ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.968

О.В. БОРМОТОВА, С.В. ГАЙДОМАК, В.Ф. ЧИСТЯКОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Введение

Рассматривается система уравнений

$$\Lambda_{1,1}u := A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Cu = f, \tag{1.1}$$

где A, B, C — постоянные $n\times n$-матрицы, $u\equiv u(x,t)$, $f\equiv f(x,t)$ — искомая и заданная вектор-функции соответственно, $(x,t)\in U=[0,x_0]\times[0,t_0]\subset \mathbf{R}^2$. Предполагается, что

$$\det\ A = 0 \tag{1.2}$$

и вектор-функция f достаточно гладкая в области U.

В последние десять лет системы вида (1.1), удовлетворяющие условию (1.2), привлекают все большее внимание ввиду того, что они возникают в различных прикладных областях [1]–[3].

Ниже широко использованы методы, разработанные при изучении линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\Lambda_1\chi := A\frac{d\chi}{dt} + B\chi = \varphi, \quad t\in[0,t_0], \tag{1.3}$$

где $\chi\equiv\chi(t)$, $\varphi\equiv\varphi(t)$ — искомая и заданная вектор-функции соответственно и выполнено условие (1.2).

2. Теоремы существования

Изучим некоторые свойства системы (1.1) при предположениях, что матрица $C=0$, а пучок матриц $\lambda A+B$ регулярен. Здесь λ — некоторый символ, которому в работе может придаваться смысл числового параметра или оператора.

Определение 2.1. Пучок матриц $\lambda A+B$ *регулярен*, если $\det(\lambda A+B)\not\equiv 0$, где λ — числовой параметр.

При наших предположениях имеем систему уравнений

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{2.1}$$

для изучения которой потребуется

Лемма 2.1 ([4], с. 76). *Пусть пучок матриц $\lambda A+B$ регулярен. Тогда существуют такие невырожденные $n\times n$-матрицы P и Q с постоянными элементами, что*

$$P(\lambda A+B)Q = \lambda\begin{pmatrix} E_\nu & 0 & 0\\ 0 & E_\mu & 0\\ 0 & 0 & N\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & E_l\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где N, M — нильпотентные матрицы индексов k и k_1 соответственно: $N^k = 0$, $M^{k_1} = 0$, J — некоторая $d \times d$-матрица, E_ν, E_μ, E_l — единичные матрицы, размерности которых равны индексам, $\nu + \mu = d$, $l = n - d$.

Определение 2.2 ([4]). Выражение из правой части равенства (2.2) называется *канонической* (*кронекеровой*) структурой пучка матриц $\lambda A + B$. Параметры k, k_1 называются индексами пар матриц (A, B) и (B, A) соответственно.

Лемма 2.2. *Пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен тогда и только тогда, когда существует матричный многочлен $L(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{k} L_j \lambda^j$ со свойством $L(\lambda)(\lambda A + B) = \lambda E_n + L_0 B$, где L_j — постоянные $n \times n$-матрицы.*

Доказательство. Достаточность. Пусть пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен. Тогда

$$L(\lambda) = Q \begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda N + E_l)^{-1} \end{pmatrix} P, \quad (\lambda N + E_l)^{-1} = \sum_{j=0}^{k} (-\lambda N)^j, \tag{2.3}$$

где $(-\lambda N)^0 = E_l$.

Необходимость очевидна. □

Для того чтобы поставить краевую задачу для системы (2.1) и доказать существование решения, потребуется

Лемма 2.3. *Общее решение системы уравнений*

$$N \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = \psi, \tag{2.4}$$

где $z \equiv z(x,t)$, $\psi \equiv \psi(x,t)$ — искомая и заданная вектор-функции соответственно, $N^k = 0$, имеет вид

$$z = \sum_{j=0}^{k-1} \left[\Phi^j \widetilde{\psi}(x,t) + \Psi^j c(t) \frac{x^j}{j!} \right], \quad \widetilde{\psi}(x,t) = \int_x \psi(x,t) dx, \tag{2.5}$$

где $\Psi = -(\partial/\partial t) N$, $\Phi = -\int\limits_x \circ \Psi dx$, $c(t)$ — произвольная вектор-функция, $\Phi^0 \widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}$, $\Phi^0 c(t) = c(t)$.

Доказательство. Проинтегрируем систему (2.4) по переменной x. Получим равенство

$$N \int_x \frac{\partial z}{\partial t} dx + z = \widetilde{\psi} + c(t). \tag{2.6}$$

В формуле (2.3) примем $\lambda = \int\limits_x \circ (\partial/\partial t) dx$ и выпишем решение уравнения (2.6). Нам нужно доказать, что решение системы (2.4) зависит только от одной произвольной вектор-функции $c(t)$ и ее производных. Очевидно, что матрицы P, Q можно выбрать так, что $N = \mathrm{diag}\{N_1\ N_2\ \ldots\ N_i\}$, где N_j — жордановы нильпотентные блоки размерности $m_j \times m_j$, $N_j^{m_j} = 0$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_i = n$. Рассмотрим случай, когда в формуле (2.6) матрица N представляет жорданов блок размерности k. В координатной форме имеем

$$\frac{\partial z_{k-j-1}}{\partial t} + \frac{\partial z_{k-j}}{\partial x} = \psi_k, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \quad \text{отсюда} \quad z_k = \int_x \psi_k(x,t) dx + c_k(t),$$
$$z_{k-j-1} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_x z_{k-j}(x,t) dx + \psi_{k-j-1}(x,t) + c_{k-j-1}(t),$$

где $c(t) = (c_1(t)\ c_2(t)\ \ldots\ c_k(t))^\top$, $z = (z_1\ z_2\ \ldots\ z_k)^\top$, $\top$ — символ транспонирования. Последовательно, начиная с последней компоненты, находим все компоненты вектора z и записываем его в матричном виде (2.5).

Покажем теперь, что других решений система (2.4) не имеет. Предположим, что имеются два различных общих решения: z и $\widetilde{z}$. Следовательно, справедливо равенство $N\partial v/\partial t + \partial v/\partial x = 0$, $v = \widetilde{z} - z$. Проводя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, получим $v = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \Psi^j c(t)x^j/j!$, т. е. второе слагаемое в формуле (2.5) совпадает с ядром оператора системы (2.4). $\square$

Следствие 2.1. Общее решение уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} + N\frac{\partial z}{\partial x} = \psi$$

имеет вид

$$z = \sum_{j=0}^{k-1} \left[\widetilde{\Phi}^j \psi(x,t) + \widetilde{\Psi}^j c(x)\frac{t^j}{j!}\right],$$

где $\widetilde{\Psi} = -(\partial/\partial x)N$, $\widetilde{\Phi} = -\int\limits_t \circ \widetilde{\Psi} dt$.

Замечание 2.1. Вместо (2.4) можно рассмотреть систему

$$Na\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)z + b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)z = \psi,$$

где $a(\partial/\partial t) = \sum\limits_{j=0}^{i} a_j(\partial/\partial t)^j$, $b(\partial/\partial x) = \sum\limits_{j=0}^{i_1} b_j(\partial/\partial x)^j$ — скалярные операторы с постоянными коэффициентами. Тогда можно построить аналог формулы (2.5) и операторы в ней будут иметь вид $\Phi = -S \circ a(\partial/\partial t)N$, $\Psi = -a(\partial/\partial t)N$, где оператор S является левым обратным к оператору $b(\partial/\partial x)$. Во втором слагаемом оператор Ψ действует не просто на произвольную вектор-функцию $c(t)$, а на ядро оператора $b(\partial/\partial x)$.

Перейдем к анализу разрешимости системы (2.1). Для этого воспользуемся леммой 2.1. Умножая (2.1) на матрицу P и производя замену $u = Qy$, расщепим ее на три независимые подсистемы:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + J_1\frac{\partial y_1}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial t} + M\frac{\partial y_2}{\partial x} = \varphi_2, \quad N\frac{\partial y_3}{\partial t} + \frac{\partial y_3}{\partial x} = \varphi_3, \tag{2.7}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1^\top & y_2^\top & y_3^\top \end{pmatrix}^\top$, $P\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1^\top & \varphi_2^\top & \varphi_3^\top \end{pmatrix}^\top$.

Задавая условия $y_2(x,0) = \psi_2(x)$, $y_3(0,t) = \psi_3(t)$ для второго и третьего уравнений системы (2.7), согласно лемме 2.3 и следствию к ней однозначно определим их решения в области U:

$$y_2 = \sum_{j=0}^{k_1-1}(-M)^j\left[\psi_2^{(j)}(x)t^j/j! + \int_0^t (t-s)^j\frac{\partial^j \varphi_2(x,s)}{\partial x^j}ds\right], \tag{2.8}$$

$$y_3 = \sum_{j=0}^{k-1}(-N)^j\left[\psi_3^{(j)}(t)x^j/j! + \int_0^x (x-s)^j\frac{\partial^j \varphi_3(s,t)}{\partial t^j}ds\right]. \tag{2.9}$$

Следует отметить, что произвольное задание начальных условий на других границах области $y_2(0,t) = \psi_2(t)$, $y_3(x,0) = \psi_3(x)$ невозможно. Действительно, если подставить начальные функции в формулы решений однородных систем, то с необходимостью должны выполняться соотношения

$$\psi_2(t) = \sum_{j=0}^{k_1-1}(-M)^j c_2^{(j)}(0)t^j/j!, \quad \psi_3(x) = \sum_{j=0}^{k-1}(-N)^j c_3^{(j)}(0)x^j/j!, \tag{2.10}$$

где $c_2(x)$, $c_3(t)$ — произвольные достаточно гладкие вектор-функции. Из формул (2.10) видим, что выполнение условий совместности не гарантирует единственности решений.

Следствие 2.2. Общее решение уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (\lambda E + M)\frac{\partial z}{\partial x} = \psi, \quad M_1^k = 0, \quad \lambda \neq 0, \tag{2.11}$$

имеет вид

$$z = \sum_{j=0}^{k_1-1} (-N)^j/j!\Big[c^{(j)}(x-\lambda t)t^j + \int_0^t (t-s)^j \frac{\partial^j \psi(x-\lambda(t-s),s)}{\partial x^j} ds\Big],$$

где $c(\cdot)$ — произвольная вектор-функция, определяемая начальными или краевыми условиями. Чтобы это показать, достаточно перейти к новым переменным, положив $\widetilde{x} = x - \lambda t$, $\widetilde{t} = t$. При этом получим систему, совпадающую со второй системой (2.7), решение которой описывается формулой (2.8). Вернувшись к старым переменным, получим решение системы (2.11).

Теорема 2.1. *Пусть многочлен* $\det(\lambda A + B)$ *ненулевой и его ненулевые корни отрицательные (в общем случае кратные). Тогда в области* U *система* (2.1) *с начальными и краевыми условиями*

$$W_1 u(x,0) = \psi_1(x), \quad W_1 u(0,t) = \phi_1(t), \quad W_2 u(x,0) = \psi_2(x), \quad W_3 u(0,t) = \psi_3(t),$$

которые удовлетворяют равенствам $\psi_1(0) = \phi_1(0)$, $\dot{\phi}_1(0) = \varphi(0,0) - J\psi_1'(0)$, *и* $Q^{-1} = (W_1^\top, W_2^\top, W_3^\top)^\top$, *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть число ненулевых различных корней многочлена $\det(\lambda A + B)$ равно ν. Тогда матрицы P, Q в лемме 2.1 можно выбрать так, что $J = \mathrm{diag}\{\lambda_1 E + N_1, \lambda_2 E + N_2, \ldots, \lambda_\nu E + N_\nu\}$ и подсистема $\partial y_1/\partial t + J(\partial y_1/\partial x) = \varphi_1$ распадется на ν систем вида (2.11), каждая из которых будет иметь решение, в силу следствия 2.2, ниже характеристики $x = \lambda_i t$, $i = \overline{1,\nu}$. Для того чтобы показать, что в области, расположенной выше указанной характеристики, системы имеют решение, достаточно системы вида (2.11) умножить на матрицу $(\lambda_i E + N_i)^{-1}$, $i = \overline{1,\nu}$, и через начальные и краевые данные определить произвольные функции $c_i(x)$. На линиях $x = \lambda_i t$ решения будут совпадать в силу того, что сами решения и их производные совпадают в точке $(0,0)$. Для двух других уравнений (2.7) решения можно получить, подставляя начальные условия в формулы (2.8), (2.9). □

Замечание 2.2. Теорему 2.1 можно несколько расширить. Она остается справедливой для системы (1.1) при некотором изменении условий совместности начальных и краевых данных и предположении, что $PC = \binom{C_1}{0}$, где нулевой блок имеет размерность $[n-\nu] \times n$.

Замечание 2.3. Предположение о регулярности пучка $\lambda A + B$ является необходимым условием разрешимости системы (2.1) для произвольной достаточно гладкой вектор-функции f. Если пучок не регулярен, то найдется такая $f \in C^\infty$, что система (2.1) несовместна.

3. Приведение систем вида (1.1) к нормальной форме

В ([4], с. 16; [5]) показано, что при применении некоторых разностных методов для решения системы (1.3) с регулярным пучком матриц $\lambda A + B$ возникает так называемый "пограничный слой ошибок". Например, решения неявной схемы Эйлера $A(\chi_{j+1} - \chi_j)/\tau = B\chi_{j+1} + \varphi(t_{j+1})$, где $\tau = t_0/\mathcal{N}$, $t_{j+1} = j\tau$, $j = 1, 2, \ldots, \mathcal{N} - 1$, начиная с некоторого τ, удовлетворяют оценкам $\delta_j = \|\chi_j - \chi(t_j)\| = O(1/\tau^j)$, $j \leq k-2$, $\delta_j = O(\tau)$, $j > k-2$.

Численные эксперименты показали, что для систем вида (1.1) применение разностных методов также может сопровождаться возникновением пограничных слоев ошибок. Если в системе (1.3) пучок матриц регулярен, то существует линейный дифференциальный оператор, действие которого на систему (1.3) приводит ее к нормальной форме (форме Коши) [6]. Для решения систем в форме Коши существует большой набор эффективных численных методов. По аналогии будем искать операторы, переводящие систему (1.1) к системе Коши–Ковалевской.

Определение 3.1. Линейный дифференциальный оператор

$$\Lambda_{q,q} = \sum L_{ij} \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial x^j}, \quad q \geq i + j \geq 0,$$

будем называть нормализатором системы (1.1), если выполнено равенство

$$\Lambda_{q,q} \circ \Lambda_{1,1} u = \frac{\partial v}{\partial t} + D\frac{\partial v}{\partial x} + H_0 v + \int_x H(x-s)v(s)ds \tag{3.1}$$

для любого $u \in C^{k+1}(U)$, где $v = \sum\limits_{j=0}^{q} R_j(\partial/\partial x)^j u$, D, R_j, $H(x-s)$ — некоторые $n \times n$-матрицы.

Замечание 3.1. Для системы (1.3) нормализатор можно записать в виде суммы $\Lambda_k = \sum\limits_{j=0}^{k} L_j(d/dt)^j$, положив $\lambda = d/dt$ в лемме 2.2. Иногда нормализатор и для системы (1.1) более нагляден в записи $\Lambda_{q,q} = \sum\limits_{j=0}^{q} \widetilde{L}_j(\partial/\partial x)(\partial/\partial t)^j$, где $\widetilde{L}_j(\partial/\partial x)$ — матрицы с элементами в виде дифференциальных операторов по x.

Имеет место

Теорема 3.1. *Пусть в системе* (1.1) *матрица* $C = 0$. *Тогда для существования нормализатора системы* (1.1) *необходимо и достаточно регулярности пучка матриц* $\lambda A + B$. *Более того, в условиях теоремы оператор* L *является однородным*: $i + j = k$, k — *индекс пары* (A, B), *в формуле* (3.1) $H_j = 0$, $v = (\partial/\partial x)^k u$.

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\left[\sum_{j=0}^{k} L_j \frac{\partial^k}{\partial t^j \partial x^{k-j}}\right] \circ \left[A\frac{\partial}{\partial t} + B\frac{\partial}{\partial x}\right]u = \frac{\partial v}{\partial t} + L_0 B\frac{\partial v}{\partial x}$$

для любого $u \in C^{k+1}(U)$, где матрицы L_j являются коэффициентами многочлена из леммы 2.2. □

Если матрица $C \neq 0$, то ситуация значительно сложнее. Рассмотрим простейший нетривиальный случай.

Определение 3.2. Будем говорить, что ненулевой многочлен $\det(\lambda A + B)$ удовлетворяет критерию "ранг–степень", если $\operatorname{rank} A = \deg[\det(\lambda A + B)]$, где $\deg$ — символ степени многочлена.

Лемма 3.1 ([6]). *Пусть пучок матриц* $\lambda A + B$ *регулярен. Тогда индекс пары матриц* (A, B) *равен единице тогда и только тогда, когда многочлен* $\xi(\lambda) = \det(\lambda A + B)$ *удовлетворяет критерию "ранг–степень".*

Следовательно, согласно формуле (2.2) и лемме 3.1 найдутся неособенные матрицы P и Q со свойством

$$P(\lambda A + \mu B + C)Q = \lambda\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. *Нормализатор для системы* (1.1) *с пучком* $\lambda A + B$, *удовлетворяющим критерию "ранг–степень", существует тогда и только тогда, когда матрица* C_4 *в формуле* (3.2) *нильпотентна*: $C_4^m = 0$, *причем порядок нормализатора равен* m, $v = (\partial/\partial x)^m u$.

Доказательство. Достаточность. После умножения (1.1) на P и замены $u = Qy$, где P, Q — матрицы из леммы 3.1, система (1.1) распадется на два уравнения:

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + J\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_1 y_1 + C_2 y_2 = f_1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x} + C_3 y_1 + C_4 y_2 = f_2, \tag{3.3}$$

где $y = \binom{y_1}{y_2}$. Введем оператор $\Lambda_{m-1}(\partial/\partial x) = \sum\limits_{j=0}^{m-1}[(-\partial/\partial x)C_4]^j$. Тогда прямым вычислением показывается, что произведение

$$\begin{pmatrix} (\partial/\partial x)^m E_r & 0 \\ -\Lambda_{m-1}(\partial/\partial x)C_3 & (\partial/\partial t)E_{n-r} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \Lambda_{m-1}(\partial/\partial x) \end{pmatrix}$$

является нормализатором для системы (3.3), если ввести замену $w = (\partial/\partial x)^m y$.

Необходимость. Из второго уравнения (3.3) находим

$$y_2 = X(x)c(t) + \int_0^x X(x-s)[C_3 u_1(s,t) + f_2(s,t)]ds,$$

где $X(x) = e^{-C_4 x}$, $c(t)$ — произвольная вектор-функция. Подствляя y_2 в первое уравнение системы (3.2), получаем

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + J\frac{\partial y_1}{\partial x} + C_1 y_1 + \int_0^x C_2 X(x-s) C_3 u_1(s,t)ds = \widetilde{f}_2, \tag{3.4}$$

где $\widetilde{f}_2 = -C_2 X(x)c(t) + \int\limits_0^x C_2 X(x-s) f_2(s,t)ds$. Для ненильпотентной матрицы C_4 экспонента представляет бесконечный ряд $X(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} C_4^j (x-t)^j/j!$ и сравнением формул (3.1), (3.4) можно заключить, что нормализатор конечного порядка в этом случае не существует. □

Проблему построения нормализатора для системы (1.1) в условиях теоремы 3.2 можно решить, если отказаться от требования постоянства коэффициентов нормализатора. Выполнив замену переменных $y_1 = z_1$, $y_2 = X(x)z_2$, сведем систему (3.3) к системе

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial t} + \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} + \begin{pmatrix} C_1 & C_2 X(x) \\ X^{-1}(x)C_3 & 0 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

при этом элементы матрицы C становятся функциями, зависящими от переменной x. Линейный дифференциальный оператор первого порядка

$$\begin{pmatrix} (\partial/\partial x)E_r & 0 \\ -X^{-1}(x)C_3 & (\partial/\partial t)E_{n-r} \end{pmatrix}$$

приводит систему (3.5) к нормальной форме относительно вектор-функции $w = (\partial/\partial x)z$.

Эти рассуждения показывают, как обобщить этот результат на систему с переменными матричными коэффициентами

$$\Lambda_{1,1}u := A(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in U, \tag{3.6}$$

у которой многочлен $\det[\lambda A(x,t) + B(x,t)]$ удовлетворяет критерию "ранг–степень".

Теорема 3.3. *Пусть для системы* (3.6) *выполнены следующие условия*: 1) $A(x,t), B(x,t) \in C^2(U)$; 2) $\operatorname{rank} A(x,t) = \mathrm{const} = r \ \ \forall (x,t) \in U$; 3) *многочлен* $\det[\lambda A(x,t) + B(x,t)]$ *удовлетворяет критерию "ранг–степень" для любых* $(x,t) \in U$.

Тогда существуют оператор и замена с гладкими коэффициентами

$$\widetilde{\Lambda}_{1,1} = L_2(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + L_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + L_0(x,t), \quad u = R_1(x,t)\frac{\partial z}{\partial x} + R_0(x,t)z$$

такие, что

$$\widetilde{\Lambda}_{1,1}\circ\Lambda_{1,1}=\frac{\partial z}{\partial t}+B_1(x,t)\frac{\partial z}{\partial x}+H_0(x,t)z+\int_0^x H_1(x,s,t)z(s)ds.$$

Доказательство. Согласно [6] в условиях теоремы найдутся такие неособенные матрицы $P\equiv P(x,t)$ и $Q\equiv Q(x,t)$, что $P,Q\in C^2(U)$ и

$$P(\lambda A+B)Q=\lambda\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где J — некоторый $r\times r$-блок. Умножая систему (3.6) слева на матрицу P и выполняя замену переменной $u=Qy$, согласно (3.7) получим новую систему

$$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial t}+\begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial x}+\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}y=Pf, \tag{3.8}$$

где

$$\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}=P\Big(A\frac{\partial Q}{\partial t}+B\frac{\partial Q}{\partial x}+CQ\Big).$$

Произведем замену переменных $y_1=z_1$, $y_2=Yz_2$, где $Y\equiv Y(x,t)$,

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial x}=-C_4(x,t)Y(x,t),\quad Y(0,t)=E_{n-r}.$$

Тогда система (3.8) преобразуется в новую систему

$$\frac{\partial z_1}{\partial t}+J\frac{\partial z_1}{\partial x}+C_1z_1+\widetilde{C}_2z_2=f_1,\quad \frac{\partial z_2}{\partial x}+\widetilde{C}_3z_1=f_2, \tag{3.9}$$

где $\widetilde{C}_3=Y^{-1}C_3$, $\widetilde{C}_2=C_2Y$. Система (3.9) нормализуема линейным дифференциальным оператором первого порядка $\begin{pmatrix}(\partial/\partial x)E_r & 0\\ -\widetilde{C}_3 & (\partial/\partial t)E_{n-r}\end{pmatrix}$. $\square$

Замечание 3.2. Предлагаемые в работе методы применимы пока только при предположении $x\in\mathbf{R}^1$. Тем не менее можно для важных прикладных задач построить нормализаторы. Например, для линеаризованной системы Навье–Стокса [1]

$$\mathcal{L}(\partial/\partial t,\partial/\partial x)u=\begin{pmatrix}E_3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial t}+\begin{pmatrix}\lambda\Delta E_3 & \mathrm{grad}\\ \mathrm{div} & 0\end{pmatrix}u=f,$$

где $u\equiv u(x_1,x_2,x_3,t)$, $f\equiv f(x_1,x_2,x_3,t)$, Δ — оператор Лапласа, λ — некоторый параметр, первые три компоненты вектор-функции u имеют физический смысл скоростей, а четвертая — давления. Можно проверить, что

$$\begin{pmatrix}\Delta E_3 & 0\\ \lambda\,\mathrm{div}(\Delta E_3) & -\mathrm{div}(\partial/\partial t)^2\end{pmatrix}\circ\mathcal{L}\Big(\partial/\partial t,\partial/\partial x\Big)u=\frac{\partial v}{\partial t}+\begin{pmatrix}\lambda\Delta E_3 & \mathrm{grad}\\ \lambda^2\,\mathrm{div}(\Delta E_3) & \Delta\end{pmatrix}v,$$

где $v=\Delta u$, $\mathrm{div}(\Delta E_3)=((\partial/\partial x_1)\Delta,\ (\partial/\partial x_2)\Delta,\ (\partial/\partial x_3)\Delta)$. Как и в замечании 3.1, нормализатор можно представить в виде $\sum\limits_{j=0}^{2}\widetilde{L}_j(\partial/\partial x)(\partial/\partial t)^j$, где $\widetilde{L}_j(\partial/\partial x)$ — матрицы с элементами в виде дифференциальных операторов по x.

4. Вычисление коэффициентов нормализатора

Нормализацию систем можно использовать для построения устойчивых численных методов, а также для анализа разрешимости систем вида (1.1). Поэтому коснемся вопросов численного построения нормализаторов. Введем матрицу

$$\Gamma_j[A,B] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

размерности $n[j+1] \times n[j+1]$.

Определение 4.1. *Полуобратной* матрицей (обобщенной обратной матрицей) к произвольной $m \times n$-матрице A называется $n \times m$-матрица, обозначаемая здесь и всюду в дальнейшем как A^-, которая удовлетворяет уравнению $AA^-A = A$.

Частным случаем полуобратной матрицы является псевдообратная матрица A^+: $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $A^+A = (A^+A)^\top$, $AA^+ = (AA^+)^\top$ [7].

Замечание 4.1. К настоящему времени написано большое количество работ, посвященных различным аспектам теории и приложениям обобщенных обратных матриц. Хорошим введением в эту область является монография [4].

Лемма 4.1. *Пусть в системе* (1.1) *пучок матриц* $\lambda A + B$ *регулярен и индекс пары матриц* (A, B) *равен* k. *Тогда, начиная с некоторого* $j \geq k$, *справедливо равенство*

$$\Gamma_j^-[A,B]\Gamma_j[A,B] = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ Z_1 & Z_2 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где $\Gamma_i^-[A,B]$ *— матрица, полуобратная к* (4.1), Z_j, $j = 1, 2$, *— некоторые блоки подходящей размерности. В качестве коэффициентов нормализатора* $L_0, L_1, \dots, L_k$ *можно взять первые* n *строк матрицы* $\Gamma_j^-[A,B]$, *разбитых на* $n \times n$*-блоки.*

Доказательство. Так как пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен, то согласно лемме 2.2 существует указанный в лемме матричный многочлен с коэффициентами $L_0, L_1, \dots, L_k$. Рассмотрим алгебраическую систему

$$\Gamma_j[A,B]Z = 0. \tag{4.3}$$

Если умножить первое уравнение системы (4.3) на матрицу L_0, второе на L_1 и т. д. до $k+1$ уравнения, а затем сложить, то первая блочная строка преобразованной матрицы системы приобретет вид $(\,E_n\ 0\ \dots\ 0\,)$. Следовательно, первые n компонент вектора Z определяются из системы (4.3) однозначно и равны нулю. Согласно [4] общее решение системы (4.3) имеет вид $Z = (E_{n(j+1)} - \Gamma_j^-[A,B]\Gamma_j[A,B])V$, где V — произвольный постоянный вектор. Для того чтобы первые n компонент решения Z были равны нулю при любом векторе V, необходимо выполнение равенства (4.2). $\square$

Очевидно, что индексы пучка матриц и полуобратные матрицы неустойчивы по отношению к малым возмущениям входных данных. Наиболее действенным способом борьбы с этим осложнением является параметризация задачи.

Лемма 4.2. *Если справедливо неравенство* $\|A - \widetilde{A}\| \leq \varepsilon$, *то, начиная с некоторых* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\tau \leq \tau_0$, *справедлива оценка*

$$\|A^+ - \widetilde{G}(\tau)\| \leq \varkappa_0\tau + \frac{\varkappa_1\varepsilon}{\tau^2}, \tag{4.4}$$

где $\widetilde{G}(\tau) = (\tau E_n + \widetilde{A}^\top \widetilde{A})^{-1}\widetilde{A}^\top$, $\varkappa_0, \varkappa_1 = \mathrm{const} > 0$.

При возмущениях матрицы A, малых по сравнению с τ, формула (4.4) удовлетворительно аппроксимирует псевдообратную матрицу.

Перейдем к вычислению индекса пучка.

Лемма 4.3 ([6], с. 60). *Пусть пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен. Тогда*

$$\lim_{t\to 0} g(\tau)/g(\tau m) = m^k, \tag{4.5}$$

где k — индекс пары матриц (A, B), $g(\tau) = \|(A+\tau B)^{-1}\|$, m — целое положительное число.

Выбрав m и вычисляя при $\tau \to 0$ отношение, стоящее под знаком предела в формуле (4.5), до тех пор, пока не начнут существенно сказываться ошибки округления и входные возмущения, можно делать заключения о величине индекса пучка $\lambda A + B$.

В разделе 2 работы было показано, что весьма важную роль играют знаки корней характеристического многочлена $\det(\lambda A + B)$. Возникает вопрос о возможности построения нормализатора, сводящего исходную систему к гиперболической [8].

Теорема 4.1. *Пусть пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен и все корни полинома $\det(\lambda A + B)$ положительны.*

Тогда все корни полинома $\det(\lambda E_n + L_0 B)$ положительны, если нормализатор имеет вид

$$\Lambda_{k,k} = A_k^{-1}\left(E_n\frac{\partial}{\partial x} + P_{k-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\circ\cdots\circ\left(\frac{\partial}{\partial x}E_n + P_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\circ\left(E_n\frac{\partial}{\partial x} + P_0\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

где $A_0 = A$, $A_j = A_{j-1} + P_{j-1}B$, $P_{j-1} = E_n - A_{j-1}A_{j-1}^+$, $j = 1, 2, \dots, k$, A_{j-1}^+ — матрица, псевдообратная для A_{j-1}.

Доказательство теоремы k раз повторяет выкладки из работы [9].

5. О связи с теорией Демиденко–Успенского

В [1] рассматриваются системы следующего вида:

$$\mathcal{L}(\partial/\partial t, \partial/\partial x)u = A_0\frac{\partial u}{\partial t} + A_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x,t), \tag{5.1}$$

где $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $A_1(\partial/\partial x) = \left(\begin{smallmatrix} K_1(\partial/\partial x) & L(\partial/\partial x) \\ M(\partial/\partial x) & 0\end{smallmatrix}\right)$, K_0 — числовая $m \times m$-матрица, $\det K_0 \neq 0$, $K_1(\partial/\partial x)$, $L(\partial/\partial x)$, $M(\partial/\partial x)$ — матричные дифференциальные операторы по x с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей. В отличие от данной работы допускается, что $x \in \mathbf{R}^\nu$, $\nu \geq 1$. Выделяются два класса систем: а) системы соболевского типа, б) псевдопараболические системы. Вводится матрица $\mathcal{L}(\tau, i\xi)$, которую в [1] называют символом оператора $\mathcal{L}$, и указываются условия на элементы $l_{k,j}(\tau, i\xi)$ этой матрицы.

Определение 5.1 ([1]). Система дифференциальных уравнений вида (5.1) называется системой соболевского типа, если символ оператора системы $\mathcal{L}(\tau, i\xi)$ удовлетворяет условиям

1. существуют числа $s_1, \dots, s_n$ и $t_1, \dots, t_n$: $\max\limits_{1\le k\le n} s_k = 0$, $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $t_i \geq t_1$, $s_i \geq s_1$, $i = m+1, \dots, n$, такие, что для $k, j = 1, \dots, n$ имеем
$$l_{k,j}(\tau, i\xi) = 0 \ \text{ при } \ s_k + t_j < 0, \quad l_{k,j}(\tau, ci\xi) = c^{s_k+t_j}l_{k,j}(\tau, i\xi) \ \ (c>0) \ \text{ при } \ s_k + t_j \geq 0;$$
2. равенство $\det[M(i\xi)K_0^{-1}L(i\xi)] = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Матричное равенство $\mathcal{L}(\tau, ci\xi) = S(c)L(\tau, i\xi)T(c)$, где $S(c) = (\delta_i^j c^{s_i})$ и $T(c) = (\delta_i^j c^{t_j})$, δ_i^j — символ Кронекера, эквивалентно условию 1 определения 5.1.

Лемма 5.1. *Пусть для системы* (2.1) *выполнены условия* 1) *матрицы* A *и* B *имеют блочную структуру вида* $A = \left(\begin{smallmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & L \\ M & 0 \end{smallmatrix}\right)$; 2) $\det K_0 \neq 0$, $\det(MK_0^{-1}L) \neq 0$. *Тогда она является системой соболевского типа. Более того, в условиях леммы индекс пары матриц* (A, B) *равен двум.*

Доказательство. Очевидно, что второе условие леммы и второе условие определения 5.1 эквивалентны. Тогда прямым вычислением можно проверить, что

$$s_1 = \cdots = s_m = -1, \quad s_{m+1} = \cdots = s_n = 0, \quad t_1 = \cdots = t_m = 1, \quad t_{m+1} = \cdots = t_n = 2.$$

Осталось доказать, что индекс пары матриц (A, B) равен двум. Регулярный пучок матриц с блочной структурой $\left(\begin{smallmatrix} \lambda A_1 + B_1 \\ B_2 \end{smallmatrix}\right)$ обладает следующим свойством: индекс пары $\left(\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ B_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} B_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ на единицу меньше индекса исходной пары. Доказательство можно получить, используя каноническую структуру (2.2).

Пучку $\left(\begin{smallmatrix} \lambda K_0 & L \\ M & 0 \end{smallmatrix}\right)$ поставим в соответствие $\left(\begin{smallmatrix} \lambda K_0 & L \\ \lambda M & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Умножая первую строку на MK_0^{-1} и вычитая из второй строки пучка, преобразуем этот пучок к виду $\left(\begin{smallmatrix} \lambda K_0 & L \\ 0 & K_2 \end{smallmatrix}\right)$, где $K_2 = MK_0^{-1}L$, и поставим ему в соответствие пучок $\begin{pmatrix} \lambda K_0 & L \\ 0 & \lambda K_2 \end{pmatrix}$. В условиях леммы $\det K_2 \neq 0$ и, следовательно, индекс последнего пучка равен нулю, а индекс исходной пары (A, B) имеет индекс два. $\square$

Замечание 5.1. Применительно к системе (2.1) класс систем соболевского типа может быть расширен. К этому классу можно отнести системы, для которых индекс пары (A, B) равен двум и многочлен $\zeta(\lambda) = \det(\lambda A + B)$ имеет только один ненулевой коэффициент, т. е. $\zeta(\lambda) = a_d \lambda^d$. Тогда найдутся матрицы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$, сводящие систему (2.1) к системе из леммы 5.1.

Можно показать, что к системам соболевского типа относятся и системы вида (1.1), у которых

$$A = \begin{pmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & L \\ M & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(MK_0^{-1}L) \neq 0.$$

Определение 5.2 ([1]). Система дифференциальных уравнений вида (5.1) называется псевдопараболической, если символ $\mathcal{L}(\tau, i\xi)$ удовлетворяет условиям

1. выполнены равенства $s_1 = \cdots = s_m = 0$, $t_1 = \cdots = t_m = 1$ и найдутся числа $s_{m+1} = \cdots = s_n$, $t_{m+1} = \cdots = t_n$ такие, что $-1 \leq s_j \leq 0$, $t_j \geq 0$, $j = m+1, \ldots, n$, а также вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что для $k, j = 1, \ldots, n$, имеем
$$l_{kj}(\tau, i\xi) = 0 \ \text{ при } \ s_k + t_j < 0, \quad l_{kj}(c\tau, c^{\alpha} i\xi) = c^{s_k + t_j} l_{kj}(\tau, i\xi), \quad c > 0, \ \text{ при } \ s_k + t_j \geq 0,$$
а отношения t_j / α_i являются натуральными числами;
2. $\det R(\tau, i\xi) \neq 0$, $R(\tau, i\xi) = \tau K_0 + K_1(i\xi)$, $\operatorname{Re} \tau \geq 0$, $\xi \in \mathbf{R}^{\nu}$, $|\tau| + |\xi| \neq 0$, при этом если $\det[M(i\xi) R^{-1}(\tau, i\xi) L(i\xi)] = 0$, то $\xi \in \mathbf{R}^{\nu}$, $\xi = 0$.

Сформулируем без доказательства аналог леммы 5.1.

Лемма 5.2. *Пусть для системы* (2.1) *выполнены следующие условия*: 1) *матрицы* A *и* B *имеют блочную структуру вида* $A = \left(\begin{smallmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} K_1 & L \\ M & 0 \end{smallmatrix}\right)$; 2) $\det R(\tau, i\xi) \neq 0$, $\operatorname{Re} \tau \geq 0$, $\xi \in \mathbf{R}^{\nu}$, *при* $|\tau| + |\xi| \neq 0$ *выполняется* $\det[MR^{-1}(\tau, i\xi)L] \neq 0$. *Тогда она принадлежит классу псевдопараболических систем. Более того, индекс пары матриц* (A, B) *в условиях леммы равен двум.*

Символ $\mathcal{L}(\tau, i\xi)$ оператора $\mathcal{L}(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ получают применением преобразования Фурье к системе (5.1), поэтому имеет смысл рассмотреть применение преобразования Фурье к системе (1.1).

Определение 5.3 ([8]). Прямым и обратным преобразованиями Фурье для функции $f(x, t)$ по переменной x называются соответственно выражения

$$\widetilde{f}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{ix\xi} dx, \quad f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\xi, t) e^{-ix\xi} d\xi.$$

Для существования преобразования Фурье достаточно, чтобы 1) функция $f(x,t)$ имела конечное число экстремумов; 2) она была непрерывна всюду, кроме, быть может, конечного числа точек разрыва I рода; 3) интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx$ должен сходиться абсолютно.

Предположим, что вектор-функция f обладает достаточной гладкостью и $x, t \in U = [0, t_0] \times [0, x_0]$.

Применив к системе (1.1) преобразование Фурье по переменной x, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + [i\xi B + C]\widetilde{u} = \widetilde{f}, \tag{5.2}$$

где $\widetilde{u}(\xi,t)$, $\widetilde{f}(\xi,t)$ — образы Фурье по x функций $u(x,t)$ и $f(x,t)$ соответственно.

Для системы (5.2) можно выписать общее решение [4]. Особую сложность вносит тот факт, что при некоторых значениях ξ пучок $\lambda A + [i\xi B + C]$ может терять регулярность и тогда найдутся сколь угодно гладкие вектор-функции $\widetilde{f}$, при которых система несовместна. Предполагая, что пучок матриц регулярен при любом ξ, выпишем общее решение, зависящее от параметра ξ при любой $\widetilde{f} \in C^n$, но это требование весьма ограничительно. Укажем очевидный случай: существуют невырожденные матрицы $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ со свойством $\widetilde{P}(\xi B + C)\widetilde{Q} = \det(\xi M + E_n) = 1$, где $M^m = 0$. Иначе говоря, нужно, чтобы матрица M была нильпотентна. Тогда определитель $\det(\xi B + C)$ не зависит от ξ, т. к. $\det(\xi M + E_n) = 1 \ \ \forall\xi$.

Ввиду больших и пока непреодоленных трудностей анализа общей системы (5.2) исследуем ее при следующих предположениях: 1) $C = 0$; 2) пучок матриц $\lambda A + B$ регулярен; многочлен $\det(\lambda A + B)$ имеет d простых вещественных корней. Тогда согласно лемме 2.1 существуют такие матрицы P, Q, что после умножения на матрицу P и замены $\widetilde{u}(\xi,t) = Q\widetilde{z}(\xi,t)$ система (5.2) распадается на регулярную и сингулярную части

$$\frac{\partial \widetilde{z}_1(\xi,t)}{\partial t} + i\xi J\widetilde{z}_1(\xi,t) = \widetilde{f}_1(\xi,t), \quad N\frac{\partial \widetilde{z}_2(\xi,t)}{\partial t} + i\xi\widetilde{z}_2(\xi,t) = \widetilde{f}_2(\xi,t), \tag{5.3}$$

где $Q\widetilde{z} = \left(\begin{smallmatrix}\widetilde{z}_1\\ \widetilde{z}_2\end{smallmatrix}\right)$, $P\widetilde{f} = \left(\begin{smallmatrix}P_1\\ P_2\end{smallmatrix}\right)\widetilde{f} = \left(\begin{smallmatrix}\widetilde{f}_1\\ \widetilde{f}_2\end{smallmatrix}\right)$, $N^k = 0$, $J = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d\}$.

Общее решение первой системы (5.3) можно записать в стандартной форме. Разделив второе уравнение (5.3) на $i\xi$ и положив в формуле (2.3) $\lambda = i\xi(\partial/\partial t)$, имеем

$$\widetilde{z}_1(\xi,t) = e^{-Jt}c(\xi) + \int_0^t e^{-J(t-s)}\widetilde{f}_1(\xi,s)ds, \quad \widetilde{z}_2(\xi,t) = \sum_{j=0}^{k-1}(-N)^j\frac{1}{(i\xi)^{j+1}}\frac{\partial^j \widetilde{f}_2(\xi,t)}{\partial t^j},$$

где $c(\xi) = (c_1(\xi), c_2(\xi), \ldots, c_d(\xi))^\top$ — произвольные функции, матричная экспонента $e^{-Jt} = \mathrm{diag}\{e^{-i\xi\lambda_1 t}, \ e^{-i\xi\lambda_2 t}, \ldots, e^{-i\xi\lambda_d t}\}$. Применив к первому из соотношений (5.3) обратное преобразование Фурье, получим

$$z_1(x,t) = \mathcal{C}(x - \lambda t) + \int_0^t \mathcal{F}(x - \lambda(t-s), s)ds, \tag{5.4}$$

где

$$\mathcal{C}(x - \lambda t) = (\overline{c_1}(x - \lambda_1 t), \overline{c_2}(x - \lambda_2 t), \ldots, \overline{c_d}(x - \lambda_2 t))^\top, \quad \mathcal{F}(x,t) = P_1 f(x,t),$$
$$\mathcal{F}(x - \lambda(t-s), s) = (\phi_1(x - \lambda_1(t-s), s), \phi_2(x - \lambda_2(t-s), s), \ldots, \phi_d(x - \lambda_d(t-s), s))^\top.$$

Для второго равенства (5.3) применим следующий прием. Умножим его на $(i\xi)^k$ и к полученному соотношению применим обратное преобразование Фурье. В результате имеем

$$\frac{\partial^k z_2(x,t)}{\partial x^k} = \sum_{j=0}^{k-1}(-N)^j P_2\frac{\partial^{k-1} f(x,t)}{\partial t^j \partial x^{k-1-j}}.$$

Из последнего уравнения находим

$$z_2(x,t) = \sum_{j=0}^{k-1} (-N)^j \Big[c_0^{(j)}(t) x^j / j! + \int_0^x (x-s)^j P_2 \frac{\partial^j f(s,t)}{\partial t^j} ds \Big], \tag{5.5}$$

где $c_0(t)$ — произвольная $(k-1)$ раз дифференцируемая функция.

Таким образом, решение исходной системы при наших предположениях будет иметь вид $u(x,t) = Q \left(\begin{smallmatrix} z_1(x,t) \\ z_2(x,t) \end{smallmatrix} \right)$, где вектор-функции $z_1(x,t)$, $z_2(x,t)$ описываются формулами (5.4), (5.5).

Литература

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. *Уравнения и системы, неразрешенные относительно старшей производной.* – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 436 с.
2. Campbell S.L., Marzalek W. *The index of infinite dimensional implicit system* // Math. comput. model. system. – 1999. – V. 5. – № 1. – P. 18–42.
3. Таиров Э.А., Запов В.В. *Интегральная модель нелинейной динамики парогенерирующего канала на основе аналитических решений* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов. – 1991. – Вып. 3. – С. 14–20.
4. Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные системы. Методы численного решения и исследования.* – Новосибирск: Наука, 1998. – 224 с.
5. Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М. *Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Вопр. прикл. матем. – Иркутск, 1975. – С. 140–152.
6. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.
7. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 576 с.
8. Годунов С.К. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971. – 416 с.
9. Булатов М.В. *О преобразовании алгебро-дифференциальных систем уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 3. – С. 360–372.

Институт динамики систем
и теории управления Сибирского
отделения Российской академии наук

Поступила
19.11.2002