ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 7 (530)

УДК 517.968

З.Б. ЦАЛЮК

АСИМПТОТИКА РЕЗОЛЬВЕНТЫ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ ПРИ СТЕПЕННЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СИМВОЛА

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{X}$ уравнение

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)\,ds + f(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь f — непрерывное отображение $[0,\infty)$ в $\mathbf{X}$, $K(t)$ при каждом фиксированном t является вполне непрерывным оператором в $\mathbf{X}$ и $K \in L[0,\infty) = \Big\{K : \int\limits_0^\infty \|K(t)\|dt < \infty\Big\}$. Как известно, при этих предположениях уравнение (1) имеет и притом единственное непрерывное решение $x(t)$, это решение определено на $[0,\infty)$ и выражается равенством

$$x(t) = f(t) + \int_0^t R(t-s)f(s)\,ds, \quad t \geq 0,$$

где R — резольвента ядра K.

Резольвента $R(t)$ при каждом фиксированном t является вполне непрерывным оператором, удовлетворяющим уравнению

$$R(t) = K(t) + \int_0^t K(t-s)R(s)\,ds, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$R(t)$ суммируема на любом отрезке $[0,a]$ и $\|R(t)\| = O(e^{ct})$, при некотором $c \geq 0$. Поэтому для R (по крайней мере при $\operatorname{Re} z > c$) определено преобразование Лапласа $\widehat{R}(z) = \int\limits_0^\infty e^{-zt}R(t)\,dt$ и в силу (2) оно удовлетворяет уравнению $(I - \widehat{K}(z))\widehat{R}(z) = \widehat{K}(z)$ (I — тождественный оператор).

Если оператор $I - \widehat{K}(z)$ обратим при всех z, $\operatorname{Re} \geq 0$, то согласно теореме Винера [1], [2] резольвента $R \in L[0,\infty)$.

Пусть $I - \widehat{K}(z)$ обратим не при всех z, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Так как $\widehat{K}(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, то оператор $I - \widehat{K}(z)$ обратим при достаточно больших $|z|$. Поэтому функция $\big(I - \widehat{K}(z)\big)^{-1}$ мероморфна в области $\operatorname{Re} z > 0$. Если она имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ конечное число особых точек λ_j и эти точки — полюса, то формально

$$R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt}\big(I - \widehat{K}(z)\big)^{-1}\widehat{K}(z)\,dz$$

и по теории вычетов асимптотика $R(t)$ зависит от квазимногочлена $\sum P_j(t)\,e^{\lambda_j t}$. Если есть особые точки, отличные от полюсов, а они могут лежать лишь на мнимой оси, то асимптотика $R(t)$ характеризуется более сложной, чем квазимногочлен, функцией.

Вопрос, таким образом, заключается в том, какая функция определяет асимптотику $R(t)$, каким образом $R(t)$ зависит от этой функции и каковы минимальные условия, при которых справедлива соответствующая зависимость $R(t)$.

Один из возможных ответов на эти вопросы можно получить, используя метод, например, правой, регуляризации. Это означает, что в уравнении (1) надо ввести замену

$$x(t) = y(t) + \int_0^t Q(t-s)y(s)\,ds,$$

где Q надо подобрать так, чтобы $[I+\widehat{Q}(z)]^{-1}$ "гасило" особые точки $[I-\widehat{K}(z)]^{-1}$, т. е. чтобы оператор $(I-\widehat{K}(z))(I+\widehat{Q}(z))$, соответствующий регуляризованному уравнению, был обратим во всей полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Тогда, как отмечено выше, резольвента регулязированного уравнения $R_0(t) \in L[0,\infty)$ и резольвента R выражается через R_0 и Q равенством

$$R(t) = Q(t) + R_0(t) + \int_0^t Q(t-s)R(s)\,ds. \tag{3}$$

Если $\mathbf{X} = \mathbb{C}$, а $1-\widehat{K}(z)$ имеет в полуплоскостях конечное число нулей конечной кратности (не обязательно целой), то вид Q и необходимые и достаточные условия справедливости (3) с таким Q приведены в [3], [4]. Для системы уравнений вид Q и представление (3) получены в случае, когда все особые точки $\left(I-\widehat{K}(z)\right)^{-1}$ — полюса [5] или некоторые из них — специального вида точки ветвления [6]. В данной работе рассматривается общий случай точек ветвления, точнее предполагается выполненым следующее условие.

A) Оператор $I-\widehat{K}(z)$ не обратим при $\operatorname{Re} z \geq 0$ в конечном числе точек $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, $\operatorname{Re}\lambda_i=0$, $i=1,\dots,q$, $\operatorname{Re}\lambda_i>0$, $i>q$, причем в окрестности точек λ_i, $i\leq q$, справедливо разложение

$$\left(I-\widehat{K}(z)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{T_i} \frac{A_{ik}}{(z-\lambda_i)^{\alpha_{ik}}} + C_i(z), \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

где $\alpha_{i0} > \alpha_{i1} > \cdots > 0$ и $C_i(z)$ непрерывна, а точки λ_i, $i>q$, являются полюсами $\left(I-\widehat{K}(z)\right)^{-1}$ порядка m_i соответственно.

Обозначим через $U*V(t) = \int\limits_0^t U(t-s)V(s)\,ds$ свертку U и V, через $[\alpha]$ — целую часть числа α, $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, $m_i = [\alpha_{i0}]+1$, если $\{\alpha_{i0}\}\neq 0$ и $m_i=[\alpha_{i0}]$, если $\{\alpha_{i0}\}=0$.

Теорема. *Пусть выполнено условие A) и при* $i\leq q$

$$\widehat{K}(\lambda_i)\,t^{\alpha_{i0}-1} - t^{\alpha_{i0}-1} * e^{-\lambda_i t}K(t) \in L[0,\infty), \tag{5}$$

а, если $\alpha_{i0}>1$, *то и*

$$\int_t^\infty e^{-\lambda_i s}\,K(s)\,ds \in L[0,\infty). \tag{6}$$

Тогда для резольвенты R ядра K справедливо представление $R(t) = Q_1(t) + R_1(t) + Q_0(t) * R_0(t)$, *где* $R_i \in L[0,\infty)$, $i=0,1$,

$$Q_0(t) = \sum_{i=1}^q e^{\lambda_i t}\left\{ \sum_{k=0}^{m_i-1} C_{ik}^0\, t^{\alpha_{i0}-1-k} + P^0_{[\alpha_{i0}]-1}(t)\right\},$$

$$Q_1(t) = \sum_{i=1}^q e^{\lambda_i t}\left\{ \sum_{k=0}^{m_i-1} C_{ik}^1\, t^{\alpha_{i0}-1-k} + P^1_{[\alpha_{i0}]-1}(t)\right\} + \sum_{i>q} e^{\lambda_i t}P_{m_i-1}(t),$$

$P_r(t)$, $P_r^0(t)$, $P_r^1(t)$ — *многочлены степени r с операторными коэффициентами.*

Естественно предполагается, что $Q_0(t)=0$, если $q=0$.

Для доказательства теоремы необходимо подсчитать некоторые свертки.

Лемма. *Пусть* $\lambda_j \neq \lambda_l$, $j\neq l$, $\operatorname{Re}\lambda_j \geq 0$, α_j *действительные целые, причем* $\alpha_j \geq 0$ *при* $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$. *Тогда*

$$e^{\lambda_1 t}(t+1)^{\alpha_1} * \cdots * e^{\lambda_n t}(t+1)^{\alpha_n} = \sum_{j=1}^{n}\left\{e^{\lambda_j t}\sum_{l=0}^{r} C_l^{(\alpha_j)}(t+1)^{\alpha_j-l} + e^{\lambda_j t}P_{[\alpha_j]}(t)\right\} + \frac{Q(1)}{(t+1)^{m+1}},$$

где $r \geq \max(\alpha_j)$, $m=[\min(r-\alpha_j)]$, $C_l^{(\alpha)}=0$ *при* $l>\alpha$, *если целое* $\alpha\geq 0$ *и* $P_k(t)$ — *многочлен степени* k, *причем* $P_k(t)=0$ *при* $k<0$.

Следствие. Пусть выполнены условия леммы и $\alpha_j > -1$. Тогда

$$e^{\lambda_1 t}t^{\alpha_1} * \cdots * e^{\lambda_n t}t^{\alpha_n} = \sum_{j=1}^{n}\left\{e^{\lambda_j t}\sum_{l=0}^{[\alpha_j]+1} C_l^{(\alpha_j)}t^{\alpha_j-l} + e^{\lambda_j t}P_{[\alpha_j]}(t)\right\} + U, \tag{7}$$

где $U\in L[0,\infty)$ и таково, что при $0\leq\beta<1$, $\operatorname{Re}\lambda=0$, $\lambda\neq\lambda_j$, если $\{\alpha_j\}\neq 0$,

$$\frac{e^{\lambda t}}{t^{\beta}} * U = \frac{ce^{\lambda t}}{t^{\beta}} + V(t), \quad V\in L[0,\infty).$$

Заметим также, что $e^{\lambda t}t^{\alpha} * e^{\lambda t}t^{\beta} = Ce^{\lambda t}t^{\alpha+\beta+1}$ при $\alpha,\beta>-1$.

Доказательство леммы. Прежде всего заметим, что интегрируя по частям, получим при $r>\alpha$, $r>0$, $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$, $\lambda\neq 0$

$$(t+1)^{\alpha} * \frac{O(1)}{(t+1)^{2r+1+\varepsilon}} = \sum_{l=0}^{r} C_l^{(\alpha)}(t+1)^{(\alpha-l)} + \frac{O(1)}{(t+1)^{\gamma}}, \quad \gamma=\min(r+1-\alpha, r+\varepsilon) \tag{8}$$

и

$$\varphi_1(\alpha,\lambda)(t) = \int_0^t (s+1)^{\alpha}e^{\lambda s}\,ds = \sum_{l=0}^{r} C_l^{(\alpha)}e^{\lambda t}(t+1)^{\alpha-l} + C + \frac{e^{\lambda t}O(1)}{(t+1)^{r+1-\alpha}}.$$

Из последнего следует (m натуральное)

$$\varphi_m(\alpha,\lambda)(t) = \int_0^t (t-s)^{m-1}(s+1)^{\alpha}e^{\lambda s}\,ds = \sum_{l=0}^{r} C_l^{(\alpha)}(t+1)^{\alpha-l} + \frac{O(1)e^{\lambda t}}{(t+1)^{r+1-\alpha}} + P_{m-1}(t).$$

Подсчитаем теперь $I_{\alpha,\beta}^{\lambda,\mu} = e^{\lambda t}(t+1)^{\alpha} * e^{\mu t}(t+1)^{\beta}$. Заметим, что при $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$ или $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}\mu=0$, $\beta<0$ или $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\mu=0$, $\alpha<0$, $\beta<0$ лемма справедлива (см. [7]).

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{Re}\mu=0$, $\alpha>0$, $\beta<0$. Интегрируя по частям и используя утверждение леммы при $\alpha_j<0$, имеем

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta}^{\lambda,\mu} &= e^{\lambda t}\int_0^t (t-s+1)^{\alpha}e^{(\mu-\lambda)s}(s+1)^{\beta}\,ds = \\
&= e^{\lambda t}\big(C_0\varphi_1(\beta,\mu-\lambda) + \cdots + C_{[\alpha]}\varphi_{[\alpha]+1}(\beta,\mu-\lambda) + C_{[\alpha]+1}^{(\alpha)}(t+1)^{\{\alpha\}-1} * \varphi_{[\alpha]+1}(\beta,\mu-\lambda)\big) = \\
&= \sum_{l=0}^{r} C_l e^{\mu t}(t+1)^{\beta-l} + \frac{O(1)}{(t+1)^{p+1-\beta}} + P_{[\alpha]}(t)e^{\lambda t} + C_{[\alpha]+1}^{(\alpha)}\Bigg(e^{\lambda t}(t+1)^{\{\alpha\}-1} * \sum_{l=0}^{2r} C_l e^{\mu t}(t+1)^{\beta-l} + \\
&\quad + e^{\lambda t}\left((t+1)^{\{\alpha\}-1} * \frac{O(1)}{(t+1)^{2r+1-\beta}}\right) + e^{\lambda t}\big((t+1)^{\{\alpha\}-1} * P_{[\alpha]}(t)\big)\Bigg) = \\
&= e^{\lambda t}\sum_{l=0}^{r} C_l^{(\alpha)}(t+1)^{\alpha-l} + e^{\lambda t}P_{[\alpha]}(t) + e^{\mu t}\sum_{l=0}^{r} C_l(t+1)^{\beta-l} + \frac{O(1)}{(t+1)^{r+1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Подобным же образом, используя уже вычисленные $I^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}$, найдем $I^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}$ при $\operatorname{Re}\lambda = \operatorname{Re}\mu = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\mu = 0$, $\beta > 0$. Переход от $n = 2$ к $n > 2$ осуществляется стандартным образом по индукции. $\square$

Доказательство следствия. Сначала, используя равенство

$$t^\alpha = (t+1)^\alpha + C_1(t+1)^{\alpha-1} + \cdots + C_n(t+1)^{\alpha-p} + \frac{O(1)}{(t+1)^{p+1-\alpha}}, \tag{9}$$

перейдем от степеней t к степеням $t+1$. Используя лемму и равенство

$$(t+1)^\alpha = t^\alpha + C_1 t^{\alpha-1} + \cdots + C_{[\alpha]} t^{\alpha-[\alpha]} + C^{(\alpha)}_{[\alpha]+1} t^{\{\alpha\}-1} + C^{(\alpha)}_{[\alpha]+2}(t+1)^{\{\alpha\}-2} + \cdots + \frac{O(1)}{(t+1)^{p+1-\alpha}},$$

перейдем к степеням t. Получим равенство (7), где U — линейная комбинация $\frac{e^{\lambda_j t}}{(t+1)^{l-\{\alpha_i\}}}$, $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$, $\{\alpha_i\} \ne 0$, $l \ge 2$ и $\frac{O(1)}{(t+1)^q}$ с достаточно большим q, а $\frac{e^{\lambda t}}{t^\beta}$ заменится на $\frac{e^{\lambda t}}{(t+1)^\beta}$.

Равенство

$$\frac{e^{\lambda t}}{(t+1)^\beta} * \frac{e^{\lambda_i t}}{(t+1)^{l-\{\alpha_i\}}} = \frac{ce^{\lambda t}}{(t+1)^\beta} + V, \quad V \in L[0,\infty),$$

следует из леммы, а равенство

$$\frac{e^{\lambda t}}{(t+1)^\beta} * \frac{O(1)}{(t+1)^q} = \frac{ce^{\lambda t}}{(t+1)^\beta} + V, \quad V \in L[0,\infty).$$

— из (8). $\square$

Доказательство теоремы. Используем соответствующий ядру K оператор свертки $\overline{K}$, который определяется на $C[0,\infty)$ равенством

$$\overline{K}x = K * x = \int_0^t K(t-s)x(s)\,ds.$$

Обозначим

$$\varphi_{il}(t) = \widehat{K}(\lambda_i)\,t^l - t^l * e^{-\lambda_i t}\,K,$$

и покажем, что $\phi_{il} \in L[0,\infty)$ при $l = [\alpha_{i0}]-1, [\alpha_{i0}]-2, \ldots, 0$ и $l = \alpha_{i0}-1, \alpha_{i0}-2, \ldots, \{\alpha_{i0}\}-1$, если $\{\alpha_{i0}\} \ne 0$.

Пусть $\alpha_{i0} > 1$ и $\{\alpha_{i0}\} \ne 0$. Тогда, интегрируя по частям, найдем

$$\widehat{K}(\lambda_i)(t+1)^{\{\alpha_{i0}\}-1} - (t+1)^{\{\alpha_{i0}\}-1} * e^{-\lambda_i t}K(t) = \varphi_{i0}(t) - (1-\{\alpha_{i0}\})(t+1)^{\{\alpha_{i0}\}-2} * \varphi_{i0}(t) \in L[0,\infty),$$

т. к. $(t+1)^{\{\alpha_{i0}\}-2} \in L[0,\infty)$ и в силу (6) $\varphi_{i0} \in L[0,\infty)$. Так как $t^\alpha - (t+1)^\alpha \in L[0,\infty)$ при $\alpha \in (-1,0)$, то и $\phi_{i\{\alpha_{i0}\}-1} \in L[0,\infty)$. Отсюда, из (5) и того, что φ_{il} при $l = \alpha_{i0-2}, \ldots, \{\alpha_{i0}\}-1$ с точностью до констант являются соответствующими производными $\varphi_{i\,\alpha_{i0}-1}$, следует ([8], с. 263) $\varphi_{il} \in L[0,\infty)$, $l = \alpha_{i0}-1, \alpha_{i0}-2, \ldots, \{\alpha_{i0}\}-1$.

Покажем, что и $\varphi_{i[\alpha_{i0}]-k} \in L[0,\infty)$ при $k = 1, \ldots, [\alpha_{i0}]$. Действительно, используя (9) и интегрируя по частям, найдем ($[\alpha_{i_0}] > 1$) $t^{[\alpha_{i0}]-1} = ct^{\alpha_{i0}-2} * t^{-\{\alpha_{i0}\}} = ct^{\alpha_{i0}-2} * (t+1)^{-\{\alpha_{i0}\}} + ct^{\alpha_{i0}-2} * U_1 = c\,t^{\alpha_{i0}-1} + c\,t^{\alpha_{i0}-1} * U_2 + ct^{\alpha_{i0}-2} * U_1$, где $U_i \in L[0,\infty)$, а c — различные константы. Следовательно,

$$\varphi_{i[\alpha_{i0}]-1} = c\varphi_{i\alpha_{i0}-1} + c\varphi_{i\alpha_{i0}-1} * U_2 + c\varphi_{i\alpha_{i0}-2} * U_1 \in L[0,\infty).$$

Отсюда, из (6) и того, что $\varphi_{i[\alpha_{i0}]-k}$ с точностью до констант суть производные $\varphi_{i[\alpha_{i0}]-1}$, следует требуемое ([8], с. 263). При целом α_{i0} аналогично предыдущему также имеем $\varphi_{il} \in L[0,\infty)$, $l = \alpha_{i0}-1, \alpha_{i0}-2, \ldots, 0$.

Определим ядра Q_l и K_l по индукции следующим образом. Положим $Q_0(t) = 0$, $K_0(t) = K(t)$. Пусть Q_l и K_l уже определены и j таково, что $\sum\limits_{i=1}^{j-1} m_i \le l < \sum\limits_{i=1}^{j} m_i$. Тогда положим

$Q_{l+1}(t)=ct^{\{\alpha_{j0}\}-1}e^{\lambda_j t}$, если α_{j0} не целое и $l+1=\sum\limits_{i=1}^{j}m_i$ и $Q_{l+1}(t)=ce^{\lambda_j t}$ во всех других случаях $(c>\max\operatorname{Re}\lambda_j)$. Ядро K_{l+1} определим равенством

$$K_{l+1}(t)=K_l(t)-Q_{l+1}(t)G_l+K_l*Q_{l+1}(t)G_l,$$

где G_l — оператор проектирования на $\operatorname{Ker}\big(I-\widehat{K}_l(\lambda_j)\big)$. Существование G_l вытекает из конечномерности ядра $I-\widehat{K}_l(\lambda_j)$. Таким образом, K_{l+1} — это ядро оператора свертки, определяемого соотношением $\big(I-\overline{K}_l\big)\big(I+\overline{Q_{l+1}G_l}\big)=I-\overline{K}_{l+1}$.

Предположим, что K_l, $j\le q$, удовлетворяет условиям

B_1) $K_l\in L[0,\infty)$;

B_2) λ_i, $i<j$, — устранимые особые точки $\big(I-\widehat{K}_l(z)\big)^{-1}$;

B_3) в λ_j справедливо разложение (4) с заменой α_{j0} на $\alpha_{j0}-r$, где $r=l-\sum\limits_{i=1}^{j-1}m_i$;

B_4) в окрестности λ_i, $i>j$, для $\big(I-\widehat{K}_l(z)\big)^{-1}$ справедливо такое же разложение (4), как и для $\big(I-\widehat{K}(z)\big)^{-1}$.

Покажем, что B_1)–B_4) сохраняются при переходе к K_{l+1}. Обозначим

$$\overline{M}_l=\big(I+\overline{Q_1G_0}\big)\dots\big(I+\overline{Q_lG_{l-1}}\big)-I.$$

Очевидно, $\overline{M}_l$ является оператором свертки с ядром, являющимся суммой всевозможных сверток ядер Q_k, $k\le l$, умноженных на некоторые постоянные операторы. В силу следствия леммы

$$M_l(t)=\sum_{i=1}^{j-1}\Big\{e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{m_i-1}C_{ik}t^{\alpha_{i0}-1-k}+e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{[\alpha_{i0}]-1}D_{ik}t^k\Big\}+e^{\lambda_j t}\sum_{k=0}^{r-1}D_{jk}t^k+U_l,$$

где $U_l\in L[0,\infty)$. Легко подсчитать, что $\overline{K}_l=\overline{K}-(I-\overline{K})\overline{M}_l$, и поэтому

$$N_l(t)=M_l(t)-K*M_l(t)\in L[0,\infty).$$

Имеем

$$N_l(t)=\sum_{i=1}^{j-1}\Big\{\sum_{k=0}^{m_i-1}\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)C_{ik}e^{\lambda_i t}t^{\alpha_{i0}-1-k}+\sum_{k=0}^{[\alpha_{i0}]-1}\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)D_{ik}\,e^{\lambda_i t}\,t^k\Big\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{r-1}\big(I-\widehat{K}(\lambda_j)\big)D_{jk}\,e^{\lambda_j t}t^k+\sum_{i=1}^{j-1}e^{\lambda_i t}\Big\{\sum_{k=0}^{m_i-1}\varphi_{i\,\alpha_{i0}-1-k}\,C_{ik}+\sum_{k=0}^{[\alpha_{i0}]-1}\varphi_{i\,k}\,D_{ik}\Big\}+e^{\lambda_j t}\sum_{k=0}^{r-1}\varphi_{jk}\,D_{jk}+U_l-K*U_l=$$

$$=\sum_{i=1}^{j-1}\Big\{\sum_{k=0}^{m_i-1}\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)C_{ik}\,e^{\lambda_i t}\,t^{\alpha_{i0}-1-k}+\sum_{k=0}^{[\alpha_{i0}]-1}\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)D_{ik}e^{\lambda_i t}\,t^k\Big\}+\sum_{k=0}^{r-1}\big(I-\widehat{K}(\lambda_j)\big)D_{jk}\,e^{\lambda_j t}t^k+V_l(t),$$

где $V_l\in L[0,\infty)$. Отсюда

$$\widehat{N}_l(z)=\sum_{i=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{m_i-1}\frac{\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)C_{ik}\Gamma(\alpha_{i0}-k)}{(z-\lambda_i)^{\alpha_{i0}-k}}+\sum_{i=1}^{j}\sum_{k}\frac{\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)D_{ik}k!}{(z-\lambda_i)^{k+1}}+\widehat{V}_l. \qquad (10)$$

Так как N_l и $V_l\in L[0,\infty)$, то $\widehat{N}_l(z)$ и $\widehat{V}_l(z)$ определены и непрерывны в точках λ_i. Поэтому умножая (10) на старшую степень $(z-\lambda_i)^{\alpha_{i0}}$ и полагая $z\to\lambda_i$, найдем $\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)C_{i0}=0$. Умножая затем (10) последовательно на оставшиеся старшие степени $z-\lambda_i$ и полагая $z\to\lambda_i$, получим

$$\big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)C_{ik}=0,\quad \big(I-\widehat{K}(\lambda_i)\big)D_{ik}=0. \qquad (11)$$

Следовательно,

$$K_l(t) = K(t) - V_l(t) = K(t) + \sum_{i=1}^{j}[\widehat{K}(\lambda_i)W_i(t) - K * W_i(t)] - U_l + K * U_l, \tag{12}$$

где $W_i(t) = -e^{\lambda_i t}\Big\{\sum\limits_{k=0}^{m_i-1} C_{ik}t^{\alpha_{i0}-1-k} + \sum\limits_{k=0}^{[\alpha_{i0}]-1} D_{ik}t^k\Big\}$, если $i < j$ и $W_j(t) = -e^{\lambda_j t}\sum\limits_{k=0}^{r-1} D_{jk}t^k$. Далее, полагая $\gamma = 0$, если $r < [\alpha_{j0}]$, и $\gamma = \{\alpha_{j0}\} - 1$, если $r = [\alpha_{j0}]$, будем иметь

$$M_{l+1}(t) = M_l(t) + c\,t^{\gamma}\,e^{\lambda_j t}\,G_l + M_l * c\,t^{\gamma}\,e^{\lambda_j t}\,G_l.$$

Отсюда в силу следствия леммы

$$M_{l+1}(t) = \sum_{i=1}^{j-1}\left\{e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{m_i-1} C'_{ik}\,t^{\alpha_{i0}-1-k} + e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{[\alpha_{i0}]-1} D'_{ik}\,t^k\right\} + e^{\lambda_j t}\sum_{k=0}^{r-1} D'_{jk}\,t^{k+1+\gamma} + c\,t^{\gamma}\,e^{\lambda_j t}I + U_{l+1},$$

где $U_{l+1} \in L[0,\infty)$, а C'_{ik} и D'_{ik} суть линейные комбинации соответственно C_{ip} и D_{ip}, умноженных справа на G_l. Из (11) получим

$$(I - \widehat{K}(\lambda_i))C'_{ik} = 0, \quad i = 1,\dots,j-1, \quad \text{и} \quad (I - \widehat{K}(\lambda_i))D'_{ik} = 0, \quad i = 1,\dots,j.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
K_{l+1}(t) &= K(t) - M_{l+1}(t) + K * M_{l+1}(t) = K(t) - N_{l+1}(t) = \\
&= K(t) - \sum_{i=1}^{j-1} e^{\lambda_j t}\Big\{\sum_{k=0}^{m_i-1}\varphi_{i,\alpha_{i0}-1-k}(t)\,C'_{ik} + \sum_{k=0}^{[\alpha_{i0}]-1}\varphi_{i,k}(t)\,D'_{ik}\Big\} - e^{\lambda_j t}\sum_{k=0}^{r-1}\varphi_{j,k+\gamma+1}(t)\,D'_{jk} - \\
&- (I - \widehat{K}(\lambda_j))\,C\,t^{\gamma}\,e^{\lambda_j t} - e^{\lambda_j t}\,\varphi_{j,\gamma}(t)\,C - U_{l+1} + K * U_{l+1} = (I - \widehat{K}(\lambda_j))Ct^{\gamma}e^{\lambda_j t} + V_{l+1}(t),
\end{aligned}$$

где $V_{l+1} \in L[0,\infty)$. Следовательно,

$$I - \widehat{K}_{l+1}(z) = I - \widehat{V}_{l+1}(z) + \frac{[I - \widehat{K}(\lambda_j)]\,C\,\Gamma(\gamma+1)}{(z-\lambda_j)^{\gamma+1}} = (I - \widehat{K}_l(z))\left(I + \frac{C\,G_l\,\Gamma(\gamma+1)}{(z-\lambda_j)^{\gamma+1}}\right).$$

Умножая последнее равенство на $(z-\lambda_j)^{\gamma+1}$, полагая $z \to \lambda_j$ и учитывая, что $[I - \widehat{K}_l(\lambda_j)]G_l = 0$, получим $[I - \widehat{K}(\lambda_j)]C = 0$ и, значит, $K_{l+1} = V_{l+1} \in L[0,\infty)$.

Покажем теперь, что для $[I - \widehat{K}_{l+1}(z)]^{-1}$ справедливо B_2)–B_4). Легко проверить, что

$$\left(I + \widehat{Q}_{l+1}G_l\right)^{-1} = I - G_l + \frac{c(z-\lambda_j)^{\gamma+1}\Gamma(\gamma+1)G_l}{(z-\lambda_j)^{\gamma+1} + c\Gamma(\gamma+1)}$$

и т. к. $\left(I - \widehat{K}_{l+1}(z)\right)^{-1} = \left(I + \widehat{Q}_{l+1}\,G_l\right)^{-1}\left(I - \widehat{K}_l(z)\right)^{-1}$, то для $\left(I - \widehat{K}_{l+1}(z)\right)^{-1}$ очевидно выполняется B_2) и B_4).

Проверим справедливость B_3). По условию

$$\left(I - \widehat{K}_l(z)\right)^{-1} = \sum_{k\ge 0}\frac{B_{jk}}{(z-\lambda_j)^{\beta_{jk}}} + B(z),$$

где $\beta_{j0} = \alpha_{j0} - r > \beta_{j1} > \cdots > 0$, а $B(z)$ непрерывна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \ge 0$. Пусть k_0 таково, что $\beta_{j0} - \beta_{jk_0} < 1$, а $\beta_{j0} - \beta_{j\,k_0+1} \ge 1$ (если такое k_0 есть). Покажем, что $[I - \widehat{K}_l(z)]B_{jk} = 0$ при $0 \le k \le k_0$. Прежде всего заметим, поскольку

$$\widehat{K}(\lambda_j)\,e^{\lambda_j t}\,t^{\alpha_{j0}-1} - e^{\lambda_j t}t^{\alpha_{j0}-1} * K = e^{\lambda_j t}\,\varphi_{j\,\alpha_{j0}-1}(t) \in L[0,\,\infty),$$

то $\widehat{K}(\lambda_j)-\widehat{K}(z)=(z-\lambda_j)^{\alpha_{j0}}\,d(z)$, где $d(z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_{j0})}\,e^{\lambda_j t}\,\widehat{\varphi_{j,\alpha_{j0}-1}}(t)$ непрерывна в правой полуплоскости. Отсюда в силу (12)

$$\widehat{K}_l(z)=\widehat{K}(z)+\sum_{i=1}^{j}[\widehat{K}(\lambda_i)-\widehat{K}(z)]\widehat{W}_i(z)-(I-\widehat{K}(\lambda_j))\widehat{U}_l(z)-(\widehat{K}(\lambda_j)-\widehat{K}(z))\widehat{U}_l(z)=$$
$$=\widehat{K}(z)+\sum_{i=1}^{j-1}[\widehat{K}(\lambda_i)-\widehat{K}(\lambda_j)]\widehat{W}_i(z)+(z-\lambda_j)^{\alpha_{j0}-r}\,B(z)-(I-\widehat{K}(\lambda_j))\,\widehat{U}_l(z).$$

Так как U_l есть сумма функций $\frac{e^{\lambda_i t}}{(t+1)^{l-\{\alpha_{i0}\}}}$, $l\geq 2$, $i<j$, и $\frac{O(1)}{(t+1)^q}$, умноженных на постоянные операторы, то

$$\widehat{U}_l(\lambda_j)-\widehat{U}_l(z)=(z-\lambda_j)\,\psi(z)$$

и, значит, $\widehat{K}_l(\lambda_j)-\widehat{K}_l(z)=(z-\lambda_j)^{\gamma+1}\,d_l(z)$, где $d_l(z)$ непрерывна в правой полуплоскости. Используя это, найдем

$$I=\bigl(I-\widehat{K}_l(z)\bigr)\bigl(I-\widehat{K}_l(z)\bigr)^{-1}=\sum_{k=0}^{k_0}\frac{[I-\widehat{K}_l(\lambda_j)]B_{jk}}{(z-\lambda_j)^{\beta_{jk}}}+\frac{D(z)}{(z-\lambda_j)^{\beta_{j\,k_0}}},$$

$\lim\limits_{z\to\lambda_j}D(z)=0$. Умножая последовательно это равенство на $(z-\lambda_j)^{\beta_{jk}}$, $0\leq k\leq k_0$, и полагая $z\to\lambda_j$, получим $[I-\widehat{K}_l(\lambda_j)]B_{jk}=0$, $0\leq k\leq k_0$. Это означает, что образ $\operatorname{Im}B_{jk}=B_{jk}(\mathbf{X})\subset\operatorname{Ker}(I-\widehat{K}_l(\lambda_j))$ и поэтому $(I-G_l)B_{jk}=0$, $0\leq k\leq k_0$. Отсюда

$$\bigl(I-\widehat{K}_{l+1}(z)\bigr)^{-1}=\bigl(I+\widehat{Q}_{l+1}(z)\,G_l\bigr)^{-1}\bigl(I-\widehat{K}_l(z)\bigr)^{-1}=\left[I-G_l+\frac{C\,\Gamma(\gamma+1)\,G_l(z-\lambda_j)^{\gamma+1}}{(z-\lambda_j)^{\gamma+1}+C\,\Gamma(\gamma+1)}\right]\times$$
$$\times\left[\sum_{k\geq 0}\frac{B_{jk}}{(z-\lambda_j)^{\beta_{jk}}}+B(z)\right]=\sum_{k=0}^{k_0}\frac{C\,\Gamma(\gamma+1)\,G_l}{(z-\lambda_j)^{\beta_{jk}-(1+\gamma)}}\frac{1}{(z-\lambda_j)^{\gamma+1}+C\,\Gamma(\gamma+1)}+$$
$$+\bigl(I+\widehat{Q}_{l+1}(z)\,G_l\bigr)^{-1}\left[\sum_{k>k_0}\frac{B_{jk}}{(z-\lambda_j)^{\beta_{jk}}}+B(z)\right],$$

т.е. $\bigl(I-\widehat{K}_{l+1}(z)\bigr)^{-1}$ удовлетворяет (4) с заменой α_{j0} на $\alpha_{j0}-r-1$, если $r<[\alpha_{j0}]$, и λ_j — устранимая особая точка, если $r=[\alpha_{j0}]$. Таким образом, при $h=\sum\limits_{i=1}^{q}m_i$ получим $K_h\in L[0,\infty)$ и λ_i, $i=1,\ldots,q$, — устранимые особые точки $\bigl(I-\widehat{K}_h(z)\bigr)^{-1}$. Так как $I-\widehat{K}_h(z)$ определен в λ_i, то оператор $I-\widehat{K}_h(z)$ обратим в точках мнимой оси.

Пусть $m=\sum\limits_{i=1}^{p}m_i$. Тогда $I-\overline{K}_m=(I-\overline{K}_h)(I+\overline{Q_{h+1}\,G_h})\cdots(I+\overline{Q_m\,G_{m-1}})$ и, проводя рассуждения, подобные приведенным в [5], покажем, что ядро $K_m\in L[0,\,\infty)$ и оператор $I-\widehat{K}_m(z)$ обратим при $\operatorname{Re}z\geq 0$. Пусть R_0 — резольвента ядра K_m. Тогда в силу теоремы Винера [1], [2] $R_0\in L[0,\infty)$. Положим $\overline{Q}^{(m)}=(I+\overline{Q_1\,G_0})\cdots(I+\overline{Q_m\,G_{m-1}})-I$. Так как ядро $Q^{(m)}$ оператора $\overline{Q}^{(m)}$ является линейной комбинацией сверток всевозможных ядер $Q_j\,G_{j-1}$, то в силу следствия леммы

$$Q^{(m)}(t)=\sum_{i=1}^{p}\left\{e^{\lambda_i t}\sum_{k=0}^{[\alpha_{i0}]}C_k^{(\alpha_{i0}-1)}t^{\alpha_{i0}-1-k}+e^{\lambda_i t}\,P_{[\alpha_{i0}]-1}(t)\right\}+U(t)=Q(t)+U(t),$$

где $U\in L[0,\infty)$. Очевидно, $I-\overline{K}_m=(I-\overline{K})(I+\overline{Q}^{(m)})$ и поэтому

$$R(t)=R_0(t)+Q^{(m)}(t)+Q^{(m)}(t)*R_0(t)=[R_0(t)+U(t)+U*R_0(t)]+Q(t)+Q*R_0(t).$$

Осталось заметить, что при $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$

$$e^{\lambda_i t} t^k * R_0(t) = \int_0^\infty (t-s)^k e^{\lambda_i (t-s)} R_0(s) ds - \int_t^\infty (t-s)^k e^{\lambda_i (t-s)} R_0(s) ds = e^{\lambda_i t} P_k(t) + V(t),$$

где $V \in L[0,\infty)$, т. к.

$$\int_0^\infty \int_t^\infty (s-t)^k \, e^{-\operatorname{Re}\lambda_i (s-t)} \|R_0(s)\| ds = \int_0^\infty \|R_0(s)\| \int_0^s \tau^k \, e^{-\operatorname{Re}\lambda_i \tau} \, d\tau \, ds < \infty.$$

Литература

1. Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* – М.:Наука, 1964. – 267 с.
2. Bochner S., Phillips R.S. *Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings* // Annals of Math. – 1942. – V. 43. – № 3. – C. 409–418.
3. Цалюк З.Б. *Асимптотическая структура резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 50–55.
4. Цалюк З.Б. *Структура резольвенты уравнения восстановления* // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион, Естественные науки. – Ростов-на-Дону, 2001. – С. 150–151.
5. Цалюк З.Б. *О допустимости пары* $(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ *и асимптотике резольвенты для системы интегральных уравнений Вольтерра* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 9. – С. 1226–1230.
6. Цалюк З.Б. *Структура резольвенты системы уравнений с разностным ядром* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 6. – С. 71–80.
7. Дербенев В.А., Цалюк З.Б. *Асимптотика решений линейных уравнений Вольтерра с разностным ядром.* – Краснодар: Изд-во Кубанск. ун-та, 2001. – 105 с.
8. Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства.* – М.: Мир, 1965. – 276 с.

Кубанский государственный университет

Поступила 11.05.2004