomology of orbifolds*, Indag. Math., New Ser. **10** (2), 269–293 (1999).

В.Ю. Зинченко

ассистент, кафедра геометрии и высшей алгебры,
Нижегородский государственный университет,
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23,

e-mail: vera_zinchenko@inbox.ru

Е.И. Яковлев

профессор, кафедра геометрии и высшей алгебры,
Нижегородский государственный университет,
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23,

e-mail: yei@uic.nnov.ru; e.yakovlev@mm.unn.ru

V.Y. Zinchenko

Assistant, Chair of Geometry and Higher Algebra,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., 603950, Nizhni Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: vera_zinchenko@inbox.ru

E. I. Yakovlev

Professor, Chair of Geometry and Higher Algebra,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., 603950, Nizhni Novgorod, 603950 Russia,

e-mail: yei@uic.nnov.ru; e.yakovlev@mm.unn.ru