И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.544

А.Ф. ВОРОНИН

О КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПРЯМОЙ ДЛЯ ТРЕХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение. Пусть Π_+, Π_- — верхняя и нижняя полуплоскости соответственно,

$$\Pi_\pm = \{z = x + iy : x \in R,\ \pm y > 0\}.$$

Краевую задачу для трех аналитических функций на вещественной прямой R поставим следующим образом. Найти три исчезающие на бесконечности функции $F^\pm(z)$, $F_0^-(z)$, голоморфные соответственно в полуплоскостях $\Pi_\pm$ и Π_-, предельные значения которых на вещественной оси R удовлетворяют краевому условию

$$F^+(x) = G(x)F^-(x) + G_0(x)F_0^-(x) + g(x), \quad x \in R, \tag{1}$$

где $G(x)$, $G_0(x)$ и $g(x)$ — заданные функции.

Предполагается, что

$$G \in L_\infty(R), \quad G_0 \in C(R), \quad g \in L_2(R). \tag{2}$$

Кроме того, считается, что коэффициенты удовлетворяют условиям

$$G_0(x) \neq 0, \quad x \in R, \quad \lim_{x\to\pm\infty} G_0(x) = 1, \tag{3}$$

$$G(x) = O(e^{-bx}) \ \text{ при } \ x \to \infty, \quad b > 0. \tag{4}$$

Решение краевой задачи (1)–(4) будем искать в классах Харди H^2 ([1], с. 79)

$$F^\pm \in H^2(\Pi_\pm), \quad F_0^-(z), e^{idz}F_0^-(z) \in H^2(\Pi_-), \quad d > 0. \tag{5}$$

В такой постановке задача является новой в теории краевых задач [2]–[7]. Ниже, не уменьшая общности, будем считать, что носитель функции $F_0^-(x)$ не пуст.

Цель данной работы — получить в явном виде необходимые и достаточные условия разрешимости (и единственности) решения задачи (1)–(5), найти решение задачи в явном виде.

При условии $d = G = 0$ краевая задача (1)–(5) переходит в хорошо изученную задачу Римана на прямой [2]–[5]. При условии $G_0 = 0$ краевая задача (1)–(5) превращается в задачу Римана с минус бесконечным индексом [2], [7]. В [8] в виде явных формул типа Карлемана получены необходимые и достаточные условия разрешимости и единственное решение данной задачи Римана с минус бесконечным индексом. В названной работе выполнение условия $G(x) = O(e^{-bx})$ при $x \to \infty$, $b > 0$ на коэффициент задачи позволило отказаться от бесконечного числа условий для разрешимости задачи Римана с минус бесконечным индексом [7].

Из условий (2)–(3) на коэффициент G_0 согласно [2]–[3] следует

Утверждение. *Пусть* $\mu = \operatorname{Ind} G_0(x)$, $x \in R$. *Если* $\mu > 0$ $(\mu < 0)$, *то всегда будет существовать единственная правильная факторизация*

$$G_0(x) = X^-(x)X^+(x), \quad x \in R, \tag{6}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00389).

при которой множитель $X^+(z)$ $(X^-(z))$ будет иметь внутри полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ $(\operatorname{Im} z < 0)$ единственный нуль кратности $|\mu|$ в точке $z = i$ $(z = -i)$ и никаких других нулей иметь не будет.

Если $\mu = 0$, то множители $X^\pm(z)$ не имеют нулей в полуплоскостях $\pm \operatorname{Im} z > 0$ соответственно.

Для $p \in [-d, 0]$ положим

$$
\begin{aligned}
w_0(p) &:= -\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{g(t)}{X^+(t)}\right\}(p) \quad \text{при} \quad \mu \le 0, \\
w_0(p) &:= -\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{g(t)}{X^+(t)}\right\}(p) - e^p \sum_{k=1}^{\mu} \frac{a_{\mu-k}}{(k-1)! i^k} p^{k-1} \quad \text{при} \quad \mu > 0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $\mathcal{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье, a_k, $k = 0, \dots, \mu - 1$, — постоянные.

Под задачей Коши для функции

$$w \in H^2(\Pi_0^b), \quad \text{где} \quad \Pi_0^b = \{p = x + iy : x \in R,\ 0 < y < b\}, \tag{8}$$

будем понимать задачу восстановления функции w в замкнутой полосе Π_0^b по условию

$$w(p) = w_0(p), \quad p \in [-d, 0], \quad w_0 \in L_2(-d, 0). \tag{9}$$

Задача Коши (8), (9) полностью исследована. В [9] в виде явных формул типа Карлемана приведены необходимые и достаточные условия разрешимости и единственное решение задачи (8), (9).

В работе также будут рассмотрены естественные приложения краевой задачи (1)–(5) к теории интегральных уравнений в свертках и сингулярных интегральных уравнений (приложения задачи Римана к интегральным уравнениям см. в [2]–[4]). Интересной особенностью рассмотренных в настоящей работе уравнений является то, что из одного интегрального уравнения корректно находятся две (независимые) функции.

Изучаются следующие уравнения.

а) Уравнение в свертках относительно пары функций u, u_0

$$u(x)(1 - \chi(x)) - \int_0^\infty k_1(x-t)u(t)\,dt - \int_{-\infty}^{-d} k_2(x-t)u(t)\,dt - \int_{-\infty}^{0} k_0(x-t)u_0(t)\,dt = f(x), \tag{10}$$

где $x \in R$, $\chi(x)$ — характеристическая функция интервала $(-d, 0)$,

$$
\begin{gathered}
k_j \in L_1(R), \quad j = 0, 1, 2, \quad f \in L_2(R) \ \text{— известные функции,} \\
u \in L_2(R \setminus [-d, 0]), \quad u_0 \in L_2(-\infty, -d), \quad d > 0, \ \text{— искомые функции,}
\end{gathered} \tag{11}
$$

кроме того, предполагается, что

$$\mathcal{F}k_0(t) = O(e^{-bt}) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad b > 0, \quad 1 - \mathcal{F}k_1(t) \ne 0, \quad t \in R. \tag{12}$$

б) Сингулярное интегральное уравнение относительно пары функций ψ, ψ_0

$$(1 + A(t))\psi(t) + B(t)(S\psi)(t) + B_0(t)(S^-\psi_0)(t) = f(t), \quad t \in R, \tag{13}$$

где

$$(S\psi)(x) = \frac{1}{\pi i}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t - x}\,dt, \quad (S^\pm\psi)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t - (x \pm i0)}\,dt,$$

$A, B \in C(R)$, $B_0 \in L_\infty(R)$, $f \in L_2(R)$ — коэффициенты уравнения,

$$
\begin{gathered}
\psi,\ \psi_0 \in L_2(R) \ \text{— искомые функции,} \\
\text{функция } \psi \text{ такая, что} \ \ \mathcal{F}^{-1}\psi(x) = 0, \quad x \in (-d, 0), \quad d > 0.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Кроме того, предполагается, что

$$1 + A(t) + B(t) \neq 0, \quad t \in R, \quad B_0(t) = O(e^{-bt}) \ \text{при} \ t \to \infty, \quad b > 0. \tag{15}$$

1. *Основные результаты.*

Теорема. *Для разрешимости краевой задачи (1)–(5) необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий.*

(i) *Для $\mu \leq 0$ существует решение $w \in H^2(\Pi_0^b)$ задачи Коши (7)–(9) и выполняется соотношение*

$$\frac{X^+W}{G} \in H^2(\Pi_-), \quad \text{где} \ \ W = \mathcal{F}w. \tag{16}$$

Для $\mu > 0$ существуют постоянные a_k, $k = 0, \dots, \mu - 1$, такие, что задача Коши (7)–(9) имеет решение $w \in H^2(\Pi_0^b)$ и выполняется соотношение (16).

(ii) *Существует решение краевой задачи Римана*

$$F^+(t) = G_0(t)F_0^-(t) + g(t) + W(t)X^+(t), \quad t \in R, \tag{17}$$

в классах Харди

$$F^+ \in H^2(\Pi_+), \quad F_0^-(z), e^{idz}F_0^-(z) \in H^2(\Pi_-), \quad d > 0. \tag{18}$$

При выполнении условий (i), (ii) решение задачи (1)–(5) единственно и находится явно

$$F^-(t) = \frac{X^+(t)W(t)}{G(t)}, \quad t \in R, \tag{19}$$

функции F^+, F_0^- — решение краевой задачи Римана (17), (18).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что решение задачи (1)–(5) существует. Имеем $F^\pm, F_0^- \in L_2(R)$ в силу известного свойства классов Харди [1].

Положим

$$W(t) := \frac{F^+(t)}{X^+(t)} - X^-(t)F_0^-(t) - \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in R. \tag{20}$$

Тогда из (1) с учетом (6), (20) получим

$$W(t) = \frac{F^-(t)G(t)}{X^+(t)}. \tag{21}$$

Из (20) и (2), (3) следует, что $W \in L_2(R)$. Тогда из (4) имеем

$$e^{-ipt}W(t) \in L_1(R) \cap L_2(R) \ \ \text{при} \ \ 0 < \operatorname{Im} p < b. \tag{22}$$

Следовательно,

$$w(p) := \mathcal{F}^{-1}W(p) \in H^2(\Pi_0^b). \tag{23}$$

Применив к равенству в (20) обратное преобразование Фурье, с учетом (23) получим

$$w(p) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F^+(t)}{X^+(t)}\right\}(p) - \mathcal{F}^{-1}\{X^-(t)F_0^-(t)\}(p) - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{g(t)}{X^+(t)}\right\}(p), \quad p \in R. \tag{24}$$

Пусть $\mu \leq 0$. Тогда из утверждения (см. (6)) имеем

$$\frac{F^+(z)}{X^+(z)} \in H^2(\Pi_+), \quad e^{idz}X^-(z)F_0^-(z) \in H^2(\Pi_-). \tag{25}$$

Из (25) согласно [1], [2] получим

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F^+(t)}{X^+(t)}\right\}(p)=0,\quad p<0,\quad \mathcal{F}^{-1}\{X^-(t)F_0^-(t)\}(p)=0,\quad p>-d. \tag{26}$$

Из (24) и (26) имеем

$$w(p)=-\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{g(t)}{X^+(t)}\right\}(p),\quad p\in[-d,0]. \tag{27}$$

Соотношения (23), (27) представляют собой задачу Коши (7)–(9). Из (21) и (5) следует соотношение (16). Таким образом, условие (i) выполнено. Умножив равенство (20) на $X^+(t)$, получим задачу Римана (17), (18), решение которой при $\mu\le 0$ единственно. Необходимость доказана при $\mu\le 0$.

Достаточность. Пусть $\mu\le 0$ и выполнены условия существования (i), (ii). Покажем, что функции $F^\pm$, F_0^-, определенные формулами (17)–(19), являются решением исходной задачи (1)–(5).

Из (19) непосредственно следует равенство (21). Подставив его в краевое условие (17), получим (1). Из (18), (19) и (16) вытекает справедливость соотношений в (5). Теорема доказана при $\mu\le 0$.

Доказательство для случая $\mu>0$ аналогично случаю $\mu\le 0$ с той лишь разницей, что в рассуждениях необходимо учитывать наличие нуля (кратности μ) у множителя $X^+(z)$ в полуплоскости регулярности $\operatorname{Im} z>0$. Докажем сначала единственность решения задачи (1)–(5). Пусть $F^\pm,F_0^-\in L_2(R)$ — решение исходной задачи (1)–(5). Если краевая задача Римана (17), (18) имеет два решения, то у соответствующей однородной задачи ($W=g=0$) будет существовать нетривиальное решение вида

$$F^+(z)=X^+(z)z^{l-1}(z-i)^{-\mu},\quad F^-(z)=\frac{1}{X^-(z)}z^{l-1}(z-i)^{-\mu},\quad l\in\{1,\dots,\mu\},$$

в противоречие с условием $e^{izb}F^-(z)\in H^2(\Pi_-)$. Следовательно, однородная задача (17), (18) имеет лишь тривиальное решение, и решение задачи (1)–(5) единственно.

Формулы и соотношения (20)–(24) справедливы и для $\mu>0$. Первое соотношение в (25) не выполняется (в виду наличия нуля у функции $X^+(z)$ в точке $z=i$). Получим аналог этого соотношения в данном случае.

Положим

$$X_1^+(t):=(t-i)^{-\mu}X^+(t),\quad a_k:=\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{F^+(t)}{X_1^+(t)}\right)_{t=i},\quad k=0,\dots,\mu-1. \tag{28}$$

Из (28) вытекает требуемое соотношение

$$\frac{F^+(z)}{X^+(z)}-\sum_{k=1}^{\mu}(z-i)^{-k}a_{\mu-k}\in H^2(\Pi_+). \tag{25$_1$}$$

Из (25_1) следует аналог равенства (27)

$$w(p)=-\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{g(t)}{X^+(t)}\right\}(p)-e^p\sum_{k=1}^{\mu}\frac{a_{\mu-k}}{(k-1)!i^k}p^{k-1},\quad p\in[-d,0]. \tag{27$_1$}$$

Соотношения (23), (27_1) — задача Коши (7)–(9). Соотношение (16) выполняется по тем же причинам, что и в случае $\mu\le 0$. Таким образом, условие (i) справедливо.

Решение задачи Коши (23), (27_1) известно [9] и представимо в виде

$$w(p)=v_0(p)+\sum_{k=1}^{\mu}a_{\mu-k}v_k(p),\quad p\in R,$$

где функции v_j, $j = 0, \dots, \mu$, вычисляются по соответствующим формулам типа Карлемана. Тогда

$$W(t) = \mathcal{F}v_0(t) + \sum_{k=1}^{\mu} a_{\mu-k}\mathcal{F}v_k(t), \quad t \in R. \tag{29}$$

Умножив равенство (20) на X^+, получим, что функции $F^{\pm}$, F_0^-, подчиняющиеся условию (5), удовлетворяют краевой задаче (17), (18). Следовательно, условие (ii) также выполнено.

Решение краевой задачи (17), (18) имеет вид [2]–[4]

$$F^+(t) = X^+(t)(S^+g_1)(t) + X^+(t)P_\mu(t)(t-i)^{-\mu}, \tag{30}$$

$$F^-(t) = \frac{1}{X^-(t)}(S^-g_1)(t) + P_\mu(t)(t-i)^{-\mu}, \tag{31}$$

где P_μ — некоторый полином степени $\mu - 1$, $g_1 = g/X^+ + W$.

Подставив выражение для F^+ из (30) в (28), с учетом (29) получим соотношения на постоянные a_k, $k = 0, \dots, \mu-1$, и коэффициенты полинома P_μ. Имеем

$$a_k = \frac{\partial^k}{k!\partial t^k}\big((t-i)^\mu((S^+g_1)(t) + (S+W)(t)) + P_\mu(t)\big)_{t=i}, \quad k = 0, \dots, \mu-1,$$

или

$$a_k = \frac{\partial^k}{k!\partial t^k}\big(P_\mu(t)\big)_{t=i}, \quad k = 0, \dots, \mu-1. \tag{32}$$

Из (32) однозначно находятся коэффициенты полинома P_μ.

Достаточность условий (i),(ii) для существования решения задачи (1)-(5) для случая $\mu > 0$ очевидна. $\square$

2. *Интегральные уравнения.* Применив к уравнению (10) преобразование Фурье и разделив полученное уравнение на $1 - \mathcal{F}k_1(p)$, имеем

$$\mathcal{F}u_+(p) - \mathcal{F}u_-(p)G_0(p) - \mathcal{F}u_0(p)G(p) = g(p), \quad p \in R, \tag{33}$$

где

$$u_\pm(t) = \pm u(t)\theta(\pm t), \quad \theta \text{ — функция Хевисайда}, \quad u_-(t) = 0, \quad t \in (-d, 0),$$

$$G(p) = \frac{\mathcal{F}k_0(p)}{1 - \mathcal{F}k_1(p)}, \quad G_0(p) = \frac{1 - \mathcal{F}k_2(p)}{1 - \mathcal{F}k_1(p)}, \quad g(p) = \frac{\mathcal{F}f(p)}{1 - \mathcal{F}k_1(p)}.$$

Положив в уравнении (33) $F^+ := \mathcal{F}u_+$, $F_0^- := \mathcal{F}u_-$, $F^- := \mathcal{F}u_0$, получим краевую задачу (1)–(5). Легко показать, что из (1)–(5) вытекает уравнение (10) с условиями (11)–(12). Таким образом, уравнение (10) с условиями (11)–(12) эквивалентно задаче (1)–(5).

Рассмотрим сингулярное уравнение (13). По формулам Сохоцкого [2]–[4] имеем

$$\psi(t) = (S^+\psi)(t) - (S^-\psi)(t), \quad (S\psi)(t) = (S^+\psi)(t) + (S^-\psi)(t). \tag{34}$$

Из (13) и (34) получим

$$(S^+\psi)(t)(1 + A(t) + B(t)) - (S^-\psi)(t)(1 + A(t) - B(t)) + B_0(t)(S^-\psi_0)(t) = f(t). \tag{35}$$

В уравнении (35) положив

$$F^+(t) := (S^+\psi)(t), \quad F^-(t) := (S^-\psi_0)(t), \quad F_0^-(t) := (S^-\psi)(t), \quad t \in R,$$

$$G := -\frac{B_0}{1 + A + B}, \quad G_0 = \frac{1 + A - B}{1 + A + B}, \quad g := \frac{f}{1 + A + B},$$

получим краевую задачу (1)–(5). Таким образом, уравнение (13) с условиями (14), (15) эквивалентно задаче (1)–(5).

Литература

1. Ахиезер Н.А. *Лекции об интегральных преобразованиях.* – Харьков: Вища школа, 1984. – 120 с.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.*– 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.
3. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.
4. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
5. Хведелидзе Б.В. *Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения* // Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР. – 1956. – Т. 23. – С. 3–158.
6. Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* – М.: Наука, 1977. – 448 с.
7. Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М. : Наука, 1986. – 240 с.
8. Воронин А.Ф. *Краевая задача Римана для полуплоскости с коэффициентом, экспоненциально убывающим на бесконечности* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 9. – С. 20–23.
9. Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.

Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
09.01.2001