ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.972.8

А.Г. ЧЕНЦОВ

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КОРРЕКТНЫХ РАСШИРЕНИЙ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР

Статья посвящена проблеме построения корректных расширений абстрактных задач управления, не обладающих, вообще говоря, устойчивостью при ослаблении системы ограничений. В основе построения — топологическая конструкция, использующая специальную модель, в которой асимптотика (приближенных) решений исходной задачи с ослабленными ограничениями отражается посредством некоторых обобщенных задач с невозмущаемыми ограничениями. Наиболее известный прием такого рода — компактификация пространства управлений — дополняется более общими процедурами, в которых важную роль играют совершенные и почти совершенные отображения.

Часть I

Рассматривается весьма общая схема расширения задачи о достижимости в условиях возмущения системы ограничений. В качестве обобщенных элементов используются конечно-аддитивные меры. Предлагаемое расширение конструируется универсальным в пределах заданного диапазона ограничений асимптотического характера. Приложения связаны, в частности, с задачами управления линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами при управлении. Эти приложения рассматриваются во второй части статьи.

Приведем список используемых сокращений: в/з — вещественнозначная (функция), ИП — измеримое пространство, к.-п. — кусочно-постоянная (функция), МП — множество притяжения, н. спр. — непрерывная справа (функция), ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/а — полуалгебра (множеств), п/м — подмножество, п/п — подпространство, ТВП — топологическое векторное пространство, ТП — топологическое пространство.

1. Введение

Предметом исследования являются неустойчивые задачи со следующей спецификой: при выбранной версии возмущения ограничений (ослабление условий) эффект неустойчивости оказывается полезным, поскольку он приводит к реальному расширению наших возможностей. Ситуация такого рода известна в теории управления (напр., [1], [2]) и реализуется, в частности, посредством скользящих режимов в нелинейных управляемых системах с геометрическими ограничениями. В условиях импульсных ограничений ([3], с. 84–94) на выбор управления (этот случай важен, в частности, для исследования задач космической навигации [4]) при наличии дополнительных ограничений на траектории ослабление последних в принципе также полезно; однако представление возникающих при этом возможностей в части достижения тех или иных целей становится затруднительным в связи с трудностью в отыскании адекватных аналогов скользящих режимов для задач с геометрическими ограничениями. Итак, в одном случае [1], [2] имеем хорошее представление обобщенных элементов (ОЭ), а в другом — нет (можно отметить известную трудность корректного определения умножения разрывной функции на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 0001 00348, 01-01-96450) и Международного научно-технического центра (проект № 1293).

обобщенную). Имеет смысл выделить сами задачи асимптотического анализа в связи с проблемой приближенного соблюдения ограничений и некоторое обеспечение этих задач, связанное с построением подходящего пространства ОЭ; удачный выбор последнего определяет успех в решении вопросов описания асимптотических эффектов при неточном соблюдении ограничений. Такой взгляд фактически возникает уже в ([1], гл. III, IV); его материализация проведена, в частности, в [5]–[10], где для представления ОЭ использовались конечно-аддитивные (к.-а.) меры. Одна из содержательных задач, охватываемая конструкцией [5]–[10], связана как раз с управлением линейной системой при импульсных и иных ограничениях. При этом допускалось, что коэффициенты при управлении образуют, вообще говоря, разрывные функции. Это обстоятельство мотивирует применение к.-а. мер ограниченной вариации для целей своеобразного замыкания эффектов, создаваемых асимптотиками обычных управлений; см. в этой связи ([11], гл.IV) в части отождествления таких мер и линейных непрерывных функционалов на пространствах разрывных функций. Возможен, однако, и другой взгляд на содержательную постановку; именно, можно рассматривать управление с толчками [12] в качестве реализуемых воздействий на систему, что опять-таки проще представить в случае линейной системы, используя формулу Коши. Можно представить и естественный способ замыкания множества эффектов для таких режимов управления, причем в линейном случае для этой цели вполне пригодны к.-а. меры, используемые в качестве ОЭ ([6], §§ 7.1–7.5). Правда, сама глобальная линейность здесь несущественна; в обоих вышеупомянутых случаях требуется только обеспечить представления в духе ([6], с. 74) и ([6], с. 294) соответственно. В этой связи отметим [13], где исследуется случай, когда оператор вход-выход имеет смысл суперпозиции нелинейного безинерционного преобразователя и линейного “блока” (модели такого типа используются в радиотехнике ([14], гл. 11). Полезно напомнить и о достаточно традиционной схеме расширения в классе к.-а. $(0, 1)$-мер (напр., ([5], § 3.6; [6], § 7.6). Для всех упомянутых (и для некоторых иных) случаев в [5]–[10] построены специализированные процедуры корректного расширения соответствующих задач о достижимости (а также экстремальных задач [15], [16]), приводящие, однако, к схожим в идейном отношении результатам. Последнее обстоятельство позволяло надеяться на построение некой универсальной схемы расширения в классе к.-а. мер, детализациями которой являлись бы упомянутые специализированные процедуры.

В работах [17]–[19] предложена топологическая конструкция, конкретизации которой пригодны и для только что упомянутых постановок задач импульсного управления и для расширения нелинейных задач управления типа исследуемых в [1], [2]. Представляется, однако, что вариант этой конструкции, обслуживаемый пространством ОЭ в виде к.-а. мер, заслуживает самостоятельного рассмотрения. Один из вопросов, относящихся к этой версии, связан с обеспечением значительной универсальности расширений по отношению к варианту ослабления ограничений [5]–[10]. В данной работе для его решения применяется новая схема, предусматривающая использование битопологических пространств, т.е. множеств, оснащаемых парой топологий каждое, а также универсально (в смысле этой пары) непрерывных отображений. Такой подход позволяет выработать единый взгляд на структуру универсального расширения в данном диапазоне ограничений асимптотического характера. Конкретная реализация таких битопологических схем расширения возможна в классе к.-а. мер и, более того, она доставляет целый ряд конкретных и эффективно проверяемых свойств, согласующихся с полученными ранее (посредством специализированных расширений) положениями об асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений. В этом смысле она оказывается полезной для целей асимптотического анализа задач динамики, связанных с управлением линейными системами в условиях фазовых ограничений, краевых и промежуточных условий.

2. Постановка задачи

Фиксируем три непустых множества $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$, отображения

$$\mathbf{s} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{X}, \quad \mathbf{h} : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{H}$$

переводят $\mathbf{F}$, играющее роль пространства обычных решений (или управлений), в $\mathbf{X}$ и в $\mathbf{H}$ соответственно; наконец, задано множество $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, определяющее ограничение $\mathbf{s}(f) \in \mathbf{Y}$ на выбор $f \in \mathbf{F}$, именуемое $\mathbf{Y}$-ограничением. Тогда $\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{Y})$ (прообраз $\mathbf{Y}$) определяет множество допустимых элементов, а его образ $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{Y})) = \{\mathbf{h}(f) : f \in \mathbf{s}^{-1}(\mathbf{Y})\}$ — достижимое множество (ДМ) при данном $\mathbf{Y}$-ограничении. Наряду с этим ДМ часто приходится рассматривать множества вида $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(U))$, где множество U в некотором смысле близко к $\mathbf{Y}$. Ограничимся рассмотрением случаев, когда $\mathbf{Y} \subset U \subset \mathbf{X}$; замену $\mathbf{Y}$ на U именуем ослаблением $\mathbf{Y}$-ограничения. Вопрос о выборе множества U можно решать, в частности, методами асимптотического анализа. Именно, вместо одного множества U рассматриваем непустое семейство $\mathcal{Y}$ таковых, сужающееся к $\mathbf{Y}$: $\mathcal{Y}$ подбирается так, что $\mathbf{Y}$ есть пересечение всех множеств $U \in \mathcal{Y}$ и, кроме того, так, что при этом для $U_1 \in \mathcal{Y}$ и $U_2 \in \mathcal{Y}$ всякий раз можно указать $U_3 \in \mathcal{Y}$ со свойством $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. В конкретных задачах существует много естественных способов построения таких семейств $\mathcal{Y}$. Иногда бывает трудно отдать предпочтение какому-то одному варианту (стало быть, становится желательной определенная универсальность метода исследования), но сейчас остановимся на некотором семействе $\mathcal{Y}$ упомянутого типа и, оснащая $\mathbf{H}$ топологией ϑ, введем (взамен $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{Y}))$) множество

$$\mathrm{Att} \triangleq \bigcap_{U \in \mathcal{Y}} \overline{\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(U))} \tag{2.1}$$

(черта сверху обозначает замыкание в $(\mathbf{H}, \vartheta)$), являющееся ([5], с. 39) множеством притяжения (МП), но только в классе приближенных решений-направленностей ([20], гл. 2). Впрочем, при необременительных условиях ([6], с. 38) (2.1) допускает исчерпывающую секвенциальную реализацию, т. е. становится обычным МП. Напомним, что $\mathrm{Att} = \mathrm{Att}(\mathcal{Y})$. Вопрос о построении МП (2.1) представляется основным, но нельзя упускать при этом и другой, важный на практике, вопрос: когда МП (2.1) не зависит в тех или иных пределах от выбора $\mathcal{Y}$? Мы соединяем оба упомянутых вопроса при выборе схемы исследования: будем сразу конструировать схему определения МП (2.1) со свойством универсальности в заданном диапазоне ограничений асимптотического характера. По самой логике такого исследования требуется ввести границы данного диапазона, т.е. полярные варианты семейства $\mathcal{Y}$, обслуживаемые одной схемой. Эти варианты мы связываем с топологизациями $\mathbf{X}$. Именно, будут, во-первых, выбираться сравнимые топологии $\mathbf{X}$ и, во-вторых, для этих топологий будут выбираться различные по своей “полноте” семейства окрестностей $\mathbf{Y}$. В связи с последним обстоятельством отметим [10], [17]-[19]. В ряде случаев использование всех окрестностей $\mathbf{Y}$ для построения $\mathcal{Y}$ не представляется естественным. Так, например, в условиях метризуемости $\mathbf{X}$ часто ограничиваются применением лишь ε-окрестностей $\mathbf{Y}$. Заметим, наконец, что в некоторых конкретных задачах для построения $\mathcal{Y}$ используются подмножества (п/м) $\mathbf{X}$, не связываемые непосредственно с какой-либо топологией; эти случаи не рассматриваем, отсылая к [5], [6].

3. Общие определения и обозначения

Используем кванторы, связки, символы $\triangleq$ (равно по определению) и def (по определению). Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Через B^A обозначаем множество всех функций, действующих из множества A в множество B; если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то через $f^1(C)$ обозначаем образ множества C при действии f ([21], с. 81). Если X — множество, то при

$$\mathcal{B}[X] \triangleq \{\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid \forall A \in \mathfrak{X},\ \forall B \in \mathfrak{X}\ \exists C \in \mathfrak{X} : C \subset A \cap B\}$$

в виде $\mathcal{B}_0[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{B}[X] \mid \emptyset \notin \mathcal{X}\}$ получаем множество всех базисов фильтров X. В свою очередь, для всякого множества X в виде

$$\mathfrak{F}[X] \triangleq \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid (\emptyset \notin \mathcal{H})\&(A \cap B \in \mathcal{H}\ \forall A \in \mathcal{H},\ \forall B \in \mathcal{H})\& \\ \&(\{U \in \mathcal{P}(X) \mid H \subset U\} \subset \mathcal{H}\ \forall H \in \mathcal{H})\}$$

имеем множество всех фильтров X; если $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_0[X]$, то $\{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists M \in \mathcal{X} : M \subset S\} \in \mathfrak{F}[X]$.

Следуя ([20], гл. 2), используем направленности и сходимость по Мору–Смиту. Обозначаем направленности посредством триплетов, следуя ([6], с. 33): $(D, \preceq, \varphi)$ есть направленность в множестве U, если $(D, \preceq)$, $D \neq \emptyset$, — направленное множество ($\preceq$ есть направление на D) и $\varphi \in U^D$; при этом

$$(U - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi] \triangleq \{V \in \mathcal{P}(U) \mid \exists d \in D \ \forall \delta \in D \ ((d \preceq \delta) \Longrightarrow (\varphi(\delta) \in V))\} \in \mathfrak{F}[U]$$

есть фильтр множества U, ассоциированный с $(D, \preceq, \varphi)$. Если (X, τ) — топологическое пространство (ТП) (τ — топология X) и $M \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(M, \tau)$ и $\mathbb{N}_\tau[M]$ обозначаем соответственно замыкание M и семейство всех окрестностей ([20], гл. 4) M в (X, τ); если при этом $x \in X$, а $M = \{x\}$ (одноэлементное множество), то вместо $\mathbb{N}_\tau[M]$ используем обозначение $N_\tau(x)$, $N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[X]$, получая фильтр всех окрестностей x в (X, τ). Следуя [5]–[10], определяем МП, подобные (2.1): если U — непустое множество, $\mathcal{U} \in \mathcal{B}[U]$, (V, τ) есть ТП и $t \in V^U$, то

$$(\tau - \mathrm{LIM})[\mathcal{U} \mid t] \triangleq \bigcap_{H \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(t^1(H), \tau) \tag{3.1}$$

есть МП в классе приближенных решений-направленностей ([5], сс. 41, 42); отметим также конструкции [22]. Следуем ([6], с. 34) при обозначении сходимости направленностей: если $(D, \preceq, \varphi)$ — направленность в ТП (X, τ) и $x \in X$, то ([20], гл. 2) def

$$((D, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau} x) \Longleftrightarrow (N_\tau(x) \subset (X - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]).$$

В этих терминах (3.1) получает исчерпывающее описание в виде МП; отметим один частный случай ([6], с. 38): если $\mathcal{U}$ обладает счетной базой, а (V, τ) — ТП с первой аксиомой счетности, то (3.1) есть обычное МП в классе приближенных решений-последовательностей. Возвращаясь к (3.1) в общем случае, отметим, что $(\tau - \mathrm{LIM})[\mathcal{U} \mid t]$ — множество всех $v \in V$ таких, что для некоторой направленности $(D, \preceq, \varphi)$ в U имеет место

$$(\mathcal{U} \subset (U - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]) \& ((D, \preceq, t \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} v); \tag{3.2}$$

в (3.2) символ $\circ$ используется, как обычно, для обозначения суперпозиции функций. Представление (3.2) доставляет МП (3.1) (особенно в упомянутом частном случае) весьма актуальные для приложений свойства: речь идет об естественном для практики способе достижения цели в условиях приближенного соблюдения ограничений.

Если U и V — множества, $f \in V^U$ и $\mathcal{V} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(V))$, то $f^{-1}[\mathcal{V}] \triangleq \{f^{-1}(H) : H \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(U))$; если при этом $\mathcal{V} \in \mathcal{B}[V]$, то $f^{-1}[\mathcal{V}] \in \mathcal{B}[U]$.

Если (X, τ) есть ТП, то через $\mathcal{F}_\tau$ (через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$) обозначаем семейство всех замкнутых (компактных ([23], с. 196)) в (X, τ) п/м X. Если (U, τ'), $U \neq \emptyset$, и (V, τ''), $V \neq \emptyset$, — суть ТП, то $C(U, \tau', V, \tau'')$ есть def множество всех функций $f \in V^U$, непрерывных [20], [23] в смысле ТП (U, τ') и (V, τ''), а

$$C_{\mathbf{ap}}(U, \tau', V, \tau'') \triangleq \{f \in C(U, \tau', V, \tau'') \mid (f^1(F) \in \mathcal{F}_{\tau''} \ \forall F \in \mathcal{F}_{\tau'}) \& \\ \& (f^{-1}(\{v\}) \in (\tau' - \mathrm{comp})[U] \ \forall v \in V)\} \tag{3.3}$$

есть множество всех почти совершенных ([23], с. 287) отображений из ТП (U, τ') в ТП (V, τ''). Отметим, в частности, что в условиях, обеспечивающих (3.3), $\forall f \in C_{\mathbf{ap}}(U, \tau', V, \tau'')$, $\forall H \in \mathcal{P}(U)$

$$f^1(\mathrm{cl}(H, \tau')) = \mathrm{cl}(f^1(H), \tau'').$$

Данное свойство замкнутых ([23], с. 68) отображений часто используется далее без дополнительных пояснений. Если (U, τ'), $U \neq \emptyset$, — компактное ТП, а (V, τ''), $V \neq \emptyset$, — хаусдорфово ТП, то $C(U, \tau', V, \tau'') = C_{\mathbf{ap}}(U, \tau', V, \tau'')$.

В дальнейшем линейные операции, умножение и порядок в пространствах функционалов определяем поточечно. Пусть $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$; если $k \in \mathcal{N}$, то $\overline{1,k} \in \{i \in \mathcal{N} \mid i \le k\}$. Для исключения двусмысленности в традиционных обозначениях постулируем, что элементы $\mathcal{N}$ (натуральные числа) не являются множествами; если S — множество и $n \in \mathcal{N}$, то, как обычно, вместо $S^{\overline{1,n}}$ используем обозначение S^n. Данное соглашение удобно, в частности, когда S есть вещественная прямая $\mathbb{R}$; тогда $S^n = \mathbb{R}^n$ — обычное n-мерное арифметическое пространство.

4. Асимптотическая достижимость

Вернемся к постановке раздела 2; итак, $\mathbf{F}$, $\mathbf{X}$ и $\mathbf{H}$ — непустые множества, $\mathbf{s} \in \mathbf{X}^{\mathbf{F}}$, $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$ и $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Полагаем, что $\mathbf{X}$ оснащено парой (сравнимых) топологий $\tau_{\mathbf{l}}$ и $\tau_{\mathbf{u}}$, $\tau_{\mathbf{l}} \subset \tau_{\mathbf{u}}$; $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$ — битопологическое пространство. Пусть задано семейство $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}])$ такое, что

$$(\forall A_1 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}},\ \forall A_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}\ \exists A_3 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}} : A_3 \subset A_1 \cap A_2)\&$$
$$\&(\forall x \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{Y}\ \exists U_1 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}},\ \exists U_2 \in N_{\tau_{\mathbf{l}}}(x) : U_1 \cap U_2 = \emptyset) \quad (4.1)$$

(с ТП $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}})$ связываем непустое семейство $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ окрестностей $\mathbf{Y}$, не обязательно совпадающее с $\mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}]$: типичный пример доставляет семейство ε-окрестностей замкнутого множества в метризуемом пространстве). Полагаем $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} \triangleq \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]$, связывая с ТП $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}})$ семейство всех окрестностей $\mathbf{Y}$ в этом ТП. При этом

$$(\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \in \mathcal{B}[\mathbf{F}])\&(\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \in \mathcal{B}[\mathbf{F}]); \quad (4.2)$$

$\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$, а потому аналогичное вложение справедливо и для семейств (4.2), формирующих диапазон ограничений асимптотического характера. Далее, $\mathbf{H}$ оснащаем топологией ϑ; ТП $(\mathbf{H}, \vartheta)$ именуем целевым. При этом (2.1) конкретизируется в виде одного из множеств $(\vartheta - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid \mathbf{h}] \in \mathcal{F}_{\vartheta}$, $(\vartheta - LIM)[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{h}] \in \mathcal{F}_{\vartheta}$. Для их определения введем специальную модель.

Фиксируем непустое множество $\mathbf{K}$, оснащаемое топологиями $t_{\mathbf{l}}$ и $t_{\mathbf{u}}$, $t_{\mathbf{l}} \subset t_{\mathbf{u}}$; итак, $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, t_{\mathbf{u}})$ — битопологическое пространство, формирующее пару ТП: $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}})$ и $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}})$. Пусть

$$(\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}})\&(g \in \mathbf{X}^{\mathbf{K}})\&(\omega \in \mathbf{H}^{\mathbf{K}}). \quad (4.3)$$

Постулируем выполнение следующих условий:

$$(g \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}) \cap C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}}, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}}))\&(\omega \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, \mathbf{H}, \vartheta))\&$$
$$\&(\mathbf{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathbf{u}}))\&(\mathbf{s} = g \circ \mathbf{m})\&(\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}). \quad (4.4)$$

Оставляя пока открытым вопрос о конкретном выборе модели со свойствами (4.3), (4.4), отметим следствия этих предположений.

Предложение 4.1. *Справедливы равенства*

$$((t_{\mathbf{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid \mathbf{m}] = (t_{\mathbf{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}])\&$$
$$\&((t_{\mathbf{u}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid \mathbf{m}] = (t_{\mathbf{u}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}]).$$

Доказательство. Введем $\mathbf{T} \triangleq \{t_{\mathbf{l}}; t_{\mathbf{u}}\}$. Из (4.4) следует свойство: $g \in C(\mathbf{K}, t, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}})$ при $t \in \mathbf{T}$. Имеем

$$(t - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}] \subset (t - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid \mathbf{m}]. \quad (4.5)$$

Пусть μ — элемент множества в правой части (4.5). С учетом (3.1), (3.2) подбираем для $\mu \in \mathbf{K}$ направленность $(D, \preceq, \varphi)$ в $\mathbf{F}$ со свойствами

$$(\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \subset (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi])\&((D, \preceq, \mathbf{m} \circ \varphi) \xrightarrow{t} \mu). \quad (4.6)$$

Используя непрерывность g, получаем сходимость

$$(D, \preceq, g \circ \mathbf{m} \circ \varphi) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{l}}} g(\mu). \quad (4.7)$$

В силу (4.4), (4.7) имеем сходимость направленности $(D, \preceq, \mathbf{s}\circ\varphi)$ к $g(\mu)$ в $(\mathbf{X}, \tau_{\mathfrak{l}})$. Тогда $g(\mu) \in \mathbf{Y}$. В самом деле, допустим противное: $g(\mu) \in \mathbf{X}\backslash\mathbf{Y}$. С учетом (4.1) подберем $H_1 \in \mathcal{Y}_{\mathfrak{l}}$ и $H_2 \in N_{\tau_{\mathfrak{l}}}(g(\mu))$ со свойством $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. В силу (4.6) $\mathbf{s}^{-1}(H_1) \in (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]$. С другой стороны, из вышеупомянутого следствия (4.7) имеем $H_2 \in (\mathbf{X} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \mathbf{s}\circ\varphi]$. Поэтому $\mathbf{s}^{-1}(H_2) \in (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]$ и по свойствам фильтра $\mathbf{s}^{-1}(H_1 \cap H_2) = \mathbf{s}^{-1}(H_1) \cap \mathbf{s}^{-1}(H_2) \in (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]$, что невозможно, ибо $\mathbf{s}^{-1}(H_1 \cap H_2) = \emptyset$. Итак, $g(\mu) \in \mathbf{Y}$ и

$$\mathbb{N}_{\tau_{\mathfrak{l}}}[\mathbf{Y}] \subset N_{\tau_{\mathfrak{l}}}(g(\mu)) \subset (\mathbf{X} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \mathbf{s}\circ\varphi]. \tag{4.8}$$

Пусть $A \in \mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_{\mathfrak{l}}}[\mathbf{Y}]]$, а $B \in \mathbb{N}_{\tau_{\mathfrak{l}}}[\mathbf{Y}]$ таково, что $A = \mathbf{s}^{-1}(B)$. Из (4.8) имеем $B \in (\mathbf{X} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \mathbf{s}\circ\varphi]$ и $A \in (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]$. Итак, $\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_{\mathfrak{l}}}[\mathbf{Y}]] \subset (\mathbf{F} - \mathrm{ass})[D; \preceq; \varphi]$. С учетом (3.2) имеем (см. (4.6)) $\mu \in (t - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_{\mathfrak{l}}}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}]$. Вложение, противоположное (4.5), установлено. $\square$

Предложение 4.2. *Справедливы равенства*

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_{\mathfrak{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathfrak{l}}] \mid \mathbf{m}] = (t_{\mathbf{u}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}].$$

Доказательство. Из (4.4) и свойств $t_{\mathfrak{l}}$, $t_{\mathbf{u}}$ вытекает, что $\mathbf{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathfrak{l}})$. Кроме того, $\mathcal{Y}_{\mathfrak{l}} \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ и $N_{\tau_{\mathfrak{l}}}(x) \subset N_{\tau_{\mathbf{u}}}(x)$ $\forall x \in \mathbf{X}$. Поэтому имеет место аналог (4.1), соответствующий замене $\mathcal{Y}_{\mathfrak{l}}$ на $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ и (при $x \in \mathbf{X}$) $N_{\tau_{\mathfrak{l}}}(x)$ на $N_{\tau_{\mathbf{u}}}(x)$. Поэтому с учетом следствия 3.1 из [19] получаем равенство

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_{\mathbf{u}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}]. \tag{4.9}$$

С другой стороны, используя (4.1) и следствие 3.1 из [19], докажем совпадение $g^{-1}(\mathbf{Y})$ и $(t_{\mathfrak{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathbb{N}_{\tau_{\mathfrak{l}}}[\mathbf{Y}]] \mid \mathbf{m}]$; с учетом предложения 4.1 имеем

$$g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_{\mathfrak{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathfrak{l}}] \mid \mathbf{m}]. \tag{4.10}$$

Комбинируя (4.9), (4.10), получаем требуемое свойство. $\square$

Теорема 4.1. *Имеют место равенства*

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\vartheta - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{h}] = (\vartheta - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathfrak{l}}] \mid \mathbf{h}].$$

Доказательство сводится к комбинации предложения 4.2 и предложения 4.1 из [7] (см. также [24]). Из теоремы 4.1 следует асимптотическая эквивалентность $\mathcal{Y}_{\mathfrak{l}}$ и $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$. В силу монотонности операций, используемых в (3.1), получаем расширение, универсальное в диапазоне ограничений асимптотического характера, определяемом $\mathcal{Y}_{\mathfrak{l}}$ и $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$. Применение теоремы 4.1 к задачам, рассматриваемым в [5], [6], доставляет конкретные условия асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений.

5. Конечно-аддитивные меры как обобщенные элементы

Рассмотрим модель на основе материализации ОЭ (точки $\mathbf{K}$) в виде к.-а. мер на измеримом пространстве (ИП) с полуалгеброй (п/а) множеств. В связи с использованием таких ИП см. [5]–[10]. Конструкции к.-а. теории меры проще реализовать для ИП с алгебрами и п/а множеств (эти два типа ИП неразличимы с точки зрения реализуемых функциональных пространств типа $B(S, \Sigma)$ ([11], гл. IV) и их сопряженных).

Фиксируем непустое множество E и п/а (см. [5], [6], [25]) $\mathcal{L}$ п/м E; $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с п/а множеств. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем конус всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) к.-а. мер на $\mathcal{L}$ ([5], гл. 3; [6], гл. 3; [11], гл. III, IV), а через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейное пространство, порожденное конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$: $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — множество всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию. В терминах полной вариации определяется сильная норма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Линейная оболочка $B_0(E, \mathcal{L})$ множества всех индикаторов ([25], с. 56) множеств из $\mathcal{L}$ есть п/м множества $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных в/з функций на E. Линейное пространство $\mathbb{B}(E)$ оснащаем sup-нормой $\|\cdot\|$ ([11], с. 261), получая в виде замыкания $B_0(E, \mathcal{L})$ в смысле $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$ банахово пространство

$B(E,\mathcal{L})$ (аналог пространства $B(S,\Sigma)$ [11]), у которого топологическое сопряженное изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме; следуем [5], [6] и оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$, получая локально выпуклый σ-компакт

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L})). \tag{5.1}$$

Условия компактности в ТП (5.1) определяются известной теоремой Алаоглу ([11], гл. V) (см. также [5], с. 70; [6], с. 42). Введем топологию $\tau_0(\mathcal{L})$ ([6], с. 44) множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, отвечающую представлению $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в виде подпространства (п/п) $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ в топологии тихоновского произведения экземпляров $\mathbb{R}$, оснащаемых каждый дискретной топологией, с индексным множеством $\mathcal{L}$. Если τ — топология $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $M\in\mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, то через $\tau|_M$ обозначаем топологию M, индуцированную (на M) из $(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau)$. Полагаем далее

$$\mathfrak{K}\stackrel{\triangle}{=}\{M\in\mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))\mid\tau_*(\mathcal{L})|_M\subset\tau_0(\mathcal{L})|_M\}. \tag{5.2}$$

Ясно, что $\mathfrak{K}$ (5.2) — семейство всех множеств M, $M\subset\mathbb{A}(\mathcal{L})$, для каждого из которых топология $\tau_*(\mathcal{L})|_M$ п/п ТП (5.1) слабее топологии, индуцированной на M тихоновским произведением экземпляров $\mathbb{R}$ в дискретной топологии при использовании $\mathcal{L}$ в качестве индексного множества. Следуя ([6], с. 42), введем семейство $\mathbf{B}_*(\mathcal{L})$ всех сильно ограниченных п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Тогда ([6], с. 45)

$$(\mathbf{B}_*(\mathcal{L})\setminus\{\emptyset\}\subset\mathfrak{K})\&((\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]\in\mathfrak{K})\&(\mathcal{P}'(M)\subset\mathfrak{K}\ \forall M\in\mathfrak{K}). \tag{5.3}$$

Из (5.3) следует, в частности, что справедливо

$$(\tau_*(\mathcal{L})-\mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})]\setminus\{\emptyset\}\subset\mathfrak{K}. \tag{5.4}$$

Всюду в этом разделе полагаем, что $\mathbf{K}\in\mathfrak{K}$ (имеется в виду множество, используемое в (4.3), (4.4)) и

$$(t_{\mathbf{l}}\stackrel{\triangle}{=}\tau_*(\mathcal{L})\mid_{\mathbf{K}})\&(t_{\mathbf{u}}\stackrel{\triangle}{=}\tau_0(\mathcal{L})\mid_{\mathbf{K}}); \tag{5.5}$$

итак, битопологическое пространство $(\mathbf{K},t_{\mathbf{l}},t_{\mathbf{u}})$ раздела 4 построено (свойство (5.4) может использоваться для более частных постановок; в данном разделе условие $*$-слабой компактности $\mathbf{K}$ выполненным не предполагается). Из (5.2) и (5.5) имеем требуемое (в разделе 4) свойство $t_{\mathbf{l}}\subset t_{\mathbf{u}}$. Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество $\mathbf{F}$ (в конкретных версиях основной задачи природа $\mathbf{F}$ может быть весьма различной) и отображение $\mathbf{m}\in\mathbf{K}^{\mathbf{F}}$, а также полагаем выполненным (как и в (4.4))

Условие 5.1. $\mathbf{K}=\mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}),t_{\mathbf{u}})$.

Замечание 5.1. Ниже будет построен весьма общий вариант конструкции раздела 4, что, в частности, позволяет использовать различные версии $\mathbf{F}$ и $\mathbf{m}$. Уже в случае импульсного управления линейной системой можно указать два существенно различающихся варианта ([6], гл. 3, 7). Однако эти случаи объединяются схемой раздела 4, если использовать аксиоматический подход с целью охватить разнообразные варианты $(\mathbf{F},\mathbf{m})$. С этих пор модель играет роль объединяющего начала для целого класса весьма разнородных, на первый взгляд, задач.

Введем конкретную версию множества $\mathbf{X}$ раздела 2. Фиксируем $n\in\mathcal{N}$ и полагаем $\mathcal{R}\stackrel{\triangle}{=}\mathbb{R}^n$; оснащаем $\mathcal{R}$ обычной топологией $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ покоординатной сходимости n-мерного арифметического пространства. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ — непустое множество; элементы $\mathbf{\Gamma}$ играют роль индексов. Всюду в дальнейшем $\mathbf{X}\stackrel{\triangle}{=}\mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}}$; итак, $\mathbf{X}$ — множество n-вектор-функций. Подобная специфика характерна, в частности, для задач управления. Через $\mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м $\mathbf{\Gamma}$. Пусть $\tau_{\mathbf{l}}$ есть def топология $\mathbf{X}$, определяемая тихоновским произведением экземпляров $(\mathcal{R},\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ с индексным множеством $\mathbf{\Gamma}$ ([20], с. 127). Сходимость направленностей в $(\mathbf{X},\tau_{\mathbf{l}})$ сводится к поточечной сходимости (в $(\mathcal{R},\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$) соответствующих проекций ([20], с. 129) (см. также ([6], с. 35)). Итак, $\tau_{\mathbf{l}}$ — топология поточечной сходимости в $\mathbf{X}=\mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}}$. В дальнейшем полагаем, что $\mathbf{Y}\in\mathcal{F}_{\tau_{\mathbf{l}}}$, т. е. $\mathbf{Y}$ — замкнутое п/м $\mathbf{X}$ при оснащении посредством $\tau_{\mathbf{l}}$. Введем семейство $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$

в терминах канонических тихоновских окрестностей $\mathbf{Y}$. Если $K \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $\mathfrak{N}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{Y}, K, \varepsilon)$ обозначаем множество всех $p \in \mathbf{X}$ таких, что $\exists q \in \mathbf{Y}$ $\forall \gamma \in K$, $\forall i \in \overline{1,n}$

$$|p(\gamma)(i) - q(\gamma)(i)| < \varepsilon$$

(элементы $\mathcal{R}$ интерпретируем как функции из $\overline{1,n}$ в $\mathbb{R}$). Полагаем

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \triangleq \{\mathfrak{N}_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) : (K, \varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma}) \times]0, \infty[\}; \tag{5.6}$$

из (5.6) следует, что $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{l}}}[\mathbf{Y}])$ и при этом выполняется (4.1). Фиксируем отображение

$$(S_{i,\gamma})_{(i,\gamma) \in \overline{1,n} \times \mathbf{\Gamma}} : \overline{1,n} \times \mathbf{\Gamma} \longrightarrow B(E, \mathcal{L}); \tag{5.7}$$

в терминах обобщенного матриканта (5.7) введем

$$\mathbf{\Gamma}_0 \triangleq \{\gamma \in \mathbf{\Gamma} \mid S_{i,\gamma} \in B_0(E, \mathcal{L})\ \forall i \in \overline{1,n}\}. \tag{5.8}$$

Определяем базу топологии $\tau_{\mathbf{u}}$, полагая $\forall u \in \mathbf{X}$, $\forall K \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$, $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$N^0_{\mathbf{\Gamma}}(u, K, \varepsilon) \triangleq \{v \in \mathbf{X} \mid (u(\gamma) = v(\gamma)\ \forall \gamma \in K \cap \mathbf{\Gamma}_0) \& \\ \& (|u(\gamma)(i) - v(\gamma)(i)| < \varepsilon\ \forall \gamma \in K \setminus \mathbf{\Gamma}_0,\ \forall i \in \overline{1,n})\}. \tag{5.9}$$

Семейство всех множеств (5.9) составляет базу топологии

$$\tau_{\mathbf{u}} \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbf{X}) \mid \forall u \in G\ \exists K \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma}),\ \exists \varepsilon \in]0, \infty[: N^0_{\mathbf{\Gamma}}(u, K, \varepsilon) \subset G\} \tag{5.10}$$

множества $\mathbf{X}$. Топология (5.10) определена подобно ([10], с. 618) (в [10] обсуждаются свойства топологий типа (5.10)); $\tau_{\mathbf{l}} \subset \tau_{\mathbf{u}}$. Итак, построено битопологическое пространство $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$; напомним, что $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}} = \mathbb{N}_{\tau_{\mathbf{u}}}[\mathbf{Y}]$. В терминах (5.7) конструируем отображение $g : g \in \mathbf{X}^{\mathbf{K}}$ есть def такое отображение, что $\forall \mu \in \mathbf{K}$, $\forall \gamma \in \mathbf{\Gamma}$

$$g(\mu)(\gamma) \triangleq \left(\int_E S_{i,\gamma}\, d\mu\right)_{i \in \overline{1,n}}. \tag{5.11}$$

В (5.11) определено отображение, используемое ранее в качестве универсально непрерывного. Последнее сохраняет силу, поскольку справедливо

Предложение 5.1. *Отображение* g (5.11) *обладает свойством*

$$g \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}) \cap C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}}, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}}).$$

Доказательство. Свойство $g \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}})$ фактически следует из определений (см. также ([6], с. 35)). Пусть $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ — направленность в $\mathbf{K}$ и $\eta \in \mathbf{K}$, для которых

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi) \xrightarrow{t_{\mathbf{u}}} \eta. \tag{5.12}$$

Из (5.12) вытекает сходимость направленности $(\mathbb{D}, \sqsubseteq, \psi)$ к η как в ТП (5.1), так и в смысле $\tau_0(\mathcal{L})$. Здесь учтено свойство $t_{\mathbf{l}} \subset t_{\mathbf{u}}$, а также (5.5). Сходимость в смысле $\tau_0(\mathcal{L})$ означает, что $\forall f \in B_0(E, \mathcal{L})$ $\exists \delta' \in \mathbb{D}$ $\forall \delta'' \in \mathbb{D}$

$$(\delta' \sqsubseteq \delta'') \Longrightarrow \left(\int_E f\, d\psi(\delta'') = \int_E f\, d\eta\right). \tag{5.13}$$

С другой стороны, из сходимости в ТП (5.1) и из (5.11) следует, что $\forall \gamma \in \mathbf{\Gamma}$

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, (g \circ \psi)(\cdot)(\gamma)) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}} g(\eta)(\gamma). \tag{5.14}$$

Комбинируя (5.8), (5.13) и (5.14), получаем сходимость

$$(\mathbb{D}, \sqsubseteq, g \circ \psi) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} g(\eta); \tag{5.15}$$

разумеется, применять (5.13) следует при $f = S_{i,\gamma}$, где $i \in \overline{1,n}$ и $\gamma \in \mathbf{\Gamma}_0$. Имея импликацию (5.12) $\Longrightarrow$ (5.15), легко устанавливаем свойство $g \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}}, \mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}})$. $\square$

Отметим, что $\mathbf{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathbf{l}})$ (простое следствие условия 5.1), $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \in \mathcal{B}[\mathbf{F}]$ и $\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \in \mathcal{B}[\mathbf{F}]$ (как и в (4.2)). Полагаем далее, что $\mathbf{H}$, ϑ, $\mathbf{h}$ и ω удовлетворяют соглашениям раздела 4: $\mathbf{H}$ — непустое множество, ϑ — топология $\mathbf{H}$, $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{\mathbf{F}}$, $\omega \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, \mathbf{H}, \vartheta)$ и при этом $\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m}$. В этих обозначениях $\mathbf{s}$ определяем соглашением $\mathbf{s} \stackrel{\triangle}{=} g \circ \mathbf{m}$, где использовано отображение g (5.11). Такой подход представляется естественным, коль скоро обсуждается, по сути дела, класс возможных моделей, предназначенных каждая для исследования своего круга задач. Итак, мы конкретизируем лишь часть общей конструкции раздела 4, оговорив возможные варианты выбора битопологических пространств $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$ и $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, t_{\mathbf{u}})$, отображения g и условия погружения $\mathbf{F}$ в $\mathbf{K}$ посредством $\mathbf{m}$. Что касается основных предположений (см., в частности, условие 5.1), то можно отметить много конкретных версий упомянутой схемы (см. [6]–[8], [10]; в частности, в связи с условием 5.1 см. [6], сс. 51–57, 267, 286, 306). Получили конкретный блок конструкции раздела 4, объединяющей различные специализированные процедуры [5]–[10].

Поскольку выполнены все требования раздела 4 (см., в частности, (4.1), (4.3), (4.4)), из предложения 4.2 имеем $g^{-1}(\mathbf{Y}) = (t_{\mathbf{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid \mathbf{m}] = (t_{\mathbf{u}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{m}]$; из теоремы 4.1 имеем

$$\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\vartheta - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}] \mid \mathbf{h}] = (\vartheta - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{h}], \tag{5.16}$$

где задействованы конкретные варианты $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$, $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, t_{\mathbf{u}})$, g. Напомним, что на самом деле из (5.16) следует, что $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ есть МП типа (2.1), универсальное в диапазоне асимптотических ограничений, характеризуемом $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$, $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$. Ограничимся рассмотрением одного промежуточного случая, имеющего отношение к исследованию асимптотической нечувствительности при ослаблении части ограничений; это свойство рассматривалось, в частности, в [5]–[10], [19], [24]. Итак, и в случае ТП $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{u}})$ ограничим себя, в части возможных вариантов ослабления $\mathbf{Y}$-ограничения, использованием только канонических (в смысле (5.9), (5.10)) окрестностей $\mathbf{Y}$; для определения таковых заметим, что $\forall K \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$, $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}^0_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{p \in \mathbf{X} \mid \exists q \in \mathbf{Y} : (p(\gamma) = q(\gamma)\ \forall \gamma \in K \cap \mathbf{\Gamma}_0) \& \\ \&(|p(\gamma)(i) - q(\gamma)(i)| < \varepsilon\ \forall \gamma \in K \setminus \mathbf{\Gamma}_0,\ \forall i \in \overline{1,n})\} \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}\end{aligned} \tag{5.17}$$

((5.17) — объединение всех множеств $N^0_{\mathbf{\Gamma}}(q, K, \varepsilon)$, $q \in \mathbf{Y}$). Тогда

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{N}^0_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{Y}, K, \varepsilon) : (K, \varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma}) \times]0, \infty[\} \in \mathcal{B}[\mathbf{X}], \tag{5.18}$$

$\mathbf{s}^{-1}[\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}] \in \mathcal{B}[\mathbf{F}]$ и справедливо

Предложение 5.2. $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) = (\vartheta - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}] \mid \mathbf{h}]$.

Доказательство следует из (5.16) с учетом следующих обстоятельств (см.(5.6), (5.18)): $(\forall S_1 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}\ \exists S_2 \in \widetilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} : S_2 \subset S_1) \& (\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}} \subset \mathcal{Y}_{\mathbf{u}})$.

В прикладном отношении представляется важным сравнение $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ и $\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}$, которое, по сути дела, проведено в [6]–[8], [10] для конкретных вариантов общей схемы расширения (см. раздел 4).

6. Компактификации и проблема окрестностной реализации множеств притяжения

В данном разделе обсуждается частный случай конструкции раздела 4, отвечающий, однако, весьма распространенной в теории расширений ситуации, когда пространство ОЭ допускает естественную компактификацию (напр., [1], [2]); последняя отличается от компактификаций, используемых в общей топологии, наличием связей, которые сохраняются при расширении задачи. В задаче раздела 2 упомянутые связи определяются посредством $\mathbf{s}$ и $\mathbf{h}$; их сохранение достигается в (4.3), (4.4) посредством g и ω. Всюду в данном разделе полагаем, что

$$\mathbf{K} \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\}. \tag{6.1}$$

Разумеется, в силу (5.4) и (6.1), в частности, имеем свойство $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}$. Следовательно, (6.1) определяет вариант конструкции раздела 5 и мы сохраняем в этой связи требования (5.5) в отношении $t_\mathbf{l}$, $t_\mathbf{u}$. Из (5.5) и (6.1) следует, в частности, что $(\mathbf{K}, t_\mathbf{l})$ — компакт. Напомним, что, как и в разделе 5, фиксированы непустое множество $\mathbf{F}$ и отображение $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^\mathbf{F}$, а также выполнено условие 5.1. Полагаем в дальнейшем, что $(\mathbf{H}, \vartheta)$ есть хаусдорфово [20], [23] ТП и $\omega \in C(\mathbf{K}, t_\mathbf{l}, \mathbf{H}, \vartheta)$. Как отмечалось в заключении раздела 3, в этих условиях автоматически $\omega \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbf{K}, t_\mathbf{l}, \mathbf{H}, \vartheta)$, что соответствует (4.4) и предположениям раздела 5. Оставляем в силе предположения раздела 5 в отношении $(\mathbf{X}, \tau_\mathbf{l}, \tau_\mathbf{u})$, $\mathcal{Y}_\mathbf{l}$, $\mathcal{Y}_\mathbf{u}$, $\widetilde{\mathcal{Y}}_\mathbf{u}$ и g. В частности, $\mathbf{X}$ по-прежнему отождествляется с $\mathcal{R}^\mathbf{\Gamma}$, где $\mathbf{\Gamma}$ — непустое множество; $\mathbf{\Gamma}_0$ (см. (5.8)) определяет, как и ранее, множество ступенчатозначности матриканта (5.7). Таким образом, справедливы (5.16) и предложение 5.2. Однако в рассматриваемом случае указанные утверждения можно существенно дополнить, используя положения [19] (см. в этой связи следствие 3.1.5 из [23]). Действительно,

$$\mathbb{N}_\vartheta[\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))] \subset \bigcup_{U \in \mathfrak{Y}} \mathbb{N}_\vartheta[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(U)), \vartheta)], \tag{6.2}$$

где в качестве $\mathfrak{Y}$ может использоваться любое из семейств: $\mathcal{Y}_\mathbf{l}$, $\mathcal{Y}_\mathbf{u}$, $\widetilde{\mathcal{Y}}_\mathbf{u}$. С учетом (3.1), (5.16), (6.2) и предложения 5.1 получаем, что любой из трех упомянутых вариантов ослабления $\mathbf{Y}$-ограничения позволяет реализовать универсальное (в диапазоне ограничений асимптотического характера) МП $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ в виде $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(U)), \vartheta)$ с точностью до любой наперед выбранной окрестности этого МП (подробнее см. в [19]): если $\mathbb{O}_1 \in \mathbb{N}_\vartheta[\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))]$, то

$$\begin{gathered}(\exists \mathbb{O}_2 \in \mathcal{Y}_\mathbf{l} : \ \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{O}_2)), \vartheta) \subset \mathbb{O}_1) \& (\exists \mathbb{O}_2' \in \mathcal{Y}_\mathbf{u} : \\ \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{O}_2')), \vartheta) \subset \mathbb{O}_1) \& (\exists \mathbb{O}_2'' \in \widetilde{\mathcal{Y}}_\mathbf{u} : \omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y})) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathbb{O}_2'')), \vartheta) \subset \mathbb{O}_1).\end{gathered} \tag{6.3}$$

(6.3) определяет возможность окрестностной реализации МП в схемах с конкретным ослаблением $\mathbf{Y}$-ограничения.

Частный случай. Пусть $(\mathbf{H}, \vartheta)$ — метризуемое ТП, а ρ есть def метрика на множестве $\mathbf{H}$, порождающая топологию ϑ: ϑ индуцирована ([23], с. 371) метрикой ρ. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то через $U_\rho^0(A, \varepsilon)$ обозначаем множество всех $z \in \mathbf{H}$, для каждого из которых $\exists a \in A : \rho(z, a) < \varepsilon$; итак, введена ε-окрестность A в метрическом пространстве $(\mathbf{H}, \rho)$. Если $P \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$, то через $(\mathrm{Fin})[\mathbf{\Gamma} \mid P]$ обозначаем семейство всех множеств $Q \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$ таких, что $P \subset Q$. Справедлива

Теорема 6.1. *Если $\kappa \in]0, \infty[$, то $\exists P \in \mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$, $\exists \varepsilon \in]0, \infty[$ $\forall Q \in (\mathrm{Fin})[\mathbf{\Gamma} \mid P]$, $\forall \delta \in]0, \varepsilon]$*

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\mathbf{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, Q, \delta))) \subset \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\mathbf{\Gamma}(\mathbf{Y}, Q, \delta))) \subset U_\rho^0(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\mathfrak{N}_\mathbf{\Gamma}^0(\mathbf{Y}, Q, \delta))), \kappa).$$

Доказательство подобно ([5], с. 130; [6], сс. 83, 84). Из сопоставления определений для множеств семейства (5.6) и формулы (5.17) видно, что теорема 6.1 означает асимптотическую нечувствительность реального ДМ при возмущении части ограничений: если уж тихоновское ослабление $\mathbf{Y}$-ограничения реализовано на множестве $\mathbf{\Gamma} \setminus \mathbf{\Gamma}_0$, то, грубо говоря, не важно, реализуется ли подобное ослабление $\mathbf{Y}$-ограничения на $\mathbf{\Gamma}_0$ или нет. Свойства такого типа рассматривались (применительно к случаю импульсных ограничений) в [5]–[10]. Полезно сравнить, например, ([6], сс. 83, 84) с ([6], сс. 297, 298), где даны два различных варианта теоремы 6.1; каждый из них допускает конкретизацию для задач импульсного управления линейной системой с разрывными коэффициентами при управлении. В частности, нетрудно построить конкретизации теоремы 6.1 для задач управления материальной точкой при импульсных ограничениях на управления; на этой основе можно в естественных случаях установить определенную грубость задачи определения области достижимости по отношению к ослаблению ограничений на скоростные координаты (см. заключительную часть [10]). Некоторые вопросы такого рода рассматриваются в разделе 9. Заметим, что в данной работе рассматривается случай скалярных управлений; соответствующие обобщения в духе ([6], гл. 4) и [10] не доставляют принципиальных трудностей (см. обзор [7]).

7. Добавление к вопросу о сравнимости относительных топологий

В связи с использованием в разделе 5 соглашения $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}$ отметим некоторые свойства, дополняющие (5.3). Введем в рассмотрение топологию $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$ ([5], с. 80; [6], с. 44) поточечной сходимости в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$: $\tau_{\otimes}(\mathcal{L})$ индуцирована на $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ топологией $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})$ множества $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, соответствующей тихоновскому произведению экземпляров $\mathbb{R}$ в обычной $|\cdot|$-топологии $\tau_{\mathbb{R}}$ при использовании $\mathcal{L}$ в качестве индексного множества. При $M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ семейство $\tau_M^{\otimes}(\mathcal{L}) \triangleq \tau_{\otimes}(\mathcal{L}) \mid_M$ есть топология, индуцированная ([20], с. 77) на M из $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}))$. Пусть ([6], с. 42)

$$\mathfrak{C}_*[\mathcal{L}] \triangleq \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid N_{\tau_S^{\otimes}(\mathcal{L})}(\mu) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \neq \emptyset \ \forall \mu \in S\}.$$

Используя свойства типа соотношения (3.5.6) из [6], можно показать, что ([5], с. 94) $\forall M \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$

$$\tau_*(\mathcal{L}) \mid_M = \tau_M^{\otimes}(\mathcal{L}).$$

При $B \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$ имеем вложение $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \cup B \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$.

Отметим аналог последнего свойства, связанный с использованием алгебраических сумм п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathcal{L}})$ и $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathcal{L}})$, то $A \oplus B \triangleq \{\mu + \nu : (\mu, \nu) \in A \times B\}$. В этих обозначениях $\forall B \in \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) : (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \oplus B \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$. При $M \in \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$ имеем $\mathcal{P}(M) \subset \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}]$; здесь аналогия с (5.3). Полагая $\mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}] \triangleq \mathfrak{C}_*[\mathcal{L}] \setminus \{\emptyset\}$, имеем $\mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}] \subset \mathfrak{K}$. С учетом (5.3) получаем, что (5.2) — весьма обширное семейство п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, и предположение $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}$ раздела 5 не выглядит ограничительным.

Часть II

Рассматриваются конструкции расширения абстрактных задач управления, прототипом которых являются задачи управления линейными системами с разрывными коэффициентами при управлении. Сам метод построения расширений является конкретизацией общих процедур первой части данной работы.

8. Постановка задачи

В дальнейшем используются понятия и обозначения первой части.

Рассмотрим одну типичную ситуацию, возникающую при управлении линейными системами. Пусть дано управляемое дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)b(t) \tag{8.1}$$

в n-мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$; движения (8.1) рассматриваются на конечном промежутке времени $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_0 \in]t_0, \infty[$. В (8.1) $A(\cdot)$ есть $n \times n$-матрицант на I_0 с непрерывными в/з компонентами $A_{i,j}(\cdot)$, $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,n}$. Через $b = b(\cdot)$ в (8.1) обозначено отображение из $I \triangleq [t_0, \vartheta_0[$ в $\mathbb{R}^n$. С I естественно связана полуалгебра (п/а) $\mathcal{I} \triangleq \{[u, v[: (u, v) \in I_0 \times I_0\}$ пространства-стрелки; пространство $B_0(I, \mathcal{I})$ всех $\mathcal{I}$-ступенчатых в/з функций на I есть просто множество всех кусочно-постоянных (к.-п.) и непрерывных справа (н. спр.) в/з функций на I. Целесообразно ввести σ-алгебру $\mathcal{B}$ п/м I, порожденную п/а $\mathcal{I}$, т. е. борелевское оснащение I. В этом и в следующем разделах полагаем, что задана некоторая п/а $\mathcal{L}$ подмножеств (п/м) I, для которой $\mathcal{I} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{B}$. Промежуток I используем здесь в качестве множества E (см. часть I). Постулируем, что все компоненты $b_1 = b_1(\cdot), \ldots, b_n = b_n(\cdot)$ вектор-функции b суть элементы пространства $B(I, \mathcal{L})$ (см. раздел 5) равномерных пределов $\mathcal{L}$-ступенчатых в/з функций на I (если $\mathcal{L} = \mathcal{I}$, то $b_1, \ldots, b_n$ суть равномерные пределы некоторых последовательностей к.-п. и н. спр. в/з функций на I; если $\mathcal{L} = \mathcal{B}$, то $b_1, \ldots, b_n$ — ограниченные борелевские функции на I). В качестве f используем в простейшем случае функции из $B_0(I, \mathcal{L})$ (см. раздел 5), хотя допускаем и вариант применения функций из $B(I, \mathcal{L})$. Полагаем, что в (8.1) задано (основное) начальное условие $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, а выбор f стеснен некоторыми ограничениями, часть из которых может определяться краевыми и промежуточными условиями, а также фазовыми ограничениями (решение (8.1) понимаем в смысле Каратеодори [1]). В этих условиях представляет интерес исследование пучка возможных траекторий и его сечения гиперплоскостью $t = \vartheta_0$, т. е. области достижимости (ОД) в момент ϑ_0. Иногда возникает необходимость в рассмотрении некоторых преобразований фазового вектора. Обсудим также такую возможность, полагая заданными натуральное число $p \in \mathcal{N}$ и непрерывный оператор ζ, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$. В этих условиях также можно говорить об ОД (или о пучке траекторий), но только для значений преобразования ζ.

Будем придерживаться содержательного способа изложения. В этом и в следующем разделах через $\Phi(\cdot, \cdot)$ обозначаем фундаментальную матрицу решений (матрицант) ([1], [3], [26]) однородной системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, а через λ — след меры Лебега–Бореля на $\mathcal{L}$. Если $t_* \in I_0$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$, то при $f \in B(I, \mathcal{L})$ решение уравнения (8.1) (рассматриваемого на $[t_*, \vartheta_0]$) с начальным условием $x(t_*) = x_*$ определяется формулой Коши [1], [3], [26]

$$x(t) = \Phi(t, t_*)x_* + \int_{[t_*, t[} f(\tau)\Phi(t, \tau)b(\tau)\lambda(d\tau) \quad (t_* \leq t \leq \vartheta_0), \tag{8.2}$$

где интеграл вектор-функции определяется покомпонентно; это решение обозначаем через

$$\varphi_f(\cdot, t_*, x_*) = (\varphi_f(t, t_*, x_*))_{t \in [t_*, \vartheta_0]}, \tag{8.3}$$

получая непрерывную n-вектор-функцию на $[t_*, \vartheta_0]$. Среди свойств решения (8.1)–(8.3) отметим известное полугрупповое свойство. Наконец, для ζ-преобразования (8.2), (8.3) естественно использовать соглашение: при $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $f \in B(I, \mathcal{L})$ и $t \in [t_*, \vartheta_0]$ значение этого ζ-преобразованного движения есть вектор $\zeta(\varphi_f(t, t_*, x_*)) \in \mathbb{R}^p$. В частности, можно полагать $t_* = t_0$, $x_* = x_0$ и $t = \vartheta_0$, получая точки ОД, если при этом соблюдается соответствующая система ограничений.

Редакция формулы Коши, определяемая в (8.2), допускает естественное расширение: в обозначениях первой части рассматриваем при $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ функцию

$$\widetilde{\varphi}_\mu(\cdot, t_*, x_*) = (\widetilde{\varphi}_\mu(t, t_*, x_*))_{t \in [t_*, \vartheta_0]} \tag{8.4}$$

из $[t_*, \vartheta_0]$ в $\mathbb{R}^n$, для которой имеет место $\forall t \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\widetilde{\varphi}_\mu(t, t_*, x_*) \triangleq \Phi(t, t_*)x_* + \int_{[t_*, t[} \Phi(t, \tau)b(\tau)\mu(d\tau). \tag{8.5}$$

Можно рассматривать n-вектор-функцию (8.4), (8.5) как некое обобщенное движение. Напомним, что (см. [1], [3], [26]) $\Phi(\cdot, \cdot)$ обладает полугрупповым свойством. С учетом этого и свойства конечной аддитивности неопределенного интеграла легко проверяется

Предложение 8.1. *Если $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, $t^* \in [t_*, \vartheta_0]$ и $t \in [t^*, \vartheta_0]$, то*

$$\widetilde{\varphi}_\mu(t, t_*, x_*) = \widetilde{\varphi}_\mu(t, t^*, \widetilde{\varphi}_\mu(t^*, t_*, x_*)).$$

В самом деле, фиксируя t_*, x_*, μ, t^* и t в соответствии с условиями доказываемого предложения, заметим с учетом (8.5), что

$$\widetilde{\varphi}_\mu(t,t^*,\widetilde{\varphi}_\mu(t^*,t_*,x_*)) = \Phi(t,t^*)\widetilde{\varphi}_\mu(t^*,t_*,x_*) + \int_{[t^*,t[}\Phi(t,\tau)b(\tau)\mu(d\tau) =$$

$$= \Phi(t,t^*)\Phi(t^*,t_*)x_* + \Phi(t,t^*)\int_{[t_*,t^*[}\Phi(t^*,\tau)b(\tau)\mu(d\tau) +$$

$$+ \int_{[t^*,t[}\Phi(t,\tau)b(\tau)\mu(d\tau) = \Phi(t,t_*)x_* + \int_{[t_*,t^*[}\Phi(t,\tau)b(\tau)\mu(d\tau) +$$

$$+ \int_{[t^*,t[}\Phi(t,\tau)b(\tau)\mu(d\tau) = \Phi(t,t_*)x_* + \int_{[t_*,t[}\Phi(t,\tau)b(\tau)\mu(d\tau) = \widetilde{\varphi}_\mu(t,t_*,x_*).$$

Итак, в (8.4), (8.5) определена динамическая система. Эти представления дополняются преобразованием на основе ζ, т. е. можно ввести обобщенные траектории в виде зависимостей

$$t \longmapsto \zeta(\widetilde{\varphi}_\mu(t,t_*,x_*)) : [t_*,\vartheta_0] \longrightarrow \mathbb{R}^p, \tag{8.6}$$

где $t_* \in I_0$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. В этой связи следует учесть весьма очевидную возможность погружения обычных траекторий, определяемых на основе (8.2), в соответствующее пространство обобщенных траекторий. Ограничимся случаем $t_* = t_0$ и $x_* = x_0$. Следуем обозначениям [5], [6], [10] в части, касающейся построения неопределенного интеграла: $(I,\mathcal{L},\lambda)$ есть вариант пространства (3.5.1) из [6] и для $f \in B(I,\mathcal{L})$ можно рассматривать неопределенный λ-интеграл f ([5], с. 69), $f * \lambda \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$. Тогда (см. (8.2), (8.5) и свойства из ([5], с. 69)) при $\mu = f * \lambda$

$$\varphi_f(\cdot,t_*,x_*) = \widetilde{\varphi}_\mu(\cdot,t_*,x_*). \tag{8.7}$$

Замечание 8.1. Было рассмотрено погружение обычных управлений и траекторий в соответствующее пространство обобщенных элементов (ОЭ), следуя идеологии ([5], с. 136), в основе которой — преобразование функции в меру посредством построения неопределенного λ-интеграла. Полезно, однако, отметить, что в (8.4), (8.5) допускается использование в качестве управлений любых мер из $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, а это позволяет обслуживать другие содержательные задачи. В частности, можно отказаться от представления обычных траекторий посредством (8.2), (8.3) и обратиться к ситуации управления с толчками [12], используя уже схему построения ОЭ, рассматриваемую в ([6], гл. 7).

Возвращаясь к (8.6), отметим, что ζ-траектории зависят от управления $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ непрерывно в смысле $*$-слабой топологии $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и топологии поточечной сходимости пространства всех n-вектор-функций [13]. Это свойство вытекает из (8.5). Ограничимся, однако, замечанием об отображении

$$\mu \longmapsto \zeta(\widetilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0,t_0,x_0)) : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^p, \tag{8.8}$$

имея в виду проблему корректного расширения задачи о построении ОД; разумеется, $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ оснащаем при этом топологией $\tau_*(\mathcal{L})$, а $\mathbb{R}^p$ — обычной топологией $\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}$ покоординатной сходимости. Имеем в (8.8) непрерывное в указанном смысле отображение. В свою очередь, зависимость обобщенной траектории от $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ также непрерывна. Здесь целесообразно провести более подробное обсуждение топологических конструкций, имея в виду применения в схеме раздела 5 при $\mathcal{R} \triangleq \mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{R}^{I_0}$ всех n-вектор-функций на I_0 оснащаем топологией $\otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ тихоновского произведения экземпляров $(\mathcal{R},\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ с индексным множеством I_0, т. е. обычной топологией поточечной сходимости. Тогда

$$\mu \longmapsto \widetilde{\varphi}_\mu(\cdot,t_0,x_0) : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{R}^{I_0} \tag{8.9}$$

есть непрерывный в смысле топологий

$$\tau_*(\mathcal{L}), \quad \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}) \tag{8.10}$$

оператор [13], что непосредственно следует из (8.5) и определения $\tau_*(\mathcal{L})$. Итак, (8.9) есть непрерывный в смысле ТП (8.10) оператор. Вернемся к (8.2), (8.3), (8.7). Выбор управления $f \in B(I, \mathcal{L})$ стеснен обычно теми или иными ограничениями. Один из наиболее естественных случаев связан с ресурсным ограничением

$$\int_I |f(t)|\lambda(dt) \leq c, \tag{8.11}$$

где $c \in [0, \infty[$. Разумеется, возможны и другие ограничения, связанные, в частности, с осуществлением краевых и промежуточных условий. Сейчас, однако, ограничимся обсуждением (8.11). В этом случае, ориентируясь на (8.7), отметим, что множество F_c всех функций $f \in B(I, \mathcal{L})$ со свойством (8.11) в виде всюду плотного подмножества (п/м) погружается в некоторое множество

$$K_c \in (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \setminus \{\emptyset\},$$

которое определяется в ([5], сс. 82, 87; [6], с. 54). Следуя ([6], с. 39), введем для каждой меры $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ вариацию $v_\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ как функцию множеств, а также множество $\mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}]$ всех $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ со свойством $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(\lambda(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0). \tag{8.12}$$

Тогда полагаем $K_c \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}] \mid v_\mu(I) \leq c\}$. В этом случае для топологий $\tau_*(\mathcal{L})$, $\tau_0(\mathcal{L})$, $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ и $\tau^*_{\mathbf{B}}(\mathcal{L})$, определяемых в ([6], гл. 3) и составляющих множество $\mathfrak{M}(\mathcal{L}) \triangleq \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L}); \tau_\otimes(\mathcal{L}); \tau^*_{\mathbf{B}}(\mathcal{L})\}$, имеем свойство $\forall \tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$

$$K_c = \mathrm{cl}(\{f * \lambda : f \in F_c\}, \tau). \tag{8.13}$$

Как следствие получим для пучка обычных траекторий плотное погружение в аналогичный пучок обобщенных траекторий

$$\{\widetilde{\varphi}_\mu(\cdot, t_0, x_0) : \mu \in K_c\} = \mathrm{cl}(\{\varphi_f(\cdot, t_0, x_0) : f \in F_c\}, \otimes^{I_0}(\tau_{\mathbb{R}}^{(n)})). \tag{8.14}$$

Условие (8.12) именуют слабой абсолютной непрерывностью относительно λ; (8.13) — типичное для [5], [6], [10] расширение пространства управлений (универсальное в диапазоне топологий); (8.14) подобно в логическом отношении свойствам, рассматриваемым в ([1], гл. III, IV) для нелинейных задач управления с геометрическими ограничениями. Сейчас ограничимся достаточно простым случаем промежуточных условий, дополняющих требования на выбор $f \in F_c$. Именно, пусть Y — замкнутое в $(\mathcal{R}, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$ подмножество $\mathcal{R}$ и $t_1 \in I_0$; требуется обеспечить свойство $\varphi_f(t_1, t_0, x_0) \in Y$. При этом Y-ограничении (и при условии (8.11)) требуется построить регуляризированный вариант ОД. Уже в этом достаточно простом случае имеем нелинейную задачу раздела 2 при следующих соглашениях относительно параметров: $\mathbf{F} = F_c$, $\mathbf{X} = \mathcal{R} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{H} = \mathbb{R}^p$, $\mathbf{s}(f) = \varphi_f(t_1, t_0, x_0)$ и $\mathbf{h}(f) = \zeta(\varphi_f(\vartheta_0, t_0, x_0))$ при $f \in \mathbf{F}$, $\mathbf{Y} = Y$. В части описания модели раздела 4 заметим, что множество $\mathbf{K}$ отождествляется здесь с K_c, что соответствует соглашениям разделов 5 и 6. Мы соблюдаем соглашения о выборе топологий $t_{\mathbf{l}}$ и $t_{\mathbf{u}}$ множества K_c. Однако вопрос о конкретизации $\mathbf{\Gamma}$ и о соответствующей этому выбору конкретизации $\mathbf{X}$ сейчас в общей постановке не рассматриваем, поскольку важная в этом смысле детализация $\mathbf{\Gamma}_0$ (см. (5.8)) обычно определяется конкретными условиями решаемой задачи. Не вникая в логику построения битопологических пространств первой части, отметим, что объективно отображения g и ω раздела 4 можно определить соответственно в виде зависимостей

$$\mu \longmapsto \widetilde{\varphi}_\mu(t_1, t_0, x_0), \quad \mu \longmapsto \zeta(\widetilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0, t_0, x_0)),$$

определенных на K_c. Тогда множество $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$ приобретает смысл ОД обобщенной управляемой системы в условиях ограничений на выбор управления $\mu \in \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}]$, определяемого: 1) c-ограничением на полную вариацию, 2) $\mathbf{Y}$-ограничением на реализацию вектора $\widetilde{\varphi}_\mu(t_1, t_0, x_0)$.

Более тонкий анализ, связанный с представлением g и построением битопологического пространства $(\mathbf{X}, \tau_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{u}})$, проведем в следующем разделе для простейшего случая задачи управления материальной точкой.

9. Одна задача управления материальной точкой на плоскости

В этом разделе для частного вида системы (8.1)

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t), \quad \dot{x}_3(t) = b_1(t)f(t), \quad \dot{x}_4(t) = b_2(t)f(t) \tag{9.1}$$

рассматриваем, как и ранее, процесс управления на I_0 с заданным н. у. $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^4$ (можно было бы ограничиться случаем $t_0 = 0$ и $\vartheta_0 = 1$); полагаем, что $b_1(\cdot) \in B_0(I, \mathcal{L})$ и $b_2(\cdot) \in B_0(I, \mathcal{L})$. Для простоты полагаем, что в случае $n = 4$ множество Y имеет смысл произведения замкнутых множеств Y_1, $Y_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, и Y_2, $Y_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Множество Y_1 характеризует условие на реализацию $(x_1(t_1), x_2(t_1))$, а множество Y_2 — условие на реализацию $(x_3(t_1), x_4(t_1))$:

$$((x_1(t_1), x_2(t_1)) \in Y_1) \& ((x_3(t_1), x_4(t_1)) \in Y_2). \tag{9.2}$$

Разумеется, в качестве $x(\cdot)$ в (9.2) следует использовать траекторию, определяемую в (9.1), т. е. вектор-функцию вида (8.3). Используя известную конкретизацию $\Phi(\cdot, \cdot)$ [3], [26], получаем, что (9.2) преобразуется к виду

$$\Big(\Big(\int_{[t_0, t_1[} (t_1 - t) b_1(t) f(t) \lambda(dt), \int_{[t_0, t_1[} (t_1 - t) b_2(t) f(t) \lambda(dt)\Big) \in \widetilde{Y}_1\Big) \& \\ \& \Big(\Big(\int_{[t_0, t_1[} b_1(t) f(t) \lambda(dt), \int_{[t_0, t_1[} b_2(t) f(t) \lambda(dt)\Big) \in \widetilde{Y}_2\Big),$$

где множества $\widetilde{Y}_1$ и $\widetilde{Y}_2$ получаются сдвигом Y_1 и Y_2 соответственно; однако для простоты полагаем далее, что все компоненты x_0 нулевые, а тогда $\widetilde{Y}_1 = Y_1$ и $\widetilde{Y}_2 = Y_2$; пусть, кроме того, $t_0 = 0$, т. е. в нашем случае $I_0 = [0, \vartheta_0]$. Мы не конкретизируем отображение ζ раздела 8. Здесь несколько изменим параметры (в сравнении с разделом 8), полагая далее в этом разделе $n = 2$ (имеется в виду конкретизация размерности в разделе 5); пусть $\mathbf{\Gamma} = \{1; 2\}$ (неупорядоченная пара) и $\mathbf{\Gamma}_0 = \{2\}$ (одноэлементное множество). Тогда $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$. Матрицант (5.7) конкретизируем следующим образом, полагая, что $\chi_{[t_0, t_1[} \in \mathbb{R}^I$ есть индикатор промежутка $[t_0, t_1[$; именно, при $t \in I$ полагаем

$$(S_{1,1}(t) = (t_1 - t) b_1(t) \chi_{[t_0, t_1[}(t)) \& (S_{2,1}(t) = (t_1 - t) b_2(t) \chi_{[t_0, t_1[}(t)) \& \\ \& (S_{1,2}(t) = b_1(t) \chi_{[t_0, t_1[}(t)) \& (S_{2,2}(t) = b_2(t) \chi_{[t_0, t_1[}(t)). \tag{9.3}$$

Далее, отображение g определяется в (5.11) при конкретизации (9.3). Напомним, что $\mathbf{X} = \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}}$, а $\mathbf{Y}$ есть п/м $\mathbf{X}$, для которого

$$\mathbf{Y} = \{y \in \mathcal{R}^{\mathbf{\Gamma}} \mid (y(1) \in Y_1) \& (y(2) \in Y_2)\}.$$

В этих условиях требование (9.2) сводится к $\mathbf{Y}$-ограничению части I, реализуемому в терминах (5.11). Погружение $\mathbf{F} = F_c$ в $\mathbf{K} = K_c$ осуществляем на основе построения неопределенного λ-интеграла $f \in \mathbf{F}$. Полагаем $S_{1,1} \notin B_0(I, \mathcal{L})$ и $S_{2,1} \notin B_0(I, \mathcal{L})$, что непременно имеет место при $t_1 > 0$ и естественных условиях невырожденности $b_1(\cdot)$ и $b_2(\cdot)$; например, можно полагать, что последние две функции к.-п., н. спр. и не обращаются в нуль на $[t_0, t_1[$. Тогда (в силу (9.3)) определение $\mathbf{\Gamma}_0$ соответствует (5.8). Отождествляем $\mathbf{H}$ с $\mathbb{R}^p$, где $p \in \mathcal{N}$, а $\mathbf{h}$ определяем как

$$f \longmapsto \zeta(\varphi_f(\vartheta_0, 0, \mathbb{O})) : F_c \longrightarrow \mathbb{R}^p, \tag{9.4}$$

где $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^4$ — вектор, все координаты которого нулевые. Разумеется, ζ соответствует разделу 8 и переводит $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^p$ (непрерывность ζ постулируется). Следуя конструкциям части I, можно ввести несколько вариантов ослабления $\mathbf{Y}$-ограничения (в силу конечности $\mathbf{\Gamma}$ определения упрощаются). Ограничимся содержательным обсуждением; восстановление необходимых для строгого изложения деталей не составляет труда и фактически повторяет [5], [6]. Итак, в первом случае, соответствующем в существенной части определению (5.6), вместо Y_1 и Y_2 (в (9.2)) используем их ε-окрестности. Во втором случае, следуя (5.17) и (5.18), вводим ε-окрестность только для Y_1. Впрочем, можно было бы ввести топологию $\tau_{\mathbf{u}}$ (5.10), расширяя спектр возможных вариантов ослабления условия (9.2). Во всех этих случаях ослабленные версии содержательного условия (9.2) трансформируются в соответствующие ослабленные аналоги $\mathbf{Y}$-ограничения. Соответствующие варианты $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$, $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ и $\widetilde{\mathcal{Y}}_{\mathbf{u}}$ обслуживают, таким образом, весьма содержательные и важные, с практической точки зрения, ослабленные аналоги (9.2); в результате реализуются конкретные варианты (5.16), предложения 5.2 и теоремы 6.1. Ограничимся определением МП (5.16). В этой связи полезно конкретизировать (8.5) для случая (9.1): если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то траектория (8.4), (8.5) при нулевых начальных условиях характеризуется четырьмя функциями, для которых при $t \in I_0$

$$\widetilde{\varphi}_{\mu,1}(t,0,\mathbb{O}) = \int_{[0,t[}(t-\tau)b_1(\tau)\mu(d\tau), \quad \widetilde{\varphi}_{\mu,2}(t,0,\mathbb{O}) = \int_{[0,t[}(t-\tau)b_2(\tau)\mu(d\tau),$$
$$\widetilde{\varphi}_{\mu,3}(t,0,\mathbb{O}) = \int_{[0,t[}b_1(\tau)\mu(d\tau), \qquad \widetilde{\varphi}_{\mu,4}(t,0,\mathbb{O}) = \int_{[0,t[}b_2(\tau)\mu(d\tau).$$

В этих соотношениях наиболее важны случаи $t = t_1$ и $t = \vartheta_0$. В терминах двух вышеупомянутых моментов времени вводим задачу об определении множества $\mathbb{G}_\partial$ всех векторов $\zeta(\widetilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0,0,\mathbb{O}))$ таких, что $\mu \in K_c$ и при этом

$$((\widetilde{\varphi}_{\mu,1}(t_1,0,\mathbb{O}),\widetilde{\varphi}_{\mu,2}(t_1,0,\mathbb{O})) \in Y_1)\&((\widetilde{\varphi}_{\mu,3}(t_1,0,\mathbb{O}),\widetilde{\varphi}_{\mu,4}(t_1,0,\mathbb{O})) \in Y_2). \tag{9.5}$$

В (9.5) дано естественное расширение (9.2). В терминах (9.5) получили задачу определения ОД обобщенной системы; эту задачу можно истолковать в терминах условия $g(\mu) \in \mathbf{Y}$ (см. раздел 5). Достаточно учесть (9.3) и определение (5.11). Разумеется, (9.5) реализует в виде множества допустимых элементов соответствующий конкретный вариант $g^{-1}(\mathbf{Y})$. Что же касается ω, то данное отображение есть расширенная версия (9.4), т.е.

$$\mu \longmapsto \zeta(\widetilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0,0,\mathbb{O})) : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbb{R}^p; \tag{9.6}$$

связь (9.4), (9.6) реализуется в терминах $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$, $\mathbf{m}(f) = f * \lambda$ (см. [6], теорема 3.7.5). В виде $\mathbb{G}_\partial$ имеем теперь требуемую версию $\omega^1(g^{-1}(\mathbf{Y}))$, т. е. универсальное в смысле раздела 5 МП (см. (5.16)); при этом из определения $\mathbf{\Gamma}_0$ видно, что наша асимптотическая версия задачи о построении ОД обладает определенной грубостью при ослаблении условий на реализацию вектора скорости в (9.2) (имеется в виду ограничение, определяемое в терминах Y_2). Указанное свойство механического характера подобно отмечавшимся в [5], [6], [8], [10] свойствам грубости при ослаблении части ограничений. Рассматриваемую здесь постановку, связанную с корректным расширением задачи о построении ОД для системы (9.1), можно существенно усложнить, сохраняя в той или иной форме упомянутое свойство грубости в отношении соблюдения условий на реализацию вектора скорости как функции времени.

10. О некоторых свойствах плотности

Возвратимся к рассмотрению общих конструкций первой части. Следуем соглашениям раздела 5 в части обозначений, связанных с измеримым пространством (ИП) $(E,\mathcal{L})$, где E — непустое множество, а $\mathcal{L}$ — п/а п/м E. Итак, $(E,\mathcal{L})$ есть ИП с п/а множеств. В разделах 5 и 7 показано, что $\mathfrak{K}$ (5.2) весьма представительно как семейство п/м $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Этим мотивировано требование $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}$ раздела 5. Сейчас обсудим некоторые аспекты, связанные с условием 5.1; уже отмечались (см. замечание 5.1) различные частные случаи общей постановки раздела 5, для которых это условие выполняется [5], [6], [10]. Рассмотрим еще один гипотетический случай, когда предположение о плотности, постулируемое в условии 5.1, имеет место. Однако это суждение будет дано в более общей форме — в виде свойства плотности, универсального в смысле топологий

$\mathbb{A}(\mathcal{L})$, используемых в ([6], гл. 3; [10]). Условимся о традиционном обозначении, понимаемом здесь более широко, чем в разделе 7: если X — непустое множество, A и B — суть п/м $\mathbb{R}^X$, то

$$A \oplus B \triangleq \{a + b : (a, b) \in A \times B\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^X)$$

есть алгебраическая сумма A, B [1], [11]. В качестве X используем обычно E или $\mathcal{L}$. Известно [5], [6], [10], что применение к.-а. мер в качестве обобщенных элементов (ОЭ) по схеме [5], [6] весьма плодотворно в следующих двух случаях: 1) в условиях, когда пространство обычных решений предкомпактно в смысле $*$-слабой топологии $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (при надлежащем погружении в пространство упомянутых ОЭ); 2) в случае, когда обычные решения — в/з функции на E — неотрицательны. Поэтому представляется естественным рассмотрение некой гибридной, в смысле 1), 2), конструкции. Используем здесь простейшие свойства топологических векторных пространств (ТВП) и положения [5], [6]. Итак, рассматриваем в качестве обычных решений функции на E и исследуем свойства плотности в духе условия 5.1. Более того, рассматриваем и другие свойства плотности, подобные тем, что использовались в [8], [10] при исследовании МП в пространстве ОЭ: речь идет об аналогах предложений 4.1, 4.2. Изучение таких промежуточных МП на предмет универсальности представлений в терминах множества $g^{-1}(\mathbf{Y})$ проясняет структуру асимптотической версии задачи о достижимости (здесь имеется в виду универсальность в смысле топологического оснащения пространства ОЭ). В этой связи рассматриваем вопрос об аналогах условия 5.1 более широко.

Через $B_0^+(E, \mathcal{L})$ и $B^+(E, \mathcal{L})$ обозначим конусы всех неотрицательных (поточечно) элементов линейных пространств $B_0(E, \mathcal{L})$ и $B(E, \mathcal{L})$ соответственно (см. раздел 5). Если $f \in \mathbb{R}^E$, то через $|f|$ обозначим в/з функцию на E со значениями $|f(x)|$, $x \in E$. При этом $|f| \in B_0^+(E, \mathcal{L})$ $\forall f \in B_0(E, \mathcal{L})$. Аналогичным образом, $|g| \in B^+(E, \mathcal{L})$ $\forall g \in B(E, \mathcal{L})$. Фиксируем $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\kappa \in [0, \infty[$; введем также

$$\Big(U \triangleq \Big\{f \in B_0(E, \mathcal{L}) \Big| \int_E |f| d\eta \leq \kappa\Big\}\Big) \& \Big(V \triangleq \Big\{f \in B(E, \mathcal{L}) \Big| \int_E |f| d\eta \leq \kappa\Big\}\Big). \qquad (10.1)$$

Множества (10.1) подобны множеству F_c раздела 8 и соответствуют естественным в теории управления ресурсным ограничениям (см. (8.11)). Рассмотрим следующие два варианта множества $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = B_0^+(E, \mathcal{L}) \oplus U, \quad \mathbf{F} = B^+(E, \mathcal{L}) \oplus V.$$

В первом случае получаем непустое п/м $B_0(E, \mathcal{L})$, а во втором — непустое п/м $B(E, \mathcal{L})$. Элементы этих множеств рассматриваем в качестве обычных управлений. Потребуется также одно специальное множество в пространстве $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Пусть [5], [6], [10] $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ — множество всех $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ таких, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0); \qquad (10.2)$$

в (10.2) используется свойство слабой абсолютной η-непрерывности [27] ((10.2) — абстрактный аналог условия (8.12)). При этом $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ — конус в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$; введем порожденное этим конусом линейное подпространство (п/п) $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, обозначаемое через $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ ([6], с. 43). Далее, следуя ([6], с. 40), введем сильную норму $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, определяемую посредством полной вариации: если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то ([6], сс. 39, 40) $v_\mu(E) \in [0, \infty[$ есть def полная вариация μ на множестве E. Введем

$$W \triangleq \{\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}] \mid v_\mu(E) \leq \kappa\}. \qquad (10.3)$$

Разумеется, W есть слабо абсолютно непрерывная (относительно η) часть шара в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Возьмем непустое множество

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta] \oplus W \qquad (10.4)$$

в качестве $\mathbf{K}$. Если $f \in B(E,\mathcal{L})$, то $f*\eta \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ есть def неопределенный η-интеграл f ([5], сс. 69, 86). Как и в [5], [6], [10], [13], рассматриваем погружение $B(E,\mathcal{L})$ в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ посредством оператора

$$f \longmapsto f*\eta : B(E,\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]. \tag{10.5}$$

Один из вариантов такого погружения использовался в разделе 8. В частности, можем рассматривать свойства образов множеств

$$B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U, \quad B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V$$

при действии оператора (10.5). Отметим ряд свойств множества (10.4), связанных с конструкциями раздела 7. В силу известных положений теории топологических групп ([11], с. 449) множество (10.4) замкнуто в локально выпуклом ТВП $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}))$; здесь используется свойства $*$-слабой замкнутости $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$ и $*$-слабой компактности W ([6], гл. 3). Кроме того,

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W \in \mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}],$$

что непосредственно следует из положений раздела 7. С учетом свойства транзитивности операции перехода к п/п, а также соотношений для $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ и $\tau_*(\mathcal{L})$ в ([5], с. 80; [6], с. 45), имеем в обозначениях разделов 3 и 7 вложение

$$(\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{comp})[\mathbb{A}(\mathcal{L})] \subset (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R}) - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^{\mathcal{L}}]. \tag{10.6}$$

Из (10.3) и (10.6) следует, в частности, что $W \in (\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R}) - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^{\mathcal{L}}]$, а поэтому (снова с использованием свойств топологических групп в ([11], с. 449)) получаем: множество $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$ замкнуто в $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R}))$.

Ниже используются топологии $\tau_*(\mathcal{L})$, $\tau_\otimes(\mathcal{L})$, $\tau_0(\mathcal{L})$ и $\tau^*_{\mathbf{B}}(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, определенные в ([6], гл. 3); полагаем, как и в частном случае ИП раздела 8, что

$$\mathfrak{M}(\mathcal{L}) \overset{\triangle}{=} \{\tau_*(\mathcal{L});\ \tau_\otimes(\mathcal{L});\ \tau_0(\mathcal{L});\ \tau^*_{\mathbf{B}}(\mathcal{L})\}.$$

Наряду с $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R})$ оснащаем множество $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ топологией $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial)$ тихоновского произведения экземпляров $\mathbb{R}$ с (дискретной) топологией $\tau_\partial = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ каждого экземпляра; в качестве индексного множества здесь используется $\mathcal{L}$. В силу ранее упомянутых свойств замкнутости в топологиях $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R})$ имеем, что множество $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$ замкнуто в $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial))$ и в $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau^*_{\mathbf{B}}(\mathcal{L}))$. Здесь достаточно учесть хорошо известные свойства ([6], с. 45; [11], с. 463)

$$(\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R}) \subset \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial))\&(\tau_*(\mathcal{L}) \subset \tau^*_{\mathbf{B}}(\mathcal{L})).$$

Предложение 10.1. *Множество* $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$ *замкнуто в ТП* $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$ *и* $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_\otimes(\mathcal{L}))$.

Доказательство следует из уже упоминавшихся соотношений для топологий из $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$ ([6], с. 45); в частности, используется тот факт, что $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ слабее каждой из топологий $\tau_*(\mathcal{L})$, $\tau_0(\mathcal{L})$. Следует учесть, кроме того, отмечавшееся ранее свойство замкнутости множества (10.4) в смысле $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R})$. Заметим, что особое значение для нас имеет замкнутость множества (10.4) в топологии $\tau_0(\mathcal{L})$, что связано с условием 5.1.

Отметим, что (10.4) — непустое п/м $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. Вернемся к вышеупомянутым версиям $\mathbf{F}$;

$$B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U \subset B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V.$$

Очевидно вложение $\{f*\eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V\} \subset (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$. Как следствие, $\{f*\eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\} \subset (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$.

Предложение 10.2. *Имеет место* $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W = \mathrm{cl}(\{f*\eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_0(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\{f*\eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V\}, \tau_0(\mathcal{L}))$.

Доказательство. С учетом предложения 10.1 имеем, что достаточно установить вложение

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]\oplus W\subset \mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U\},\tau_0(\mathcal{L})). \tag{10.7}$$

Пусть (в этом доказательстве) λ — элемент множества в левой части (10.7), а $\lambda_1\in(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$ и $\lambda_2\in W$ реализуют представление $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$. С учетом положений ([6], гл. 3) имеем

$$(\lambda_1\in \mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\},\tau_0(\mathcal{L})))\&(\lambda_2\in \mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in U\},\tau_0(\mathcal{L}))). \tag{10.8}$$

Используем свойства базиса $(\mathbb{A}(\mathcal{L}),\tau_0(\mathcal{L}))$ ([5], с. 81; [6], с. 45). Полагаем, что $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ есть def семейство всех непустых конечных п/м $\mathcal{L}$. Для $\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ рассматриваем множество $T_\partial(\mu,\mathcal{K})$ всех $\nu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})$ таких, что $\forall L\in\mathcal{K}$

$$\mu(L)=\nu(L).$$

По свойствам $\tau_0(\mathcal{L})$ [5], [6] имеем при $H\in\mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$ равенство

$$\mathrm{cl}(H,\tau_0(\mathcal{L}))=\{\mu\in\mathbb{A}(\mathcal{L})\mid T_\partial(\mu,\mathcal{K})\cap H\neq\emptyset\ \forall\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{L})\}. \tag{10.9}$$

В качестве H можно использовать $B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U$, $B_0^+(E,\mathcal{L})$ и U, т. е. комбинацию (10.8), (10.9). Фиксируем $\mathbb{P}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$. Тогда из (10.8), (10.9) имеем

$$(T_\partial(\lambda_1,\mathbb{P})\cap\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\}\neq\emptyset)\&(T_\partial(\lambda_2,\mathbb{P})\cap\{f*\eta: f\in U\}\neq\emptyset). \tag{10.10}$$

С учетом (10.10) подбираем $\varphi\in B_0^+(E,\mathcal{L})$ со свойством $\varphi*\eta\in T_\partial(\lambda_1,\mathbb{P})$. Кроме того, выбираем (используя (10.10)) $\psi\in U$ со свойством $\psi*\eta\in T_\partial(\lambda_2,\mathbb{P})$. Тогда $\varphi+\psi\in B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U$ реализует к.-а. меру

$$(\varphi+\psi)*\eta=(\varphi*\eta)+(\psi*\eta)\in T_\partial(\lambda,\mathbb{P}).$$

Поскольку выбор $\mathbb{P}$ был произвольным, установлено свойство: $\forall\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$

$$T_\partial(\lambda,\mathcal{K})\cap\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U\}\neq\emptyset. \tag{10.11}$$

Из (10.9), (10.11) имеем $\lambda\in\mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U\},\tau_0(\mathcal{L}))$, чем и завершается обоснование вложения (10.7). $\square$

Замечание 10.1. Из предложения 10.2 имеем вариант условия 5.1 (см. (5.5)), где $\mathbf{F}$ конкретизировано выше в двух вариантах, $\mathbf{K}$ отождествляется с множеством (10.4), а отображение $\mathbf{m}$ раздела 5 реализуется в виде надлежащего сужения (10.5) (сужение на $\mathbf{F}$). Итак, цель построения новой конкретной версии конструкции раздела 5 фактически достигнута; однако имеет смысл отметить ряд дополнительных свойств, имея в виду более специализированные, в сравнении с конструкциями первой части, схемы расширения в [8] и в [10].

Легко видеть, что имеет место цепочка равенств

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]\oplus W=\mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U\},\tau_*(\mathcal{L}))=\mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B^+(E,\mathcal{L})\oplus V\},\tau_*(\mathcal{L})).$$

С учетом положений ([6], гл. 3) доказательство может быть сведено к применению простейших положений из теории ТВП. Следует учесть ранее упомянутые свойства замкнутости и, в частности, предложение 10.2, а также свойства, отмечавшиеся в разделе 7: при $\Omega=(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]\oplus W$ имеет место вложение $\tau_*(\mathcal{L})\mid_\Omega\subset\tau_0(\mathcal{L})\mid_\Omega$. Наконец,

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]\oplus W=\mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U\},\tau_\otimes(\mathcal{L}))=\mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B^+(E,\mathcal{L})\oplus V\},\tau_\otimes(\mathcal{L})).$$

Доказательство практически очевидно (см. уже отмечавшиеся свойства замкнутости множества (10.4), а также соотношения для топологий в ([6], с. 45)).

Предложение 10.3. *Имеет место* $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]\oplus W=\mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B_0^+(E,\mathcal{L})\oplus U\},\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L}))=$ $\mathrm{cl}(\{f*\eta: f\in B^+(E,\mathcal{L})\oplus V\},\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L}))$.

Доказательство. В силу уже упоминавшегося свойства, относящегося к вопросу об естественном погружении (каждого из рассматриваемых двух вариантов) пространства обычных решений в виде $*$-слабо плотного множества в пространство ОЭ, достаточно установить вложение

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W \subset \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\}, \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})). \tag{10.12}$$

Пусть ω — элемент множества в левой части (10.12). Поскольку множество (10.4) — элемент семейства $\mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}]$, то в обозначениях раздела 7 имеем свойство

$$N_\theta(\omega) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L}) \neq \emptyset, \tag{10.13}$$

где θ есть def топология $\tau_S^{\otimes}(\mathcal{L})$ при $S = (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$ (см. (10.4)). Учитывая (10.13), выберем и зафиксируем $\Theta \in N_\theta(\omega) \cap \mathbf{B}_*(\mathcal{L})$. Из простейших свойств, упомянутых в разделе 7, имеем для некоторого множества $\Theta_0 \in N_{\tau_*(\mathcal{L})}(\omega)$ равенство

$$\Theta = ((\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W) \cap \Theta_0.$$

С другой стороны, по выбору Θ при некотором $\lambda_0 \in [0,\infty[$ для шара $U_{\lambda_0}(\mathcal{L})$ ([6], с. 45) пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ (имеется в виду шар в сильной норме с центром в начале координат и радиусом λ_0) справедливо вложение $\Theta \subset U_{\lambda_0}(\mathcal{L})$. По известному свойству $\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})$ ([6], с. 54) имеем совпадение

$$\vartheta \triangleq \tau_*(\mathcal{L}) \mid_{U_{\lambda_0}(\mathcal{L})} = \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L}) \mid_{U_{\lambda_0}(\mathcal{L})} . \tag{10.14}$$

При этом $\omega \in \Theta$ и в силу (10.14) имеет место

$$N_\vartheta(\omega) = \{U_{\lambda_0}(\mathcal{L}) \cap H : H \in N_{\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})}(\omega)\}.$$

Это означает, в частности, что (снова с учетом (10.14)) $\forall H_1 \in N_{\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})}(\omega)\ \exists H_2 \in N_{\tau_*(\mathcal{L})}(\omega)$

$$H_1 \cap U_{\lambda_0}(\mathcal{L}) = H_2 \cap U_{\lambda_0}(\mathcal{L}). \tag{10.15}$$

Далее, комбинируем (10.15) и ранее упоминавшееся положение о плотном погружении в смысле $\tau_*(\mathcal{L})$. С учетом последнего и теоремы Биркгофа ([11], гл. I; [20], гл. 2; [23]) подбираем направленность $(\Sigma, \preceq, \varphi)$ в множестве $\Gamma_0 \triangleq \{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\}$ со свойством (сходимости по Мору–Смиту)

$$(\Sigma, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \omega. \tag{10.16}$$

В (10.16) учтено свойство $\omega \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$. Подберем $\sigma_1 \in \Sigma$ из условия: $\forall \sigma' \in \Sigma$

$$(\sigma_1 \preceq \sigma') \Longrightarrow (\varphi(\sigma') \in \Theta_0). \tag{10.17}$$

Пусть $\mathbb{U} \in N_{\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})}(\omega)$ и в соответствии с (10.15) пусть $\mathbb{V} \in N_{\tau_*(\mathcal{L})}(\omega)$ удовлетворяет условию

$$\mathbb{U} \cap U_{\lambda_0}(\mathcal{L}) = \mathbb{V} \cap U_{\lambda_0}(\mathcal{L}).$$

Используя (10.16), подберем теперь $\sigma_2 \in \Sigma$ так, что $\forall \widetilde{\sigma} \in \Sigma$

$$(\sigma_2 \preceq \widetilde{\sigma}) \Longrightarrow (\varphi(\widetilde{\sigma}) \in \mathbb{V}). \tag{10.18}$$

Пусть $\sigma_3 \in \Sigma$ есть мажоранта $\{\sigma_1; \sigma_2\}$ в $(\Sigma, \preceq)$, а $\sigma \in \Sigma$ обладает свойством $\sigma_3 \preceq \sigma$. В силу (10.17) $\varphi(\sigma) \in \Theta_0$ и, вместе с тем, $\varphi(\sigma) \in \Gamma_0$; значит, $\varphi(\sigma) \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W$. По выбору Θ_0 имеем $\varphi(\sigma) \in \Theta$ и, как следствие, $\varphi(\sigma) \in U_{\lambda_0}(\mathcal{L})$. Из (10.18) следует $\varphi(\sigma) \in \mathbb{V}$ и в итоге $\varphi(\sigma) \in \mathbb{U}$. Поскольку выбор σ был произвольным, то фактически установлена сходимость

$$(\Sigma, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L})} \omega.$$

По теореме Биркгофа имеем (коль скоро $(\Sigma, \preceq, \varphi)$ — направленность в Γ_0) свойство $\omega \in \mathrm{cl}(\Gamma_0, \tau_{\mathbf{B}}^*(\mathcal{L}))$, чем и завершается обоснование (10.12). $\square$

Получили, таким образом, следующее важное положение (комбинируем упомянутые выше свойства плотного, в смысле топологий из $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$, погружения в множество (10.4)).

Теорема 10.1. *Имеет место следующее свойство плотности*: $\forall \tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\}, \tau) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V\}, \tau).$$

Полезно отметить достаточно очевидную теперь цепочку равенств

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})).$$

Наконец,

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}] \oplus W = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})).$$

Доказательство, по существу, сводится к применению известных соотношений, связывающих операторы замыкания в ТП и в его п/п (напр., [23], с. 111). Кроме того, следует иметь в виду определения топологий в ([6], с. 44). В части использования двух упомянутых выше версий тихоновского произведения полезно дополнить известные ранее положения [5],[6] подобно тому, как это было сделано в последних двух соотношениях в части добавления к основной теореме 10.1.

В самом деле, с учетом очевидных соотношений ([6], гл. 3), касающихся топологий из $\mathfrak{M}(\mathcal{L})$, $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})$ и $\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})$, получаем: W (см. (10.3)) есть множество, замкнутое в каждом из ТП

$$(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})), \quad (\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})). \tag{10.19}$$

Итак, свойства плотности, упомянутые после теоремы 10.1, характеризуют естественное погружение множеств $B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U$ и $B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V$ в ТП (10.19). Уместно дополнить теорему 3.7.5 из [6], используя замкнутость W в ТП (10.19):

$$W = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in U\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in V\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})) = \\ = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in U\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in V\}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\partial})).$$

Полученные свойства весьма универсальной плотности (см., напр., теорему 10.1) можно использовать при исследовании МП, возникающих в пространстве ОЭ; см. в этой связи конструкции [8]. Ранее отмечалось, что множество (10.4) есть элемент семейства $\mathfrak{C}'_*[\mathcal{L}]$ и (см. раздел 7), как следствие,

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W \in \mathfrak{K}.$$

Что же касается условия 5.1, то из теоремы 10.1 при

$$t_{\mathbf{u}} = \tau_0(\mathcal{L}) \mid_{(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W}$$

(см. (5.5)) имеем цепочку равенств

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta] \oplus W = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B_0^+(E,\mathcal{L}) \oplus U\}, t_{\mathbf{u}}) = \mathrm{cl}(\{f * \eta : f \in B^+(E,\mathcal{L}) \oplus V\}, t_{\mathbf{u}}).$$

В связи с последними свойствами уместно коснуться вопроса, связанного с условиями плотности в смысле топологий типа $t_{\mathbf{u}}$. Если $(\mathbf{T}, \tau)$ есть ТП и $M \in \mathcal{P}(\mathbf{T})$ (т. е. M есть п/м $\mathbf{T}$), то

$$(\tau - \mathrm{dens})[M] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{T}) \mid M \subset \mathrm{cl}(H, \tau)\}$$

есть семейство всех п/м $\mathbf{T}$, всюду плотных в M в смысле $(\mathbf{T}, \tau)$. Как и ранее, через $\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м $\mathcal{L}$. С учетом представления $\tau_0(\mathcal{L})$ в ([5], с. 81; [6], с. 45) получаем $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$

$$(\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{dens})[A] = \\ = \{M \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L})) \mid \{(\mu \mid \mathcal{K}) :\ \mu \in A\} \subset \{(\mu \mid \mathcal{K}) :\ \mu \in M\} \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\}. \tag{10.20}$$

Из (10.20) вытекает, что $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, $\forall M \in (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{dens})[A]$, $\forall L \in \mathcal{L}$

$$\{\mu(L) : \mu \in A\} \subset \{\mu(L) : \mu \in M\}. \tag{10.21}$$

Замечание 10.2. На основе (10.21) можно сделать ряд конкретных выводов об отсутствии плотности в смысле $\tau_0(\mathcal{L})$. Рассмотрим простой пример. Пусть $\alpha \in [0, \infty[$ и $\mathbf{A} \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) \leq \alpha\}$. С учетом (10.21) легко проверяется, что

$$\{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) < \alpha\} \notin (\tau_0(\mathcal{L}) - \mathrm{dens})[\mathbf{A}].$$

Напомним, что (см. соотношение (5.5)) версии топологии, используемой в условии 5.1, суть топологии, индуцируемые из $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial))$ (10.19). Свойства, подобные (10.20), (10.21), легко распространяются на такие топологии (на самом деле они справедливы для существенно более общих конструкций, использующих тихоновские произведения экземпляров произвольного множества, оснащаемого дискретной топологией). Сейчас отметим только, что в обозначениях раздела 5 $\forall M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, $\forall A \in \mathcal{P}(M)$

$$(\tau_0(\mathcal{L}) \mid_M - \mathrm{dens})[A] = \{H \in \mathcal{P}(M) \mid \{(\mu \mid \mathcal{K}) : \mu \in A\} \subset \{(\mu \mid \mathcal{K}) : \ \mu \in H\} \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\}.$$

Наконец, подобно (10.21) имеем очевидное следствие: $\forall M \in \mathcal{P}'(\mathbb{A}(\mathcal{L}))$, $\forall A \in \mathcal{P}(M)$, $\forall H \in (\tau_0(\mathcal{L}) \mid_M - \mathrm{dens})[A]$, $\forall L \in \mathcal{L}$

$$\{\mu(L) : \mu \in A\} \subset \{\mu(L) : \mu \in H\}.$$

Литература

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
2. Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1970. – 488 с.
3. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1968. – 475 с.
4. Эльясберг П.Е. *Введение в теорию полета искусственных спутников Земли.* – М.: Наука, 1965. – 540 с.
5. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* - New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. – 244 p.
6. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 322 p.
7. Chentsov A.G. *On approximation of asymptotic attainability domains* // Nonsmooth and discontinuos problems of control and optimization. – Proc. volume from the IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998, P. 1–12, Pergamon.
8. Chentsov A.G. *Universal properties of generalized integral constraints in the class of finitely additive measures* // Funct. Different. Equat. – V. 5. – № 1–2. – P. 69–105.
9. Ченцов А.Г. *К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 5. – С. 223–242.
10. Ченцов А.Г. *К вопросу о корректном расширении некоторых неустойчивых задач управления с интегральными ограничениями* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63. – С. 185–223.
11. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
12. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* – Киев: Вища школа, 1987. – 287 с.
13. Ченцов А.Г., Каширцева Т.Ю. *Обобщенные траектории линейных управляемых систем с разрывными коэффициентами при управлении* // Вестн. Челябинск. ун-та. – 1999. – Вып. 2. – С. 137–146.
14. Баскаков С.И. *Радиотехнические цепи и сигналы.* – М.: Высш. школа, 1988. – 448 с.
15. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и задачи на минимум* // Кибернетика. – 1988. – № 3. – С. 67–70.

16. Ченцов А.Г. *Двузначные меры на полуалгебре множеств и некоторые их приложения к бесконечномерным задачам математического программирования* // Кибернетика. – 1988. – № 6. – С. 72–76.
17. Ченцов А.Г. *О представлении множеств притяжения, возникающих при последовательном ослаблении ограничений* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 365. – № 2. – С. 174–177.
18. Ченцов А.Г. *Множества притяжения и их представление в виде достижимых множеств обобщенных задач* // Изв. Уральск. гос. ун-та. – 1999. – Вып. 2. – С. 135–153.
19. Chentsov A.G. *Topological constructions of extensions and representations of attraction sets* // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. Issue 1. Control Dynamic Syst., P. 35–60.
20. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 431 с.
21. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1970. – 416 с.
22. Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Общая топология. Основные конструкции.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 252 с.
23. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
24. Ченцов А.Г. *Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления.* II // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 3. – С. 62–73.
25. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
26. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1965. – 322 с.
27. Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M. *Theory of charges. A study of finitely additive measures.* – New York: Acad. Press, 1983. – 253 p.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
29.01.2001