И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.95

Е.М. КАРЧЕВСКИЙ, С.И. СОЛОВЬЕВ

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

1. Рассматривается задача о собственных поверхностных волнах цилиндрического диэлектрического слабонаправляющего волновода [1], [2]. Математическая постановка этой задачи (см., напр., [1], [2]) сводится к отысканию таких значений параметра λ, $\lambda \neq q_2$, при которых существуют убывающие на бесконечности нетривиальные решения u дифференциальной задачи

$$\Delta u + (q_i - \lambda)u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1,2, \quad [u]_x = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_x = 0, \quad x \in \Gamma_1. \tag{1}$$

Здесь $q_i = k_0^2 n_i^2$, $i = 1,2$, $k_0 > 0$, $n_1 > n_2 > 0$, $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$, где n_1 и n_2 — показатели преломления волновода и окружающей изотропной среды, ε_0 — электрическая постоянная, μ_0 — магнитная постоянная, ω — заданная частота электромагнитных колебаний, $\lambda = \beta^2$, β — продольная постоянная распространения, $\partial u/\partial \nu$ — производная по внешней нормали к границе Γ_1 области Ω_1 на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_1$, $[v]_x$ — скачок функции v в точке $x \in \Gamma_1$ при переходе через контур Γ_1, Δ — оператор Лапласа.

В предшествующих работах авторов [3], [4] установлено, что собственные значения λ дифференциальной задачи могут существовать лишь в интервале (q_2, q_1). Доказано также, что эта задача имеет по крайней мере одно простое вещественное собственное значение, которому отвечает положительная собственная функция.

В данной работе исходная дифференциальная задача формулируется в эквивалентном виде как вариационная на собственные значения в интервале (q_2, q_1). С помощью вариационной постановки получены необходимые и достаточные условия существования по крайней мере m, $m \geq 1$, собственных значений исходной задачи (теорема 1), установлен результат существования ровно m собственных значений задачи (теорема 2). При исследовании вариационной задачи на собственные значения используется методика, разработанная в [5]. Как следствия общих достаточных условий теорем 1 и 2 предложены упрощенные достаточные условия, гарантирующие существование заданного числа собственных значений исходной задачи (следствия 1 и 2), которые сравнительно просто можно использовать на практике при оценке количества собственных значений.

2. В дальнейшем, как обычно, через L_2 и W_2^1 обозначаются вещественные пространства Лебега и Соболева.

Пусть Ω_1 — ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$ с непрерывной по Липшицу границей Γ_1, $\mathbb{R}$ — числовая прямая. Обозначим $V = W_2^1(\mathbb{R}^2)$, $H = L_2(\Omega_1)$, $\Lambda = (q_2, q_1)$ и определим отображения $a:\Lambda\times V\times V\to\mathbb{R}$ и $b:H\times H\to\mathbb{R}$ по формулам

$$a(\mu,u,v)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^2}\partial_i u\partial_i v\,dx+(\mu-q_2)\int_{\mathbb{R}^2}uv\,dx,\quad u,b\in V,\ \ \mu\in\Lambda,$$

$$b(u,v)=(q_1-q_2)\int_{\Omega_1}uv\,dx,\quad u,v\in H.$$

Сформулируем вариационную постановку задачи (1): найти $\lambda\in\Lambda$, $u\in V\setminus\{0\}$ такие, что

$$a(\lambda,u,v)=b(u,v)\ \ \forall v\in V. \tag{2}$$

3. При фиксированном $\mu\in\Lambda$ введем вспомогательную задачу на собственные значения: найти $\gamma(\mu)\in\mathbb{R}$, $u\in V\setminus\{0\}$ такие, что

$$a(\mu,u,v)=\gamma(\mu)b(u,v)\ \ \forall v\in V. \tag{3}$$

Задача (3) имеет счетное множество положительных конечнократных собственных значений $\gamma_k(\mu)$, $k=1,2,\ldots$, занумерованных в неубывающем порядке с учетом кратности

$$0<\gamma_1(\mu)<\gamma_2(\mu)\le\cdots\le\gamma_k(\mu)\le\cdots,\quad \lim_{k\to\infty}\gamma_k(\mu)=\infty.$$

Нетрудно видеть, что число λ является собственным значением задачи (2) тогда и только тогда, когда λ есть решение одного из уравнений $\gamma_k(\mu)=1$, $\mu\in\Lambda$, $k=1,2,\ldots$

Доопределим функции $\gamma_i(\mu)$, $\mu\in\Lambda$, в точках q_1 и q_2 по формулам

$$\gamma_i(q_1)=\lim_{\mu\to q_1,\ \mu\in\Lambda}\gamma_i(\mu),\quad \gamma_1(q_2)=\lim_{\mu\to q_2,\ \mu\in\Lambda}\gamma_i(\mu),\quad i=1,2,\ldots$$

Заметим, что функции $\gamma_k(\mu)$, $\mu\in\Lambda$, $k=1,2,\ldots$, являются непрерывными строго возрастающими функциями, причем $\gamma_k(q_1)>1$, $\gamma_k(q_2)\ge0$, $k=1,2,\ldots$, $\gamma_1(q_2)=0$.

Теорема 1. *Условие $\gamma_m(q_2)<1$ при $m\ge1$ выполняется тогда и только тогда, когда задача (2) имеет по крайней мере m конечнократных собственных значений λ_i, $i=1,2,\ldots,m$, занумерованных с учетом кратности $q_1>\lambda_1>\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_m>q_2$, причем каждое число λ_i является единственным корнем уравнения $\gamma_i(\mu)=1$, $\mu\in\Lambda$, $i=1,2,\ldots,m$.*

Теорема 2. *Пусть $m=\max\{i:\gamma_i(q_2)<1,\ i\ge1\}$. Тогда задача (2) имеет ровно m конечнократных собственных значений λ_i, $i=1,2,\ldots,m$, занумерованных с учетом кратности $q_1>\lambda_1>\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_m>q_2$. Максимальное собственное значение λ_1 является простым, ему отвечает положительная собственная функция u_1, т. е. $u_1(x)>0$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^2$. Собственные функции u_i, $i=1,2,\ldots,m$, отвечающие собственным значениям λ_i, $i=1,2,\ldots,m$, можно выбрать ортонормированными в $L_2(\mathbb{R}^2)$:*

$$\int_{\mathbb{R}^2}u_iu_j\,dx=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\ldots,m.$$

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на результаты работ [4], [5].

Следствие 1. Пусть $\Omega=\{x:x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ (x_1^2+x_2^2)^{1/2}<A\}$, $\Omega\subseteq\Omega_1$, A — фиксированное положительное число, μ_i, $i=1,2,\ldots,$ — занумерованные в порядке неубывания нули всех функций Бесселя $J_n(\mu)$ первого рода n-го порядка при $n=0,1,\ldots$ Тогда задача (2) имеет m собственных значений λ_i, $i=1,2,\ldots,m$, занумерованных с учетом кратности $q_1>\lambda_1>\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_m>q_2$, если выполнено условие

$$A^2(q_1-q_2)>\mu_m^2.$$

Следствие 2. Пусть $\Omega = \{x : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x_i < B,\ i = 1,2\}$, $\Omega \subseteq \Omega_1$, B — фиксированное положительное число, η_k^2, $k = 1, 2, \dots,$ — занумерованная в неубывающем порядке последовательность чисел, составленная из множества чисел вида $\pi^2(i^2+j^2)$, $i, j = 1, 2, \dots$ Тогда задача (2) имеет m собственных значений λ_i, $i = 1, 2, \dots, m$, занумерованных с учетом кратности $q_1 > \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > q_2$, если выполнено условие

$$B^2(q_1 - q_2) > \eta_m^2.$$

Следствия 1 и 2 вытекают из теорем 1, 2 и вариационных принципов для собственных значений задачи (3).

Литература

1. Содха М.С., Гхатак А.К. *Неоднородные оптические волноводы.* – М.: Связь, 1980. – 216 с.
2. Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д. *Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения (обзор)* // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24. – № 7. – С. 1245–1263.
3. Даутов Р.З., Карчевский Е.М. *Об одной спектральной задаче теории диэлектрических волноводов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39. – № 8. – С. 1348–1355.
4. Карчевский Е.М., Соловьев С.И. *Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 4. – С. 563–565.
5. Соловьев С.И. *Метод конечных элементов для симметричных задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 11. – С. 1311–1318.

Казанский государственный университет

Поступила
07.04.2000