И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.632.4

С.П. КОПЫСОВ, Ю.А. САГДЕЕВА

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ОСРЕДНЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПОЛУЧЕНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Введение

Рассматривается задача численного осреднения эллиптического дифференциального уравнения вида

$$-\nabla^T(K(x,y)\nabla u)+Q=0, \quad x,y\in[0,1], \tag{1}$$

с быстро осциллирующим коэффициентом $K(x,y)$. Непосредственное численное решение уравнений вида (1) (напр., методом конечных разностей или методом конечных элементов) требует значительных вычислительных затрат, поскольку предполагает использование расчетной сетки очень малого шага.

Наиболее известным среди методов численного осреднения является асимптотический метод осреднения периодических сред, предложенный Н.С. Бахваловым [1]. В этом методе выводятся соотношения, связывающие два масштаба — микро и макро, для краевой задачи вида $L_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon$, где ε — малый параметр такой, что $u_\varepsilon \to \overline{u}$ при $\varepsilon \to 0$, $\overline{u}$ — осредненное решение. Задача осреднения заключается в том, чтобы найти такие $\overline{L}$ и $\overline{f}$, чтобы $\overline{u}$ удовлетворяло дифференциальному уравнению $\overline{L}\overline{u}=\overline{f}$.

В данной работе предлагается метод осреднения, основанный на многомасштабном анализе с вейвлет проекцией и аппроксимацией дискретного оператора.

1. Вейвлет-осреднение на основе метода конечных элементов

В одномерном случае вейвлетами и масштабирующими функциями называются функции, образующие базис пространства $L_2(\mathbb{R})$ и получаемые сдвигом и сжатием одной функции $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^jx-k)$, $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k)$, $j,k\in\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — пространство целых чисел, ψ и ϕ — соответственно вейвлет и масштабирующая функция одномерного базиса Хаара:

$$\psi(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,1/2);\\ -1, & x\in[1/2,1], \end{cases} \qquad \phi(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,1];\\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-96069-р_урал_а) и гранта молодых ученых Уральского отделения Российской академии наук.

Двумерный вейвлет-базис образуется за счет функций одномерного базиса. Рассмотрим пространство $L_2([0,1]\times[0,1])$. Введем последовательность вложенных пространств

$$\mathcal{V}_j = \mathrm{span}\{\phi_{j,k_1}\otimes\phi_{j,k_2},\ k_i\in\mathbb{Z}\},$$
$$\mathcal{W}_j = \mathrm{span}\{\psi_{j,k_3}\otimes\phi_{j,k_4}, \phi_{j,k_5}\otimes\psi_{j,k_6}, \psi_{j,k_7}\otimes\psi_{j,k_8},\ k_i\in\mathbb{Z}\},$$

где символ $\otimes$ означает операцию тензорного произведения функций одномерного базиса Хаара $\psi_{j,k_i}\otimes\psi_{j,k_l}(x,y)=\psi_{j,k_i}(x)\psi_{j,k_l}(y)$.

В двумерном случае вейвлет-преобразование формируется из четырех операторов проекций (более подробно о двумерном вейвлет-преобразовании см. [2]):

$$\mathcal{W}_j = \begin{pmatrix}\mathcal{P}\\ \mathcal{Q}_1\\ \mathcal{Q}_2\\ \mathcal{Q}_3\end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned}\mathcal{P} &: V_j\otimes V_j \longrightarrow V_{j-1}\otimes V_{j-1},\\ \mathcal{Q}_1 &: V_j\otimes V_j \longrightarrow V_{j-1}\otimes W_{j-1},\\ \mathcal{Q}_2 &: V_j\otimes V_j \longrightarrow W_{j-1}\otimes V_{j-1},\\ \mathcal{Q}_3 &: V_j\otimes V_j \longrightarrow W_{j-1}\otimes W_{j-1}.\end{aligned}$$

Операторы $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ состоят из двух блоков — один действующий по координате x, второй по координате y: $\mathcal{P}=P_xP_y$, $\mathcal{Q}_1=P_xQ_y$, $\mathcal{Q}_2=Q_xP_y$, $\mathcal{Q}_3=Q_xQ_y$.

Пространство $\mathcal{V}_j$ отвечает за осредненные величины, пространство $\mathcal{W}_j$ содержит информацию о взаимосвязи двух направлений и уточняющую информацию. Преобразование $\mathcal{W}_j$ является ортогональным.

Дискретизируем уравнение (1) методом конечных элементов (МКЭ) на сетке с линейными базисными функциями и треугольными конечными элементами. Предполагается, что заданы краевые условия Дирихле или Неймана. В результате применения МКЭ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au=b,\quad A=(a_{ik}),\quad b=(b_i),\quad u=(u_i),\quad i,k=1\ldots 2^j, \tag{2}$$

где матрица A симметрична и положительно определена.

Применим преобразование $\mathcal{W}_j$ к системе (2), получим (индексы j и $j-1$ опущены)

$$\mathcal{W}A\mathcal{W}^T\mathcal{W}u=\mathcal{W}b,$$
$$\begin{pmatrix}\mathcal{P}\\ \mathcal{Q}_1\\ \mathcal{Q}_2\\ \mathcal{Q}_3\end{pmatrix} A(\mathcal{P}^T\mathcal{Q}_1^T\mathcal{Q}_2^T\mathcal{Q}_3^T)\begin{pmatrix}u^c\\ u_1^d\\ u_2^d\\ u_3^d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^c\\ b_1^d\\ b_2^d\\ b_3^d\end{pmatrix}.$$

Вводя обозначения

$$M_{11}=\begin{pmatrix}\mathcal{Q}_1A\mathcal{Q}_1^T & \mathcal{Q}_1A\mathcal{Q}_2^T & \mathcal{Q}_1A\mathcal{Q}_3^T\\ \mathcal{Q}_2A\mathcal{Q}_1^T & \mathcal{Q}_2A\mathcal{Q}_2^T & \mathcal{Q}_2A\mathcal{Q}_3^T\\ \mathcal{Q}_3A\mathcal{Q}_1^T & \mathcal{Q}_3A\mathcal{Q}_2^T & \mathcal{Q}_3A\mathcal{Q}_3^T\end{pmatrix},\quad M_{12}=\begin{pmatrix}\mathcal{Q}_1A\mathcal{P}^T\\ \mathcal{Q}_2A\mathcal{P}^T\\ \mathcal{Q}_3A\mathcal{P}^T\end{pmatrix},\quad u_1=\begin{pmatrix}u_1^d\\ u_2^d\\ u_3^d\end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix}b_1^d\\ b_2^d\\ b_3^d\end{pmatrix},$$

$u_2=u^c$, $b_2=b^c$ и с учетом того, что $M_{21}=M_{12}^T$, перепишем систему в виде

$$\begin{pmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}.$$

Порядок полученной системы совпадает с порядком исходной системы. Выразив u_1 из первого уравнения и подставив его во второе, получим систему

$$Su_2=b, \tag{3}$$

где S — дополнение Шура: $S=M_{22}-M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$, $b=b_2-M_{21}M_{11}^{-1}b_1$. Разрешив соотношение (3), получаем решение u_2. Вектор u_2 и будет искомым осредненным решением уравнения (1) на более грубой (по сравнению с начальной) конечно-элементной сетке.

Данный подход близок к процедуре исключения неизвестных в блочном методе Гаусса. Отличие состоит в том, что процедура вейвлет-преобразования требует изменения базиса, которое выполняется каждый раз перед шагом редукции. Таким образом, неизвестные в приведенной системе не являются простым подмножеством неизвестных исходной системы. Матрица S системы (3) получается из конечно-элементной матрицы жесткости и описывает осредненные свойства материала, но непосредственно использовать эту матрицу в качестве грубого оператора на сетке не удается. Алгоритм вейвлет-осреднения, примененный к системе (2), позволяет получить осредненные поля решения дифференциального уравнения (1).

Для повышения эффективности вейвлет-осреднения следует учитывать такие свойства матриц, возникающих в процессе преобразования, как разреженность и убывание элементов матриц по мере удаления от главной диагонали [2].

2. Вычисление эффективных характеристик

Для вычисления эффективного коэффициента используем осредненное решение системы (3) по следующему алгоритму. Опишем его на примере определения коэффициента проницаемости материала. Эффективный коэффициент проницаемости в условиях выполнения закона Дарси определяется на основе вейвлет-осреднения и решения методом конечных элементов двумерной задачи фильтрации жидкости, описываемой уравнением

$$-\nabla^T(K(x,y)\nabla p) + Q = 0, \tag{4}$$

в насыщенной пористой неоднородной среде со следующими граничными условиями: на одной границе области задано условие равенства нулю давления $p|_{x=0} = 0$, на противоположной границе задана компонента x вектора скорости фильтрации $K(x,y)\frac{\partial p}{\partial x}\big|_{x=1} = v_0$, на оставшейся границе задано условие непроницаемости границы (поток через границу равен нулю) $\frac{\partial p}{\partial y}\big|_{y=0,y=1} = 0$.

Обозначим через p_{ij}^w осредненное с помощью вейвлет-преобразования поле давления в узле сетки (x_i, y_j). Эффективный коэффициент проницаемости рассчитывался как среднее значение по всем узлам (N — число узлов)

$$K_x^w = \frac{1}{N}\sum_i\sum_j K_x^{ij}, \quad K_x^{ij} = -\frac{v_0 x_i}{p_{ij}^w}.$$

Рассмотрим пример осреднения тензора проницаемости в двумерной задаче фильтрации (4) для *случайного* начального распределения проницаемости. Пусть тензор проницаемости имеет вид $K(x) = d(x)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, где величина $d(x)$ имеет следующий закон распределения: $d = z^{-\ln(a)}$, z — случайно распределенная величина на интервале $(0,1)$ и величина $d(x)$ предполагается кусочно-постоянной на конечном элементе. Для распределения такого вида известно [3], что значение эффективного коэффициента проницаемости определяется как геометрическое среднее значений распределения. Сравнение эффективного коэффициента проницаемости для случайного распределения и результаты моделирования для значений $a = 2$, $a = 5$ и $a = 10$ на сетке 128×128 узлов приведены в таблице.

Таблица

a	$K_{\max}$	$K_{\min}$	σ	K^a	K^h	K^g	K^w
2	255.87	1.00	4.45	2.57	1.6	2	2.07
5	$6.06e+6$	1.00	67936.3	992.47	2.59	4.95	5.13
10	$2.5e+10$	1.00	$2.01e+8$	$2.21e+6$	3.29	9.86	9.5

В первом–третьем столбцах даны статистические данные о начальном распределении проницаемости — максимальное значение $K_{\max}$, минимальное значение $K_{\min}$, среднеквадратическое отклонение σ. В четвертом–седьмом столбцах показаны соответственно арифметическое среднее K^a, гармоническое среднее K^h, геометрическое среднее K^g и значение K^w, полученное с помощью вейвлет-осреднения.

Очевидно, результаты моделирования близки к геометрическим средним — относительная погрешность $\frac{|K^g - K^w|}{K^g}$ равна 3.5%, 3.6%, 3.7% для разных a. Арифметическое и гармоническое средние дают настолько широкий интервал оценок, что их использование не имеет смысла. Заметим, что известные аналитические оценки Хашина–Штрикмана [4] для эффективных свойств материала, а также асимптотический метод осреднения [1] не применимы в данном случае. Другие примеры использования вейвлет-преобразования можно найти в [5].

В работе проведено построение и исследование метода осреднения, основанного на многомасштабном анализе с вейвлет-проекцией и аппроксимацией дифференциального оператора. Показано, что вейвлет-преобразование создает перспективное средство исследования и решения уравнений, описывающих процессы в широком диапазоне масштабов и позволяют работать с информацией (сглаживание, осреднение) без потери значимых элементов. Вейвлет-осреднение также может быть использовано при вычислении эффективных характеристик композиционных материалов (осреднение упругих модулей композиционной среды, тепловых и фильтрационных характеристик).

Литература

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Копысов С.П., Сагдеева Ю.А. *Вычислительные особенности двумерного вейвлет-осреднения в задачах многомасштабного анализа* // Вычислит. методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 1–8.
3. Козлов С.М. *Осреднение случайных операторов* // Матем. сб. – 1979. – Т. 109. – С. 188–202.
4. Hashin Z., Shtrikman S. *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials* // J. of the mechanics and physics of solids. – 1963. – V. 11. – P. 127–140.
5. Копысов С.П., Сагдеева Ю.А. *Численное осреднение свойств композитов* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2006. – Т. 33. – С. 186–197.

Институт прикладной механики
Уральского отделения
Российской академии наук

Поступила
20.04.2007