Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2015, № 9, с. 31–45 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

С.Е. САМОХВАЛОВ, Е.Б. БАЛАКИРЕВА

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ СОГЛАСОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ ДЛИНЫ И РАВЕНСТВА В ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. В работе показано, что каноническая деформированная группа диффеоморфизмов с заданным масштабом длины описывает движение единичных масштабов в римановом пространстве, позволяя измерять длины произвольных кривых, чем и реализуется принцип длины, закладываемый в основание геометрии Б. Риманом. Дан способ однозначного расширения данной группы до группы, включающей в себя калибровочные вращения векторов — группы параллельных переносов, преобразования которой оставляют длины векторов и углы между ними неизменными, чем для римановых пространств реализуется эрлангенская программа Ф. Клейна — принцип равенства.

Ключевые слова: риман-клейновский антагонизм, группа движений касательного расслоения риманова пространства, каноническая деформированная группа диффеоморфизмов.

УДК: 515.174

Введение

Создание геометрии Лобачевского, а также труды Гаусса по теории поверхностей, послужили толчком к бурному развитию геометрических теорий в XIX веке, что привело к появлению работ Б. Римана [1] и Ф. Клейна [2]. Эти работы закладывали разные принципы в основание геометрии — *принцип длины*, требующий возможности измерения длин произвольных линий вне зависимости от их положения, и *принцип равенства*, устанавливаемого посредством наложения фигур с помощью группы преобразований пространства — главной группы рассматриваемой геометрии (по терминологии Клейна). Между этими принципами, по выражению Э. Картана ([3], с. 488), имеет место *антагонизм* вследствие отсутствия какой-либо однородности в произвольно искривленном римановом пространстве.

Ранее были сделаны попытки преодоления этого антагонизма путем отказа от групповой структуры используемых преобразований. Самим Э. Картаном предлагалось искривленное пространство рассматривать как *неголономное пространство* с той же главной (фундаментальной по терминологии Картана) группой, что и соответствующее плоское пространство ([3], с. 491). Р. Зуланке и П. Винтген [4] привлекли для описания искривленных пространств *теорию категорий*, а Л.В. Сабинин [5] — *квазигруппы*, выдвинув тезис о том, что именно неассоциативность является алгебраическим эквивалентом геометрического понятия кривизны.

Поступила 10.09.2013

По материалам доклада на международной конференции “Геометрия в Одессе-2013”.

В дальнейшем было выяснено, что введенные из физических соображений так называемые деформированные обобщенные калибровочные группы [6] способны описывать геометрические структуры переменной кривизны [7], в частности, пространства аффинной связности [8] и римановы пространства [9], причем двумя разными способами.

В первом случае трансляционные генераторы группы совпадают с ковариантными производными в искривленном пространстве аффинной связности. Кривизна пространства и его кручение определяются структурными функциями группы, которые являются антисимметричной частью коэффициентов во втором порядке разложения закона умножения группы по параметрам [8].

Во втором случае для пространств аффинной связности без кручения, в частности, римановых пространств, стало возможным использовать более узкую группу, а именно, деформированную группу диффеоморфизмов. Действуя на многообразии, она своим законом умножения генерирует также и определенное действие в его касательном расслоении, задавая тем самым правило параллельного переноса векторов. Но в этом случае для описания тензора кривизны пространства необходимо знать уже третий порядок разложения закона умножения группы по параметрам ([9], с. 1242).

В данной работе предложен способ согласования и объединения этих двух различных подходов к теоретико-групповому описанию римановых пространств, обеспечивающий преодоление риман-клейновского антагонизма.

При этом снята имевшая место в прежних работах [8], [9] неопределенность относительно конечных переносов векторов, задаваемых в искривленных пространствах действием деформированных обобщенных калибровочных групп. Это достигнуто путем обобщения для них понятия каноничности групп Ли, что обеспечило однозначность соответствия группы геометрической структуре, задаваемой ею. Даны критерии каноничности рассматриваемых обобщенных калибровочных групп.

Показано, что каноническая деформированная группа диффеоморфизмов с заданным масштабом длины — группа римановых трансляций RT, дает возможность измерения длин геодезических путем перемещения (трансляции) единичного масштаба вдоль самого себя, реализуя тем самым *принцип длины* (подход Римана). Более того, группа RT содержит в себе все характеристики риманова пространства, в частности, *кривизну*, как *характеристику девиации геодезических*, и задает своим действием на многообразии *риманову структуру* (через задание геометрических объектов римановой геометрии — векторов и ортонормированного реперного поля, а следовательно, и метрики). Впрочем, группа RT не сохраняет инвариантов на множестве, а потому не может рассматриваться как главная группа риманова пространства.

Однако, как показано в данной работе, одна и та же риманова структура на многообразии (метрика) может быть задана разными группами RT, которые связаны между собой нелокальными автоморфизмами специального вида. Совокупность последних образует группу, которая в случае требования ее каноничности является группой DP параллельных переносов векторов в римановом пространстве. Группа DP, действуя в касательном расслоении многообразия, сохраняет длины векторов и углы между ними. Таким образом, группа параллельных переносов DP может рассматриваться как *главная группа риманова пространства*, поскольку не меняет его характеристики и позволяет устанавливать *равенство* (конгруэнтность) векторов и их взаимного расположения, даже если они заданы в разных точках (подход Клейна). Тут *кривизна выступает как характеристика некоммутативности ковариантных производных* — трансляционных генераторов группы DP (или доворота вектора при его обносе по замкнутому контуру). Действуя в расслоении ортонормированных реперов на многообразии (главном расслоении), группа DP описывает их движение, воссоздавая *метод подвижного репера* Э. Картана ([10], с. 5), хотя структурное уравнение риманова пространства при этом не постулируется, как у Картана, а является следствием и условием существования группы DP.

Группа параллельных переносов DP, реализующая для риманова пространства принцип равенства, имеет в качестве подгруппы группу римановых трансляций RT, которая реализует принцип длины, и поэтому объединяет в себе оба подхода, закладываемые в основание геометрии Б. Риманом и Ф. Клейном, *преодолевая, тем самым, риман-клейновский антагонизм.*

В работе не рассматриваются *глобально-топологические* вопросы и все соотношения получены в пределах одной координатной области многообразия, хотя и используется более свойственный современной геометрии бескоординатный подход. Кроме того, под группами понимаем соответствующие локальные группы, а некоторые термины и обозначения, относящиеся к группам Ли, заимствованы из [11].

1. Деформированная калибровочная группа трансляций

Калибровочная группа трансляций T^g_X аффинного пространства $(X, \widetilde{T})$, элементами которой являются гладко зависящие от $x \in X$ вектор-функции $\widetilde{t}_x$ со значениями в векторном пространстве $\widetilde{T}$, удовлетворяющие условию $|1 + \partial_x \widetilde{t}_x| \neq 0$, где $\partial_x := \partial/\partial x$, обладает законом умножения

$$(\widetilde{t} \times \widetilde{t}')_x = \widetilde{t}_x + \widetilde{t}'_{x'}, \quad x' = x + \widetilde{t}_x, \quad \widetilde{t}_x, \widetilde{t}'_{x'} \in T^g_X. \tag{1}$$

Таким образом, группа T^g_X является группой диффеоморфизмов пространства X в аддитивной параметризации с параметрами $\widetilde{t}_x$.

Видим, что закон умножения в группе T^g_X дает правило сложения векторов, заданных в разных точках, что является характерной особенностью обобщенных калибровочных групп, которая и проявляется в их важной роли при описании геометрических структур, в которых имеет место параллельный перенос.

Подмножество элементов группы T^g_X, которое параметризуется не зависящими от x векторами, очевидно, образует группу $\widetilde{T}$.

Деформированная калибровочная группа трансляций T^{gH}_X (деформированная группа диффеоморфизмов) по определению изоморфна группе T^g_X и параметризуется вектор-функциями $t_x = H_x(\widetilde{t}_x)$, принимающими значения в векторном пространстве T, изоморфном $\widetilde{T}$, где $H_x : \widetilde{T} \to T$ — гладко зависящее от x обратимое $\forall x \in X$ *отображение деформации*, $K_x := H_x^{-1}$. Отображение H_x в общем случае нелинейно и поэтому не является изоморфизмом векторных пространств $\widetilde{T}$ и T.

Закон умножения и действие группы T^{gH}_X на X определяется ее изоморфизмом группе T^g_X ([9], с. 1240):

$$\begin{aligned} (t \times t')_x = \varphi_x(t_x, t'_{x'}) := H_x(K_x(t_x) + K_{x'}(t'_{x'})), \\ x' = f_x(t_x) := x + K_x(t_x). \end{aligned} \tag{2}$$

Закон ассоциативности умножения и композиционный закон действия группы T^{gH}_X на X выражаются следующими уравнениями для отображений φ_x и f_x:

$$\varphi_x(\varphi_x(t, t'), t'') = \varphi_x(t, \varphi_{x'}(t', t'')), \quad f_{x'}(t') = f_x(\varphi_x(t, t')), \tag{3}$$

которые выполняются вследствие деформационного способа построения группы T_X^{gH} и решением которых есть равенства (2) с произвольным отображением деформации H_x и постоянными параметрами. Подмножество элементов деформированной группы диффеоморфизмов T_x^{gH}, параметризующееся не зависящими от x векторами, для произвольной деформации, в отличие от недеформированного случая, не замкнуто относительно операции умножения, а поэтому уже не образует группу.

Следствием уравнений (3) являются уравнения, обобщающие для группы T_X^{gH} *уравнения Ли* теории групп Ли:

$$\mu_x(t) \cdot \partial\varphi_x(t,t') = \mu_x(\varphi_x(t,t')) + e_x\varphi_x(t,t'), \tag{4}$$

$$\lambda_{x'}(t') \cdot \partial'\varphi_x(t,t') = \lambda_x(\varphi_x(t,t')), \tag{5}$$

$$\mu_x(t) \cdot \partial f_x(t) = e_x f_x(t), \quad \lambda_x(t) \cdot \partial f_x(t) = k_{x'}, \tag{6}$$

где $\mu_x(t') := \partial\varphi_x(0,t')$, $\lambda_x(t) := \partial'\varphi_x(t,0)$ — *вспомогательные отображения*, $e_x := k_x \cdot \partial_x$ — *генераторы* действия группы T_X^{gH} на X, $k_x := \partial K_x(0)$ — *коэффициенты деформации* (здесь принято $\partial := \partial/\partial t$, $\partial' := \partial/\partial t'$).

Условием интегрируемости уравнений (4)–(6) являются уравнения, обобщающие для группы T_X^{gH} *уравнения Маурера–Картана* теории групп Ли:

$$e_x\mu_x(t)\langle l,l'\rangle + \partial\mu_x(t)\langle\mu_x(t)\langle l'\rangle, l\rangle - (l \leftrightarrow l') = \mu_x(t)\langle C_x\langle l,l'\rangle\rangle, \tag{7}$$

$$\partial\lambda_x(t)\langle\lambda_x(t)\langle l\rangle, l'\rangle - (l \leftrightarrow l') = \lambda_x(t)\langle C_{x'}\langle l,l'\rangle\rangle, \tag{8}$$

$$e_x k_x\langle l,l'\rangle - (l \leftrightarrow l') = k_x\langle C_x\langle l,l'\rangle\rangle, \tag{9}$$

где $l, l' \in T$ и

$$C_x\langle l,l'\rangle := \gamma_x\langle l,l'\rangle - (l \leftrightarrow l') \tag{10}$$

— явно зависящий от x (в отличии от случая конечномерных групп Ли) *структурный оператор* группы T_X^{gH}, который является антисимметричной частью отображения $\gamma_x := \partial\partial'\varphi_x(0,0)$, задающего второй порядок ее закона умножения и явно зависящего от x вследствие явной зависимости от x отображения φ_x группы T_X^{gH}.

Условием интегрируемости уравнений (7)–(9) является *соотношение Якоби* для структурного оператора, которое в нашем случае принимает вид

$$e_x C_x\langle l,l',l''\rangle + C_x\langle l, C_x\langle l',l''\rangle\rangle + \mathrm{cycl}(l,l',l'') = 0. \tag{11}$$

Дифференцирование уравнения (7) по t в нуле позволяет выявить важное соотношение

$$e_x\gamma_x\langle l,l',t\rangle + \gamma_x\langle l,\gamma_x\langle l',t\rangle\rangle - (l \leftrightarrow l') = R_x\langle t,l,l'\rangle + \gamma_x\langle C_x\langle l,l'\rangle, t\rangle \tag{12}$$

для антисимметричной части

$$R_x\langle t,l',l\rangle := \rho_x\langle l,l',t\rangle - (l \leftrightarrow l') \tag{13}$$

отображения $\rho_x := \partial\partial'^2\varphi_x(0,0)$, частично определяющего третий порядок закона умножения группы T_X^{gH}. Отображение R_x будем называть *оператором кривизны* группы T_X^{gH}.

Из определения (13) и симметричности отображения ρ_x по последним двум аргументам следует циклическое тождество

$$R_x\langle l,l',l''\rangle + \mathrm{cycl}(l,l',l'') = 0, \tag{14}$$

которое вследствие уравнения (12) сводится к соотношению Якоби (11).

С геометрической точки зрения генераторы e_x группы T_X^{gH} задают на X *поле аффинных реперов*, а ее структурный оператор C_x вследствие уравнения (9) является его *объектом неголономности.*

Закон умножения группы T_X^{gH}, записанный для инфинитезимальных параметров $(t \times \theta)_x = t_x + \theta_{x'} + \gamma_x\langle t_x, \theta_{x'}\rangle$, дает правило композиции векторов t_x и $\theta_{x'}$, заданных в разных точках x и x', а значит, и определенное *правило параллельного переноса* вектора $\theta_{x'}$ из точки x' в точку x:

$$\theta_{x||} := \theta_{x'} + \gamma_x\langle t_x, \theta_{x'}\rangle = \theta_x + t_x \cdot \nabla_x \theta_x, \tag{15}$$

с которым композиционный закон группы T_X^{gH} описывает сложение векторов заданных уже в одной точке: $(t \times \theta)_x = t_x + \theta_{x||}$. Здесь $\nabla_x = e_x + \gamma_x$ — ковариантная производная, и в этом смысле отображение γ_x играет роль *объекта аффинной связности* в репере e_x. Вследствие уравнения (10) кручение в нашем случае отсутствует.

Оператор кривизны R_x группы T_X^{gH} в силу уравнения (12), выступающего в данном случае в роли *структурного уравнения пространства аффинной связности*, является его *тензором кривизны*.

Используя (2), находим

$$\gamma_x\langle l, l'\rangle = h_x\langle \Gamma_x\langle k_x\langle l\rangle, k_x\langle l'\rangle\rangle + e_x k_x\langle l, l'\rangle\rangle, \tag{16}$$

где $h_x := k_x^{-1}$ и $\Gamma_x := k_x \circ \widetilde{\partial}^2 H_x(0)$, здесь $\widetilde{\partial} := \partial/\partial\widetilde{t}$. Таким образом, ковариантная производная может быть представлена в виде $\nabla_x = h_x \circ k_x \cdot \widetilde{\nabla}_x \circ k_x$, где $\widetilde{\nabla}_x = \partial_x + \Gamma_x$ — ковариантная производная в репере ∂_x. Следовательно, гладкое симметричное билинейное отображение Γ_x является объектом аффинной связности без кручения в голономном репере ∂_x, а поскольку в остальном оно произвольно из-за произвольности отображений деформации H_x, второй порядок которого задает Γ_x, произвольная аффинная связность без кручения может быть описана таким образом.

Теорема 1. *Действуя на многообразии X, деформированная калибровочная группа трансляций T_X^{gH} задает на нем структуру пространства аффинной связности без кручения, структурное уравнение которого является необходимым условием существования группы T_X^{gH}. Произвольная аффинная связность без кручения может быть задана на X таким образом.*

Очевидно, группа T_X^{g} задает на X структуру плоского аффинного пространства.

2. Канонические деформации

Если в разложении отображения деформации

$$H_x(\widetilde{t}) = h_x \circ \left(\widetilde{t} + \frac{1}{2}\Gamma_x\langle \widetilde{t}, \widetilde{t}\rangle + \cdots\right),$$

с помощью которого построена группа T_X^{gH}, первый порядок определяет поле аффинных реперов на X, а второй — аффинную связность, то все остальные порядки на задание связности группой T_X^{gH} не влияют и могут быть произвольными. Для снятия этой неоднозначности обобщим для групп T_X^{gH} понятие каноничности групп Ли.

Группа Ли G, $g \in G$, *каноническая*, если любая прямая вида $g(s) = s\tau$ является ее однопараметрической подгруппой ([11], с. 157). В этом случае отображение $\varphi(g, g') := g \times g'$, задающее закон умножения в группе G, обладает свойством $\varphi(s\tau, s'\tau) = (s + s')\tau$ и восстанавливается однозначно по структурному оператору, а значит, и алгебре Ли группы G.

Определение 1. Деформированную калибровочную группу трансляций T_X^{gH}, а также деформацию, с помощью которой она получена, будем называть *каноническими*, если для любых двух точек $x, x' \in X$ существует соединяющая их гладкая параметрическая кривая $x' = x(s)$, $x = x(0)$, такая, что

$$(s\tau \times s'\tau)_x = \varphi_x(s\tau_x, s'\tau_{x'}) = (s+s')\tau_x, \tag{17}$$

где $\tau_{x'} = h_{x'}\langle\widetilde{\tau}_{x'}\rangle$, причем $\widetilde{\tau}_{x'} = \dot{x}'$.

Дифференцируя определение (17) одновременно по s и s' в нуле, получаем уравнение данной кривой $\dot{\tau}_x + \gamma_x\langle\tau_x, \tau_x\rangle = 0$, или с учетом (16) $\ddot{x} + \Gamma_x\langle\dot{x}, \dot{x}\rangle = 0$. Таким образом, для произвольного пространства аффинной связности без кручения, структура которого задается действием группы T_X^{gH}, такая *кривая существует и является геодезической* в аффинной параметризации в пространстве аффинной связности, задаваемой группой T_X^{gH}.

Критерии каноничности. *Вдоль геодезической, соединяющей две произвольные точки $x, x' \in X$, вспомогательные функции канонической группы T_X^{gH} удовлетворяют уравнениям*

$$\mu_x(s\tau_x)\langle\tau_x\rangle = \tau_x + s\gamma_x\langle\tau_x, \tau_x\rangle, \tag{18}$$

$$\lambda_x(s\tau_x)\langle\tau_{x'}\rangle = \tau_x. \tag{19}$$

Уравнение (18) получено дифференцированием определения (17) по s, а (19) — по s' в нуле.

Учитывая равенство $\rho_x\langle l', l, l\rangle = \partial^2\mu_x(0)\langle l, l, l'\rangle$ и дважды дифференцируя уравнение (18) по s в нуле, получаем $\rho_x\langle l, l', l''\rangle + \mathrm{cycl}(l, l', l'') = 0$, что с использованием тождества (14) и определения (13) позволяет установить следующее соотношение, имеющее место для канонических групп T_X^{gH}: $\rho_x\langle l', l, l\rangle = \frac{2}{3}R_x\langle l, l, l'\rangle$.

Посредством отображений деформации вспомогательное отображение λ_x, исходя из первой формулы в (2), определяется так:

$$\lambda_x(t) = \widetilde{\partial}H_x(\widetilde{t})|_{\widetilde{t}=K_x(t)} \circ k_{x'}, \tag{20}$$

в результате чего критерий (19) может быть представлен в виде $\widetilde{\partial}H_x(\widetilde{t}_x)\langle\widetilde{\tau}_{x'}\rangle = \dot{H}_x(\widetilde{t}_x) = \tau_x$, откуда следует

Предложение 1. *Вдоль геодезической, соединяющей произвольные две точки, разделенные конечным интервалом $\widetilde{t}_x = x(s) - x(0)$, соответствующий параметр $t_x = H_x(\widetilde{t}_x)$ канонической группы T_X^{gH} пропорционален начальному вектору геодезической*: $t_x = s\tau_x$.

Таким образом, в случае канонической деформации функция $x' = x + K_x(s\tau_x)$ является решением уравнения геодезической с начальными данными x, $\dot{x} = k_x\langle\tau_x\rangle$. Параметры t_x канонической группы T_X^{gH} являются элементами касательного расслоения TX и подобны геодезическим римановым координатам, исходящим из точки x.

В силу критерия (19), функции

$$u(x', \widetilde{\tau}_{x'}) := \partial_{x'}H_x(x' - x)\langle\widetilde{\tau}_{x'}\rangle \tag{21}$$

являются первыми интегралами уравнений геодезических $\dot{x}' = \widetilde{\tau}_{x'}$, $\dot{\widetilde{\tau}}_{x'} = -\Gamma_{x'}\langle\widetilde{\tau}_{x'}, \widetilde{\tau}_{x'}\rangle$ и, следовательно, удовлетворяют уравнению

$$\partial_{x'}u(x', \tau_{x'})\langle\widetilde{\tau}_{x'}\rangle - \partial_{\tau_{x'}}u(x', \tau_{x'})\langle\Gamma_{x'}\langle\widetilde{\tau}_{x'}, \widetilde{\tau}_{x'}\rangle\rangle = 0 \tag{22}$$

с граничными условиями $u(x, \widetilde{\tau}_x) := k_x\langle\widetilde{\tau}_x\rangle$, характеристиками которого являются геодезические. Уравнение (22) с учетом выражения (21) приводит к следующему уравнению для функций деформации:

$$(\partial^2_{x'} H_x(x'-x) - \partial_{x'} H_x(x'-x) \circ \Gamma_{x'})\langle\widetilde{\tau}_{x'}, \widetilde{\tau}_{x'}\rangle = 0 \qquad (23)$$

с граничными условиями

$$H_x(0) = 0, \quad \partial_{x'} H_x(0) = h_x. \qquad (24)$$

Задача Коши (23), (24) имеет единственное решение.

Предложение 2. *По коэффициентам деформации h_x и связности Γ_x отображение канонической деформации $H_x(\widetilde{t}_x)$, а значит, и каноническая группа T^{gH}_X, определяются однозначно.*

Особо отметим, что на отображения h_x и Γ_x, а значит, и γ_x, условие каноничности ограничений не налагает.

3. Группа римановых трансляций

Поскольку все касательные к геодезической векторы параллельны между собой, уравнение (19) описывает конечный параллельный перенос касательного вектора $\tau_{x'}$ вдоль геодезической в исходную точку x:

$$\tau_{x||} = \tau'_x := \lambda_x(s\tau_x)\langle\tau_{x'}\rangle. \qquad (25)$$

Поскольку $\lambda_x(s\tau_x) \cong 1 + s\tau_x \cdot \gamma_x$, это согласуется с правилом параллельного переноса (15) произвольного вектора при инфинитезимальном смещении, и имеет место вследствие выполнения композиционного закона для переносов касательных к геодезическим векторов вдоль этих же геодезических: $\lambda_x((s+s')\tau_x)\langle\tau_{x''}\rangle = \lambda_x(s\tau_x)\langle\lambda_{x'}(s'\tau_{x'})\langle\tau_{x''}\rangle\rangle$, благодаря которому конечный параллельный перенос касательного вектора (25) совпадет с интегральной последовательностью инфинитезимальных переносов (как классически и определяется конечный параллельный перенос).

Отметим, что для векторов θ, трансверсальных касательным, аналогичное соотношение $\lambda_x((s+s')\tau_x)\langle\theta_{x''}\rangle = \lambda_x(s\tau_x)\langle\lambda_{x'}(s'\tau_{x'})\langle\theta_{x''}\rangle\rangle$ в искривленном пространстве не выполняется. Действительно, вследствие произвольности вектора θ и уравнения (5) оно приводит к равенству $\partial'\varphi_x(s\tau_x, s'\tau_{x'}) = \lambda_x(s\tau_x)$, откуда немедленно следует $\rho_x = 0$, а значит, и $R_x = 0$. Таким образом, в искривленном пространстве конечный λ-*перенос* вектора θ, трансверсального касательному к геодезической, определяемый формулой $\theta'_x := \lambda_x(s\tau_x)\langle\theta_{x'}\rangle$, не является параллельным переносом вдоль нее, несмотря на то, что при инфинитезимальных смещениях (15) он таковым является, и это происходит именно из-за того, что в данном случае нарушается композиционный закон переноса. Кривизна риманова пространства при этом выступает как мера девиации геодезических.

Согласно Риману “измерение заключается в последовательном прикладывании сравниваемых величин, поэтому возможность измерений обусловлена наличием некоторого способа переносить одну величину, принятую за единицу масштаба, по другой величине” ([1], с. 311). Именно это и осуществляет каноническая группа T^{gH}_X. Действительно, в силу каноничности операция n-кратного переноса касательного вектора τ_x вдоль геодезической дает

$$x_n = x + K_x(\tau_x) + K_{x_1}(\tau_{x_1}) + \cdots + K_{x_{n-1}}(\tau_{x_{n-1}}) = x + K_x(n\tau_x).$$

Таким образом, на геодезической, соединяющей точки x и $x' = x + K_x(s\tau_x)$, укладывается s векторов τ при их трансляции вдоль самих себя, и аффинный параметр геодезической s дает меру ее длины в масштабе вектора τ.

Задание длины вектора $\tau_x \in T$, независимо от его направления и расположения $\tau^2_x := \eta\langle\tau_x, \tau_x\rangle$, т. е. задание евклидовой метрики η в пространстве T, позволяет сравнивать длины произвольных геодезических, чем и реализуется принцип длины Римана. При этом на X задается структура *риманова пространства с метрикой* $g_x\langle\widetilde{\tau}_x,\widetilde{\tau}_x\rangle := \eta\langle h_x\langle\widetilde{\tau}_x\rangle, h_x\langle\widetilde{\tau}_x\rangle\rangle$. Вектор $\widetilde{\tau}_x$, касательный к геодезической, выступает в роли единицы масштаба, и поэтому естественно потребовать неизменности его длины при переносе вдоль геодезической.

Определение 2. Каноническую калибровочную группу трансляций, для которой выполняется условие сохранения длины единицы масштаба при переносе его вдоль себя $\eta\langle\tau_x,\tau_x\rangle = \eta\langle\tau_{x'},\tau_{x'}\rangle$, будем называть *группой римановых трансляций* и обозначать RT.

С учетом критерия (19) это условие можно представить в виде $G_x(s\tau_x)\langle\tau_{x'},\tau_{x'}\rangle = \eta\langle\tau_{x'},\tau_{x'}\rangle$, где $G_x(t)\langle\tau,\tau\rangle := \eta\langle\lambda_x(t)\langle\tau\rangle,\lambda_x(t)\langle\tau\rangle\rangle$, или, используя выражение (20), как

$$\eta\langle\partial_{x'}H_x(x'-x)\langle\widetilde{\tau}_{x'}\rangle,\partial_{x'}H_x(x'-x)\langle\widetilde{\tau}_{x'}\rangle\rangle = g_{x'}\langle\widetilde{\tau}_{x'},\widetilde{\tau}_{x'}\rangle. \tag{26}$$

Дифференцирование уравнения (26) по x' при $x'\to x$ дает условие согласования связности с метрикой

$$2g_x\langle\widetilde{\tau},\Gamma_x\langle\widetilde{t},\widetilde{\tau}\rangle\rangle = \partial g_x\langle\widetilde{t},\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}\rangle, \tag{27}$$

или с учетом (16)

$$\eta\langle\tau,\gamma_x\langle t,\tau\rangle\rangle = 0, \tag{28}$$

где все векторы берутся в точке x. Условие (27), совместно с фактом симметричности отображения Γ_x, позволяет выразить его через производную от метрики ∂g_x:

$$g_x\langle\widetilde{t},\Gamma_x\langle\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}\rangle\rangle = \partial g_x\langle\widetilde{\tau},\langle\widetilde{t},\widetilde{\tau}\rangle\rangle - \frac{1}{2}\partial g_x\langle\widetilde{t},\langle\widetilde{\tau},\widetilde{\tau}\rangle\rangle,$$

а условие (28) совместно с (10) приводит к выражению для отображения γ_x группы RT через ее структурный оператор

$$\eta\langle\tau,\gamma_x\langle t,\tau'\rangle\rangle = \frac{1}{2}(\eta\langle t,C_x\langle\tau,\tau'\rangle\rangle + \eta\langle\tau,C_x\langle t,\tau'\rangle\rangle - \eta\langle\tau',C_x\langle t,\tau\rangle\rangle),$$

откуда следует, что в данном случае объект связности Γ_x образован символами Кристоффеля, а γ_x — коэффициентами вращения Риччи и, следовательно, однозначно определяются полем реперов e_x, задаваемых на X действием группы RT.

Условие (26) не налагает ограничений на коэффициенты деформации h_x (а значит, и поле e_x), поэтому с учетом теоремы 1 и предложения 2 приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Группа римановых трансляций RT своим действием на многообразии X задает структуру риманова пространства и ортонормированное поле реперов e_x, по которому она определяется однозначно. Произвольная риманова структура на многообразии X может быть задана таким образом.*

Требование сохранения длины вектора τ, касательного к геодезической, при конечном λ-переносе не обеспечивает аналогичного свойства для произвольного вектора θ.

Предложение 3. *Требование сохранения длины произвольного вектора при конечном λ-переносе $G_x(s\tau) = \eta$ является условием плоского пространства.*

Утверждение следует из соотношения

$$\frac{d^2}{ds^2}G_x(s\tau)\langle\theta,\theta\rangle|_{s=0} = \frac{4}{3}\eta\langle\theta,R_x\langle\tau,\tau,\theta\rangle\rangle,$$

имеющего место для группы RT [12].

Таким образом, несмотря на то, что группа RT содержит в себе полную информацию о геометрической структуре риманова пространства и задает ее своим действием на X, она не оставляет инвариантов ни в X, ни в TX, что не позволяет рассматривать ее в качестве главной группы риманова пространства. Группа римановых трансляций RT — источник геометрических объектов риманова пространства: ее генераторы образуют ортонормированное реперное поле, чем на многообразии X задается метрика; параметры — векторные поля на X. Группа RT позволяет измерять длины произвольно расположенных кривых путем перемещения по ним единичного масштаба и реализует, таким образом, *принцип длины* (Б. Римана).

4. Группа движений касательного расслоения риманова пространства

Действие группы римановых трансляций RT задает на многообразии X не только риманову структуру, т. е. метрику g_x, но и фиксированное поле ортонормированных реперов $e_x = k_x \cdot \partial_x$. Поэтому одну и ту же риманову структуру на X задают все группы RT, поля реперов которых связаны преобразованиями из калибровочной группы вращений $\widetilde{r}_x \in R^g$:

$$e'_{x'} = \widetilde{r}_x^{-1} \cdot e_{x'}, \quad \eta\langle \widetilde{r}_x\langle\tau\rangle, \widetilde{r}_x\langle\tau\rangle\rangle = \eta\langle\tau,\tau\rangle \ \ \forall x \in X, \ \ \tau \in T, \tag{29}$$

при которых коэффициенты деформации группы RT преобразуются по закону $h'_{x'} = \widetilde{r}_x \circ h_{x'}$, оставляющему метрику g_x неизменной. Преобразования (29) приняты нелокальными ($x' \neq x$!), что определяет подвижный репер (по Э. Картану): здесь $e'_{x'}$ интерпретируется как репер, перенесенный из точки x в точку x' и произвольно довернутый на величину $\widetilde{r}_x^{-1}$, заданную в точке x, где задана и величина трансляции $\widetilde{t}_x = x' - x$, на которую он переносится.

Множество таких преобразований образует обобщенную калибровочную группу $G^g_X = T^g_X \times)R^g$ [8], имеющую структуру полупрямого произведение $\times)$ своих подгрупп, с параметрами $\widetilde{\vartheta}_x = (\widetilde{t}_x, \widetilde{r}_x)$ и законом умножения $(\widetilde{\vartheta} \times \widetilde{\vartheta}')_x =: \widetilde{\Phi}_x(\widetilde{\vartheta}_x, \widetilde{\vartheta}'_{x'})$:

$$(\widetilde{\vartheta} \times \widetilde{\vartheta}')^T_x = \widetilde{t}_x + \widetilde{t}'_{x'}, \tag{30}$$

$$(\widetilde{\vartheta} \times \widetilde{\vartheta}')^R_x = \widetilde{r}_x \circ \widetilde{r}'_{x'}, \tag{31}$$

где $x' = x + \widetilde{t}_x$ задает действие группы G^g_X на X, а индексы ^{T} и ^{R} указывают на каноническую проекцию элементов группы G^g_X на ее сомножители T^g_X и R^g.

Условие $\tau'_x \cdot e'_{x'} = \tau_{x'} \cdot e_{x'}$, следующее из интерпретации преобразований (29), как движений репера, определяет действие группы G^g_X на параметры группы RT:

$$\tau'_x = \widetilde{r}_x\langle\tau_{x'}\rangle, \tag{32}$$

т. е. в касательном расслоении TX. Таким образом, группа G^g_X описывает *нелокальные автоморфизмы группы* RT, оставляющие риманову структуру, задаваемую ею на X, неизменной.

Преобразования (29) и (32) при отсутствии вращений $\widetilde{r}_x = 1$ описывают покомпонентное отождествление векторов, заданных в разных точках, что соответствует случаю плоского пространства и не согласуется с римановой структурой, задаваемой на X действием группы RT. Для осуществления такого согласования деформируем группу G^g_X.

Пусть *деформированная группа* $G^{g\overline{H}}_X = T^{g\overline{H}}_X \times)R^g$ параметризуется парами $\vartheta_x = (t_x, r_x)$ таким образом, что

$$\widetilde{t}_x = \overline{K}_x(t_x), \tag{33}$$

$$\widetilde{r}_x = r_x \circ \pi_x(t_x), \tag{34}$$

где $\overline{K}_x = \overline{H}_x^{-1}$ и $\pi_x(t) \in R^g$, т. е.

$$\eta\langle\pi_x(t)\langle\tau\rangle, \pi_x(t)\langle\tau\rangle\rangle = \eta\langle\tau,\tau\rangle, \quad \pi_x(0) = 1 \ \ \forall x \in X, \ \ t, \tau \in T. \tag{35}$$

Формула (33) описывает независимую деформацию подгруппы $T_X^g \subset G_X^g$ до $T_X^{g\overline{H}}$ с помощью отображения деформации $\overline{H}_x$, а (34), будучи подставленной в (32), обеспечивает довращение $\pi_x(t_x)$ векторов при трансляциях:

$$\tau'_x = r_x\langle \pi_x(t_x)\langle \tau_{x'}\rangle\rangle, \tag{36}$$

где $x' = x + \overline{K}_x(t_x)$ задает действие группы $G_X^{g\overline{H}}$ на X, а (36) — в TX.

Закон умножения $(\vartheta \times \vartheta')_x =: \Phi_x(\vartheta_x, \vartheta'_{x'})$ группы $G_X^{g\overline{H}}$ определяется ее изоморфизмом (33), (34) группе G_X^g и законом умножения (30), (31) группы G_X^g:

$$(\vartheta \times \vartheta')_x^T = \overline{\varphi}_x(t_x, t'_{x'}) := \overline{H}_x(\overline{K}_x(t_x) + \overline{K}_{x'}(t'_{x'})),$$

$$(\vartheta \times \vartheta')_x^R = r_x \circ \pi_x(t_x) \circ r'_{x'} \circ \pi_{x'}(t'_{x'}) \circ \pi_x^{-1}(\overline{\varphi}_x(t_x, t'_{x'})). \tag{37}$$

Преобразование (36) при чистом смещении, т. е. при $\vartheta_x = (t_x, 1)$, назовем π-*переносом*. В инфинитезимальном случае он принимает вид $\tau'_x = \tau_x + t_x \cdot \overline{\nabla}_x \tau_x$, где $\overline{\nabla}_x := \overline{e}_x + \overline{\gamma}_x$, причем $\overline{e}_x := \overline{k}_x \cdot \partial_x$, $\overline{k}_x := \partial \overline{K}_x(0)$, $\overline{\gamma}_x := \partial \pi_x(0)$, и соответствует параллельному переносу вектора τ_x из точки $x' = x + \overline{k}_x\langle t_x\rangle$ в точку x в пространстве аффинной связности с объектом связности $\overline{\gamma}_x$ в репере $\overline{e}_x$. В этом смысле данная геометрическая структура задается на X действием (36) группы $G_X^{g\overline{H}}$ в TX.

Потребуем выполнения *условия согласования* $\overline{\nabla}_x = \nabla_x$ (или $\overline{e}_x = e_x$, $\overline{\gamma}_x = \gamma_x$), обеспечивающего совпадение на инфинитезимальном уровне π-переносов с λ-переносами, а значит, и совпадение геометрической структуры, задаваемой группой $G_X^{g\overline{H}}$, структуре пространства аффинной связности, задаваемой исходной группой RT, нелокальные автоморфизмы которой описывает группа $G_X^{g\overline{H}}$. Отметим, что вследствие требования (35) условие (28) согласования связности $\overline{\gamma}_x$ с метрикой выполняется автоматически и условие $\overline{\gamma}_x = \gamma_x$, благодаря принятому равенству $\overline{e}_x = e_x$, сводится к условию отсутствия кручения

$$C_x\langle l, l'\rangle := \overline{\gamma}_x\langle l, l'\rangle - (l \leftrightarrow l').$$

Определение 3. Деформированную группу $G_X^{g\overline{H}}$ нелокальных автоморфизмов группы римановых трансляций RT, сохраняющих риманову структуру, задаваемую на X действием группы RT, для которой выполняется условие согласования $\overline{\nabla}_x = \nabla_x$, будем называть *группой движений касательного расслоения риманова пространства* и обозначать DR.

В терминах отображений $L_x(\vartheta) := r_x \circ \pi_x(t)$ композиционный закон преобразований (36) $\tau'_x = L_x(\vartheta)\langle \tau_{x'}\rangle$, записанный для постоянных параметров $\vartheta = (t, r)$, принимает вид

$$L_x(\Phi_x(\vartheta, \vartheta')) = L_x(\vartheta) \circ L_{x'}(\vartheta'), \tag{38}$$

где $x' = x + \overline{K}_x(t)$. Вводя обозначения

$$\Lambda_x(\vartheta) := \partial_{\vartheta'} \Phi_x(\vartheta, \vartheta')|_{\vartheta'=(0,1)}, \quad E_x := \partial_\vartheta L_x(\vartheta)|_{\vartheta=(0,1)},$$

где $\partial_\vartheta := \partial/\partial\vartheta$, и дифференцируя уравнение (38) по ϑ' при $\vartheta' = (0, 1)$, получаем аналог *уравнения Ли* для группы DR преобразований (36):

$$\Lambda_x(\vartheta) \cdot \partial_\vartheta L_x(\vartheta) = L_x(\vartheta) \circ E_{x'}. \tag{39}$$

Условием интегрируемости уравнения (39) является уравнение

$$[D_x, D_x] = \Sigma_x \cdot D_x, \tag{40}$$

записанное нами в терминах коммутатора генераторов D_x группы DR преобразований (36), которые определяются соотношением

$$D_x\tau_x := \partial_\vartheta(L_x(\vartheta_x)\langle\tau_{x'}\rangle)|_{\vartheta=(0,1)},$$

и ее структурного оператора

$$\Sigma_x\langle\xi,\xi'\rangle := \partial_\vartheta\Lambda_x(\vartheta)\langle\xi,\xi'\rangle|_{\vartheta=(0,1)} - (\xi\leftrightarrow\xi'), \tag{41}$$

где в данном случае ξ и ξ' — векторы касательного к единице группы $G = T\otimes R$ пространства. Уравнение (40) обобщает для группы DR преобразований (36) *уравнение Маурера–Картана* теории конечномерных групп Ли преобразований.

Генераторы D_x распадаются на генераторы трансляций, совпадающие с ковариантными производными ∇_x векторных полей, а также не зависящие от x генераторы вращений A векторов в евклидовом пространстве T.

Частным случаем (40) является уравнение

$$[\nabla_x,\nabla_x] = \Sigma_{xTT}^{\ T}\cdot\nabla_x + \Sigma_{xTT}^{\ R}\cdot A, \tag{42}$$

для коммутатора генераторов трансляций, где нижний индекс $_T$ означает ограничение отображения на подпространство T. Непосредственные вычисления по определяющей формуле (41) дают следующие выражения для компонент структурного оператора группы DR: $\Sigma_{xTT}^{\ T} = C_x$, $\Sigma_{xTT}^{\ R} = R_x$, в результате чего уравнение (42) принимает вид структурного уравнения риманова пространства

$$[\nabla_x,\nabla_x] = C_x\cdot\nabla_x + R_x \tag{43}$$

с тензором кривизны R_x в репере e_x, объектом неголономности которого является C_x (здесь учтено, что $R_x = R_x\cdot A$). Уравнение (43) с использованием уравнения (9) $[e_x,e_x] = C_x\cdot e_x$ сводится к (12).

Тождество Якоби для группы DR

$$D_x\Sigma_x\langle\xi,\xi',\xi''\rangle + \Sigma_x\langle\xi,\Sigma_x\langle\xi',\xi''\rangle\rangle + \mathrm{cycl}(\xi,\xi',\xi'') = 0$$

является условием интегрируемости уравнения Маурера–Картана (40), и при ограничении его на трансляции $\xi\to l$ сводится к *тождеству Бианки.*

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Трансляционные генераторы действия группы движений касательного расслоения риманова пространства DR в его касательном расслоении TX являются ковариантными производными векторных полей $\nabla_x = e_x + \gamma_x$, структурный оператор группы DR в качестве компонент имеет объект неголономности C_x ортонормированного поля реперов e_x и тензор кривизны R_x в нем, причем структурное уравнение риманова пространства $[\nabla_x,\nabla_x] = C_x\cdot\nabla_x + R_x$ является необходимым условием существования группы DR, задающей своим действием в расслоении TX данную структуру на X.*

Видим, что как группа DR, так и RT, задают на X структуру риманова пространства, но двумя разными способами. Если для группы DR достаточно инфинитезимального действия в касательном расслоении TX и структурное уравнение (43) появляется как компонента уравнения Маурера–Картана, обеспечивающего существование группы DR, то для RT требуется задание ее действия в X уже с точностью, как минимум, до второго порядка по смещениям, что генерирует как само расслоение TX, так и действие группы RT в нем, причем структурное уравнение риманова пространства (12) появляется здесь уже после дифференцирования уравнения Маурера–Картана для группы RT. Причина этого состоит в том, что группами DR и RT описываются разные аспекты кривизны риманова пространства, а именно, в случае группы DR кривизна выступает как мера некоммутативности ее генераторов (или мера доворота вектора при обносе его по замкнутому контуру), а в случае RT — как мера девиации геодезических.

Особо подчеркнем, что в предлагаемом теоретико-групповом подходе кривизна не дописывается в структурное уравнение плоского пространства из соображений неголономности искривленного пространства, как у Э. Картана, а является характеристикой группы, задающей данную геометрическую структуру с переменной кривизной. В случае группы DR этой характеристикой является ее структурный оператор, определяющийся антисимметричной частью коэффициентов во втором порядке разложения закона умножения группы DR по параметрам, а в случае RT — оператор кривизны, определяющийся антисимметричной частью коэффициентов уже в третьем порядке разложения закона умножения группы RT. Таким образом, неголономность пространства появляется при деформации обобщенной калибровочной группы соответствующего плоского пространства, как изоморфный переход к деформированной группе, что *сохраняет групповую структуру используемых преобразований*, в том числе и их ассоциативность.

В расслоении ортонормированных реперов (главном расслоении RX) группа движений касательного расслоения риманова пространства DR действует по формуле

$$e'_{x'} = \pi_x^{-1}(t_x) \cdot r_x^{-1} \cdot e_{x'},$$

следующей из (29) с учетом деформации (34), что определяет подвижный репер Э. Картана в римановом пространстве ([10], с. 5) и позволяет дать определение связности посредством подвижного репера (с $r = 0$):

$$\nabla_{e_x} e_x := \lim_{t \to 0} \frac{e_x - e'_x}{t} = \gamma_x \cdot e_x.$$

Поскольку $r_x, \pi_x \in R^g$, преобразования из группы движений касательного расслоения риманова пространства DR *сохраняют длины векторов и углы между ними*, а потому позволяют устанавливать равенство геометрических фигур путем их наложения, даже если эти фигуры расположены в разных точках пространства X. Здесь под геометрическими фигурами понимаются конфигурации векторов, задаваемых в касательных пространствах. Таким образом, DR реализует *принцип равенства* и является *главной группой риманова пространства* (по Ф. Клейну).

5. Группа параллельных переносов риманова пространства

Поскольку для задания геометрической структуры достаточно инфинитезимального действия группы DR, одну и ту же риманову структуру задают множество групп DR, отличающихся более высокими порядками действия в расслоениях TX, или RX. С другой стороны, возникает вопрос — а что означает конечный π-перенос? Вдоль какой кривой он осуществляется? Эти вопросы аналогичны вопросам о смысле конечных λ-переносов в случае деформированной группы диффеоморфизмов T_M^{gH}, которые для нее успешно были прояснены с привлечением понятия каноничности.

Для группы DR, более широкой, чем группа T_M^{gH}, понятие каноничности несколько расширяется, но является столь же плодотворным.

Определение 4. Группу движений касательного расслоения риманова пространства DR будем называть *группой параллельных переносов* риманова пространства и обозначать DP, если для нее выполняется расширенное условие *каноничности*, а именно, для любых двух точек $x, x' \in X$ существует соединяющая их гладкая параметрическая кривая $x' = x(s)$, $x = x(0)$, такая, что

$$((s\tau, 1) \times (s'\tau, 1))_x = (\overline{\varphi}_x(s\tau_x, s'\tau_{x'}), 1) = ((s + s')\tau_x, 1),$$

где $\tau_{x'} = h_{x'}\langle\widetilde{\tau}_{x'}\rangle$, причем $\widetilde{\tau}_{x'} = \dot{x}'$.

Данное определение, во-первых, требует каноничности подгруппы $T_M^{g\overline{H}} \subset DP$, а вследствие условия согласования $\overline{e}_x = e_x$ и теоремы 2 — совпадения отображений деформации $\overline{H}_x = H_x$, а значит, и совпадения всей группы $T_M^{g\overline{H}}$ с исходной группой римановых трансляций RT, что предполагает также и существование искомых кривых и совпадения их с геодезическими, задаваемыми группой RT. Во-вторых, оно, как следует из формулы (37), приводит к выполнению композиционного закона для π-переносов произвольных векторов вдоль геодезических: $\pi_x((s + s')\tau_x) = \pi_x(s\tau_x) \circ \pi_{x'}(s'\tau_{x'})$. Поскольку при инфинитезимальных смещениях π-перенос является параллельным переносом векторов, выполнение этого закона приводит к тому, что конечный π-перенос произвольных векторов совпадет с интегральной последовательностью их инфинитезимальных параллельных переносов вдоль геодезической, соединяющей точки x и x', что и определило название группы DP.

Вследствие условия согласования в группе параллельных переносов DP, как и во всех группах DR, инфинитезимальные π-переносы и λ-переносы произвольных векторов совпадают, в то время как конечные переносы в искривленном пространстве отличаются. Но лишь в группе DP для векторов, касательных к геодезическим, конечные как π-переносы, так и λ-переносы приводят к одинаковым результатам.

Для нахождения уравнения, определяющего отображение π_x, заметим, что функции

$$u(x', \theta_{x'}) := \pi_x(H_x(x' - x))\langle\theta_{x'}\rangle \tag{44}$$

в силу того, что вдоль геодезических, соединяющих пары точек x и x', $u(x', \theta_{x'}) = \theta_x = \mathrm{const}$, являются первыми интегралами системы уравнений $\dot{x}' = k_x\langle\tau_{x'}\rangle$, $\dot{\theta}_{x'} = -\gamma_{x'}\langle\tau_{x'}, \theta_{x'}\rangle$, а потому удовлетворяют уравнению в частных производных:

$$k_x \cdot \partial_{x'} u(x', \theta_{x'})\langle\tau_{x'}\rangle - \partial_{\theta_{x'}} u(x', \theta_{x'})\langle\gamma_{x'}\langle\tau_{x'}, \theta_{x'}\rangle\rangle = 0,$$

подстановка в которое выражения (44) приводит к уравнению

$$(k_{x'} \cdot \partial_{x'}\pi_x(H_x(x - x')) - \pi_x(H_x(x - x')) \circ \gamma_{x'})\langle\tau_{x'}, \theta_{x'}\rangle = 0,$$

дающему при условии $\pi_x(0) = 1$ и произвольных начальных $\tau_x, \theta_x \in T$ единственное решение для отображения π_x.

Тем самым деформация (33), (34), с помощью которой строится группа параллельных переносов DP, определяется однозначно.

Предложение 4. *По ортонормированному полю реперов e_x группа параллельных переносов риманова пространства DP определяется однозначно.*

Таким образом, можно сказать, что группа параллельных переносов DP — это однозначное расширение группы римановых трансляций RT на возможность учета локальных вращений из R^g. Однозначность достигается, прежде всего, за счет условия каноничности, которое с геометрической точки зрения сводится к фиксированию геодезических в качестве кривых, вдоль которых осуществляются конечные переносы, а также наложением условия согласования. Одной и той же римановой структуре соответствуют все группы DP, для которых реперы e_x связаны преобразованиями из R^g.

Теорема 4. *Группа параллельных переносов риманова пространства DP, действуя на многообразии X как группа римановых трансляций RT (с ядром неэффективности R^g), задает на X структуру риманова пространства, позволяя измерять длины произвольных кривых путем движения единичного масштаба, чем и реализует принцип длины.*

Действуя в касательном расслоении TX, группа DP сохраняет длины векторов и углы между ними, позволяя устанавливать конгруэнтность геометрических фигур путем их наложения, чем и реализует принцип равенства.

Таким образом, группа параллельных переносов риманова пространства DP объединяет в себе оба принципа оснований геометрии, преодолевая, тем самым, риман-клейновский антагонизм.

Выводы

◦ Группа римановых трансляций RT (риманово пространство X с полем ортонормированных реперов e_x) реализует принцип длины.

◦ Группа движений касательного расслоения риманова пространства DP, как согласованная с RT группа нелокальных автоморфизмов группы RT, — это главная группа риманова пространства X, реализующая для него Эрлангенскую программу Ф. Клейна — принцип равенства.

◦ Группа параллельных переносов DP, как каноническая группа DR, содержащая группу римановых трансляций RT в качестве подгруппы, объединяет в себе оба принципа и согласует их.

Литература

[1] Риман Б. *О гипотезах, лежащих в основании геометрии* (Гостехтеоретиздат, М., 1956).

[2] Клейн Ф. *Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований* (“*Эрлангенская программа*”) (Гостехтеоретиздат, М., 1956).

[3] Картан Э. *Теория групп и геометрия* (Гостехтеоретиздат, М., 1956).

[4] Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия* (Мир, М., 1975).

[5] Сабинин Л.В. *Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии*, Ш. Кобаяси, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии*: В 2-х т. (Наука, М., 1981).

[6] Самохвалов С.Е. *Теоретико-групповое описание калибровочных полей*, Теор. и матем. физика, № 1, 66–77 (1988).

[7] Самохвалов С.Е. *О задании связностей в расслоениях действием бесконечных групп Ли*, Укр. матем. журн., № 12, 1599–1603 (1991).

[8] Samokhvalov S.E., Reznyk K.O. *Cartan equation as the condition of the existence of an infinite group*, Lie theory and its applications in physics VI, Bulg. J. Phys. **33**, № S2, 309–314 (2006).

[9] Самохвалов С.Є. *Теоретико-груповий опис ріманових просторів*, Укр. матем. журн., № 9, 1238–1248 (2003).

[10] Картан Э. *Риманова геометрия в ортогональном репере* (Изд-во МГУ, М., 1960).

[11] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1978).

[12] Самохвалов С.Є. *Фундаментальна група простору Ейнштейна*, Мат. моделювання, № 2, 15–19 (2008).

С.Е. Самохвалов

профессор, заведующий кафедрой прикладной математики,
Днепродзержинский государственный технический университет,
ул. Днепростроевская, д. 2, г. Днепродзержинск, 51918, Украина,

`e-mail:` serg_samokhval@ukr.net

Е.Б. Балакирева

магистр, кафедра прикладной математики,
Днепродзержинский государственный технический университет,
ул. Днепростроевская, д. 2, г. Днепродзержинск, 51918, Украина,

e-mail: elanagutta@gmail.com

S.E. Samokhvalov and E.B. Balakireva

Group-theoretic matching of the length principle and equality principle in geometry

Abstract. The paper deals with canonical deformed group of diffeomorphisms with a given length scale which describes the motion of the single scales in the Riemannian space. This allows to measure lengths of arbitrary curves, implementing length principle which is laid by B. Riemann in the basis of the geometry. We present the way of univocal extension of the given group to a group, which contains gauge rotations of vectors (parallel transports group) whose transformations leave unchanged the lengths of the vectors and corners between them. Thereby Klein's Erlanger Program—the principle of equality—is implemented for Riemannian spaces.

Keywords: Riemannian–Klein's antagonism, group of motions in the Riemannian space tangent bundle, canonical deformed group of diffeomorphisms.

S.E. Samokhvalov

Professor, Head of the Chair of Applied Mathematics,
Dneprodzerzhinsk State Technical University,
2 Dneprostroevskaya str., Dneprodzerzhinsk, 51918 Ukraine,

e-mail: serg_samokhval@ukr.net

E.B. Balakireva

Master, Chair of Applied Mathematics,
Dneprodzerzhinsk State Technical University,
2 Dneprostroevskaya str., Dneprodzerzhinsk, 51918 Ukraine,

e-mail: elanagutta@gmail.com