ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 517.977

В.А. ДЫХТА, О.Н. САМСОНЮК

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

1. Введение

Данная работа посвящена доказательству необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума (ПМ) для задачи импульсного управления с траекториями из класса BV функций ограниченной вариации. Рассматриваемая задача характеризуется измеримой зависимостью по времени и липшицевой по фазовым координатам, а также неоднозначностью реакции динамической системы на импульсное управление — векторную меру. Последнее обстоятельство связано с тем, что не предполагается выполнение условия корректности типа Фробениуса [1], [2], которое гарантирует единственность траектории, соответствующей импульсному управлению и заданному начальному условию.

Задачи оптимального импульсного управления можно рассматривать как релаксационное расширение классических задач динамической оптимизации в системе вида

$$\dot{x} = f(t,x,V,u) + G(t,x,V)v, \quad \dot{V} = \|v\|, \tag{1}$$

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in K, \tag{2}$$

где U — компакт, K — выпуклый замкнутый конус, управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ измеримы и ограничены, $\|v\| = \sum\limits_{j=1}^{d(v)} |v_j|$, $d(z)$ обозначает размерность вектора z, второе уравнение в (1) введено для учета энергетических затрат на управление. Если не оговорено противное, то термины "измеримость" и "ограниченность" применительно к функциям относятся к мере Лебега $\mathcal{L}$, а все соотношения, содержащие измеримые функции, считаются выполненными $\mathcal{L}$-почти всюду. Поскольку множество K неограничено, то задачи оптимизации в системе (1), (2) могут не иметь решения в классе обычных процессов с управлениями из класса L_∞ измеримых ограниченных функций и траекториями из класса AC абсолютно непрерывных функций. Естественное расширение задачи получается замыканием (в некоторой слабой топологии) множества обычных процессов и связано с понятием обобщенного (об.) решения системы (1), (2).

Определение ([3]). Пара функций $(x(\cdot), V(\cdot))$, непрерывных справа на $(t_0, t_1]$ и имеющих ограниченную вариацию, называется об. решением системы (1), (2), если существует такая последовательность функций $\{x_n(\cdot),\ V_n(\cdot),\ u_n(\cdot),\ v_n(\cdot)\}$, удовлетворяющих на $[t_0, t_1]$ системе (1), (2), что

$$\sup_n \|v_n(\cdot)\|_{L_1} < \infty, \quad x_n \to x, \quad V_n \to V \ \text{слабо}^* \text{ в } \ BV$$

(тогда $(x_n(t), V_n(t)) \to (x(t), V(t))$ в точках непрерывности x, V, а также при $t = t_0,\ t_1$).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 98-01-00837.

Заметим, что если положить $\nu_n(t) = \int\limits_{t_0}^{t} v_n(\tau)d\tau$, то в силу теоремы Хелли последовательность $\{\nu_n(\cdot)\}$ можно считать сходящейся к некоторой функции $\nu(\cdot) \in BV$, которая порождает K-значную меру Лебега–Стилтьеса $d\nu$, т. е. $d\nu(B) \in K$ для любого борелевского множества $B \subset [t_0, t_1]$.

В [3] (см. также [2]) показано, что при стандартных предположениях непрерывности, липшицевости и не более чем линейного роста функций f, G по (x, V), а также выпуклости годографа, для любого об. решения $(x(\cdot), V(\cdot))$ найдутся K-значная мера Лебега–Стилтьеса $d\nu$, $\mathcal{L}$- и dV-измеримая ограниченная функция $u(\cdot)$, $\mathcal{L}$-измеримые функции $\omega_s(\cdot)$, определенные для каждого момента

$$s \in S_d(V) = \{s \mid [V(s)] = V(s) - V(s-) > 0\}$$

на отрезке $[0, d_s] = [0, [V(s)]]$, такие, что выполняются условия

$$\omega_s(\tau) \in K_1 = \{\omega \in R^{d(v)} \mid \omega \in K,\ \|\omega\| \leq 1\}, \quad \int_0^{d_s} \omega_s(\tau)d\tau = [\nu(s)];$$

функции $(x(\cdot), V(\cdot))$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с мерой

$$dx(t) = f(t, x(t), V(t), u(t))dt + G(t, x(t), V(t))d\nu_c(t) + \sum_{\substack{s \in S_d(V) \\ s \leq t}} [x(s)]\delta(t - s), \tag{3}$$

$$V(t) = \operatorname*{var}_{[t_0, t]} \nu_c(\cdot) + \sum_{\substack{s \in S_d(V) \\ s \leq t}} [V(s)], \quad V(t_0-) = 0, \tag{4}$$

где ν_c — непрерывная составляющая в разложении Лебега функции ν; скачки об. решения в точках $s \in S_d(V)$ находятся из условий

$$[x(s)] = z_s(d_s) - x(s-), \quad [V(s)] = z_{Vs}(d_s) - V(s-), \tag{5}$$

где функции $z_s(\tau)$, $z_{Vs}(\tau)$ при $\tau \in [0, d_s]$ являются решениями предельной системы

$$\begin{gathered} \frac{dz_s}{d\tau} = G(s, z_s, z_{Vs})\omega_s(\tau), \quad z_s(0) = x(s-), \\ \frac{dz_{Vs}}{d\tau} = 1, \quad z_{Vs}(0) = V(s-). \end{gathered} \tag{6}$$

В исследуемой ниже задаче оптимизации об. решений предположения относительно функций f, G ослаблены, а множество U считается переменным. Это естественно, поскольку при доказательстве необходимых условий оптимальности факт существования исследуемого решения постулируется, так что условия типа непрерывности по t и роста становятся излишними. Кроме того, ослабление требований касается в основном функции f, свойства которой при переходе к импульсному линейному управлению играют второстепенную роль и в действительности допускают ослабление.

Отметим, что наиболее общий ПМ для гладких задач импульсного управления при невыполнении условия корректности получен в [4] методом разрывной замены времени. Необходимые условия оптимальности при негладкой зависимости входных данных получены в [5]–[7] для более частных вариантов задачи (при отсутствии фазоограничений); в основе их доказательства лежит применение вариационного принципа Экланда. В данной статье используется интерпретация задачи импульсного управления как специфической многоэтапной задачи динамической оптимизации и ПМ для задачи управления мультипроцессами [8].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$l(b), \quad b = (x(t_0-), x(t_1), V(t_1)),$$

на множестве четверок $e = (x(\cdot), V(\cdot), u(\cdot), d\nu)$, которые удовлетворяют следующим условиям допустимости:

1) $x(\cdot)$, $V(\cdot)$ — непрерывные справа на $(t_0, t_1]$ функции ограниченной вариации (отрезок $T = [t_0, t_1]$ фиксирован);
2) $u(\cdot)$ — измеримая функция, удовлетворяющая ограничению $u(t) \in U(t)$, $t \in T$, где $U(t)$ — сечение множества $U \subset T \times R^{d(u)}$ при фиксированном t, т. е.

$$U(t) = \{u \mid (t, u) \in U\};$$

3) $d\nu(t)$ — K-значная мера Лебега–Стилтьеса на T, т. е. $d\nu(B) \in K$ для любого борелевского множества $B \subset T$;
4) компоненты набора e удовлетворяют ограничениям (3)–(6) при некотором выборе измеримых функций ω_s, $s \in S_d(V)$, со значениями в K_1;
5) $b \in C$.

Четверки, удовлетворяющие всем перечисленным условиям, будем называть допустимыми импульсными процессами (иногда вместе с соответствующими функциями $z^i(\cdot) = z_{s_i}(\cdot)$, $z_V^i(\cdot) = z_{V s_i}(\cdot)$, $\omega^i(\cdot) = \omega_{s_i}(\cdot)$, $s_i \in S_d(V)$, описывающими скачки траекторий). Через $\overline{e} = (\overline{x}(\cdot), \overline{V}(\cdot), \overline{u}(\cdot),\ d\overline{\nu})$ будет обозначаться допустимый импульсный процесс, исследуемый на оптимальность вместе с соответствующими функциями $\overline{z}^i(\cdot)$, $\overline{z}_V^i(\cdot)$, $\overline{\omega}^i(\cdot)$, $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})$.

Поставленная задача (обозначим ее через $\mathcal{P}$) будет исследоваться при предположениях:

(A1) множество $S_d(\overline{V})$ конечно и мера $d\overline{\nu}$ не имеет непрерывной сингулярной составляющей, т. е.

$$d\overline{\nu}(t) = \overline{v}(t)dt + \sum_{\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})} \overline{c}^{\,i} \delta(t - \overline{s}_i),$$

причем $\overline{v}(\cdot)$ — измеримая ограниченная функция со значениями в K;

(A2) множество $U \subset T \times R^{d(u)}$ борелевское, $K \subset R^{d(v)}$ — замкнутый выпуклый конус, $C \subset R^{d(x)} \times R^{d(x)} \times R$ — замкнутое множество;

(A3) при всех (x, V) функция $(t, u) \to f(t, x, V, u)$ $\mathcal{L} {\times} \mathcal{B}$-измерима ([9], с. 154);

(A4) существуют окрестность $\mathcal{Q}$ множества

$$\overline{\operatorname{graph}}\,\{\overline{x}(\cdot), \overline{V}(\cdot)\} = \{(t, x, V) \mid t \in T,\ x \in [\overline{x}(t-), \overline{x}(t+)],\ V \in [\overline{V}(t-), \overline{V}(t+)]\}$$

и число $M > 0$ такие, что выполняются условие Липшица

$$|f(t,x,V,u) - f(t,x',V',u)| \le M(|x - x'| + |V - V'|)\ \ \forall\,(t,x,V,u),\ (t,x',V',u) \in \mathcal{Q} \times U(t)$$

и условие ограниченности

$$|f(t,x,V,u)| \le M \ \ \forall\,(t,x,V,u) \in \mathcal{Q} \times U(t);$$

(A5) матрица G непрерывно дифференцируема;

(A6) функция l локально липшицева.

3. Формулировка принципа максимума

Введем функции

$$H(t,x,V,\psi,u,v)=\langle\psi,f(t,x,V,u)+G(t,x,V)v\rangle,$$
$$H_0(t,x,V,\psi,u)=\langle\psi,f(t,x,V,u)\rangle,\quad H_1(t,x,V,v,\psi)=\langle\psi,G(t,x,V)v\rangle,$$
$$\mathcal{H}_0(t,s)=\sup_{u\in U(t)}H_0(t,\overline{x}(s),\overline{V}(s),\psi(s),u).$$

Если $\varphi(t,x,V,\psi,v)$ — заданная функция, то через

$$\varphi|_{\theta(s_i)}(s_i,z^i,z_V^i,p^i,\omega^i) \tag{7}$$

будет обозначаться замена переменных $(t,x,V,\psi,v)\to(s_i,z^i,z_V^i,p^i,\omega^i)$ в функции φ. Запись типа $H_0(t)$ будет означать вычисление функции H_0 вдоль исследуемого процесса $\overline{e}$, а запись $H_0(t,u)$ — фиксирование всех опущенных аргументов функции H_0 вдоль процесса $\overline{e}$ (в данном случае $x=\overline{x}(t)$, $V=\overline{V}(t)$, $\psi=\psi(t)$, где $\psi(t)$ — траектория двойственных переменных). Точно так же следует понимать обозначение $\varphi|_{\theta(s_i)}(\tau)$ для функции (7).

Поскольку моменты действия импульсов для допустимых процессов не фиксируются, а зависимость функции f по t лишь измеримая, то для корректной записи условий оптимальности моментов скачка траектории нам понадобится следующее понятие из теории функций [8].

Пусть I — интервал из R, $s\in I$ — заданная точка и $\varphi:I\to R^n$ — измеримая функция. Определим множество $\operatorname*{ess}_{t\to s}\varphi(t)$ существенных значений функции φ в точке s как совокупность всех векторов $\eta\in R^n$, для которых при любом $\varepsilon>0$

$$\mathcal{L}\text{-mes}\{t\mid s-\varepsilon<t<s+\varepsilon,\ |\eta-\varphi(t)|<\varepsilon\}>0.$$

Легко проверить, что если s — точка непрерывности φ, то $\operatorname*{ess}_{t\to s}\varphi(t)=\{\varphi(s)\}$, а если s — точка разрыва 1-го рода, то $\operatorname*{ess}_{t\to s}\varphi(t)=\{\varphi(s-),\varphi(s+)\}$.

Если $g(x,y)$ — липшицева функция, то символ $\partial g(\overline{x},\overline{y})$ обозначает обобщенный градиент Кларка по (x,y), вычисленный в точке $(\overline{x},\overline{y})$ ([9], с. 17). Символ $\operatorname{co}C$ означает выпуклую оболочку множества C, а $N_C(b)$ — нормальный конус к C в точке b ([9], с. 54).

Сформулируем принцип максимума.

Теорема 1. *Пусть $\overline{e}$ — оптимальный процесс в задаче $\mathcal{P}$. Тогда существуют число $\alpha\in\{0,1\}$, функции $\psi:T\to R^{d(x)}$, $\psi_V:T\to R$ и определенные для каждого $\overline{s}_i\in S_d(\overline{V})$ функции $p^i:[0,\overline{d}_i]\to R^{d(x)}$, $p_V^i:[0,\overline{d}_i]\to R$ такие, что выполнены следующие условия:*

1) *нетривиальности*

$$\alpha+|\psi(t_1+)|+|\psi_V(t_1+)|>0;$$

2) *функции $\psi(\cdot)$, $\psi_V(\cdot)$ кусочно абсолютно непрерывны, на интервалах $(\overline{s}_{i-1},\overline{s}_i)$ удовлетворяют дифференциальному включению*

$$\big(-\dot{\psi}(t)-H_{1x}(t),\ -\dot{\psi}_V(t)-H_{1V}(t)\big)\in\partial_{(x,V)}H_0(t);$$

функции $p^i(\cdot)$, $p_V^i(\cdot)$ абсолютно непрерывны, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dp^i(\tau)}{d\tau}=-H_{1x}|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau),\quad \frac{dp_V^i(\tau)}{d\tau}=-H_{1V}|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau)$$

и связаны с $\psi(\cdot)$, $\psi_V(\cdot)$ условиями допустимости скачка

$$\psi(\overline{s}_i-)=p^i(0),\quad \psi(\overline{s}_i+)=p^i(\overline{d}_i),\quad \psi_V(\overline{s}_i-)=p_V^i(0),\quad \psi_V(\overline{s}_i+)=p_V^i(\overline{d}_i);$$

3) *трансверсальности*

$$(\psi(t_0-),-\psi(t_1+),-\psi_V(t_1+))\in\alpha\partial l(\overline{b})+N_C(\overline{b}),\quad \overline{b}=(\overline{x}(t_0-),\overline{x}(t_1),\overline{V}(t_1));$$

4) *условия максимума*

$$H_0(t)=\max_{u\in U(t)} H_0(t,\overline{x}(t),\overline{V}(t),u,\psi(t)),\quad t\in T,$$

$$\langle H_v(t),\overline{v}(t)\rangle+\psi_V(t)\|\overline{v}(t)\|=0=\max_{v\in K}(\langle H_v(t),v\rangle+\psi_V(t)\|v\|),\quad t\in T, \tag{8}$$

$$\langle H_v|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau),\overline{\omega}^i(\tau)\rangle+p_V^i(\tau)=0=\max_{\omega\in K_1}\langle H_v|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau),\omega\rangle+p_V^i(\tau), \tag{9}$$

$$\tau\in[0,\overline{d}_i],\quad \overline{s}_i\in S_d(\overline{V});$$

5) *условие оптимальности моментов импульса* $s\in S_d(\overline{V})$

$$\operatorname{co}\operatorname*{ess}_{t\to s}\mathcal{H}_0(t,s+)-\operatorname{co}\operatorname*{ess}_{t\to s}\mathcal{H}_0(t,s-)\ni\int_0^{[\overline{V}(s)]}H_{1t}\Big|_{\theta(s)}(\tau)d\tau+\gamma_s,$$

$$\text{где}\quad \gamma_s\begin{cases}\geq 0, & s=t_0;\\ =0, & s\in(t_0,t_1);\\ \leq 0, & s=t_1.\end{cases}$$

Замечание. Рассмотрим типичный для приложений случай $K=R_+^{d(v)}$. Тогда $S_d(\overline{V})=S_d(\overline{\nu})$. Условие максимума (8) примет вид

$$H_{v_j}(t)+\psi_V(t)\begin{cases}\leq 0, & t\in T;\\ =0, & t\in S_c(\overline{\nu}),\end{cases}\qquad j=\overline{1,d(v)},$$

где $S_c(\overline{\nu})$ — множество моментов времени, на котором сосредоточена абсолютно непрерывная составляющая меры $\overline{\nu}$; условие максимума (9) преобразуется к виду

$$H_{v_j}|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau)+p_V^i(\tau)\begin{cases}\leq 0, & \tau\in[0,\overline{d}_i];\\ =0, & \text{если } \overline{\omega}_j^i(\tau)>0,\end{cases}\qquad j=\overline{1,d(\nu)}.$$

При этом, если $p_V^i(\tau)<0$, то $|\overline{\omega}^i(\tau)|=1$; при строгом неравенстве на $[0,\overline{d}_i]$ это равносильно равенству $\overline{d}_i=|\overline{c}^i|$.

В гладком случае теорема 1 переходит в ПМ из [4]. Если $S_d(\overline{V})=\emptyset$, то — в ПМ классической задачи оптимального управления ([10], гл. 2, § 3, с. 98).

Проиллюстрируем применение принципа максимума на следующем примере. Требуется минимизировать функционал

$$I(d\nu)=V(1)-x_3(1)$$

на множестве об. решений управляемой системы

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=v_1, && x_1(0)=0,\ x_1(1)=x_{11},\\ &\dot{x}_2=x_1v_2, && x_2(0)=0,\ x_2(1)=x_{21},\\ &\dot{x}_3=a(t)x_1+b(t)x_2, && x_3(0)=0,\end{aligned}$$

$$v_1(t)\geq 0,\quad v_2(t)\geq 0.$$

Здесь

$$a(t)=\begin{cases}a_1, & t\leq\eta;\\ a_2, & t>\eta,\end{cases}\qquad b(t)=\begin{cases}b_1, & t\leq\xi;\\ b_2, & t>\xi,\end{cases}$$

a_1, $b_1<0$, a_2, $b_2>0$, $\xi<\eta$, $\xi,\eta\in(0,1)$ — фиксированные точки и не выполняется условие корректности.

Использование ПМ в данном примере позволяет получить следующий результат: оптимальная мера имеет только дискретную составляющую

$$d\overline{\nu}_1 = x_{11}\delta(t-\overline{s}), \quad d\overline{\nu}_2 = \frac{x_{21}}{x_{11}}\delta(t-\overline{s}),$$

где $\overline{s} = \xi$, если $a_1x_{11} + b_2x_{21} \geq 0$, или $\overline{s} = \eta$, если $a_1x_{11} + b_2x_{21} \leq 0$. В точке импульса эволюция скачка оптимальной траектории происходит таким образом, что сначала увеличивается x_1-компонента и лишь затем x_2-компонента. Соответствующее предельное управление имеет вид

$$\overline{\omega}_1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in [0,\tau_1]; \\ 0, & \tau \in (\tau_1, \overline{d}], \end{cases} \qquad \overline{\omega}_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0,\tau_1]; \\ 1, & \tau \in (\tau_1, \overline{d}], \end{cases}$$

где $\tau_1 = x_{11}$, $\overline{d} = x_{11} + x_{21}/x_{11}$.

4. Доказательство принципа максимума

Проведем доказательство по шагам.

Шаг 1. Зафиксируем любое конечное множество моментов времени

$$\overline{S} = \{\overline{s}_0, \ldots, \overline{s}_N\} \supseteq S_d(\overline{V}), \tag{10}$$

в котором

$$t_0 \leq \overline{s}_0 < \overline{s}_1 \cdots < \overline{s}_N \leq t_1, \tag{11}$$

и положим

$$\overline{\omega}^i(\tau) \in K_1 \ \text{ произвольно, } \ \overline{d}_i = [\overline{V}(\overline{s}_i)] = 0 \ \ \forall \overline{s}_i \notin S_d(\overline{V}). \tag{12}$$

Таким образом, исследуемому процессу сопоставляется множество фиктивных моментов импульса $\overline{S} \setminus S_d(\overline{V})$, чтобы допустить к сравнению процессы с нефиксированным (но конечным) числом импульсов.

Полагая для удобства обозначений $\overline{s}_{-1} = t_0$, $\overline{s}_{N+1} = t_1$, обозначим через

$$\overline{x}^i(\cdot), \quad \overline{V}^i(\cdot), \quad \overline{u}^i(\cdot), \quad \overline{v}^i(\cdot) \tag{13}$$

сужения функций $\overline{x}$, $\overline{V}$, $\overline{u}$, $\overline{v}$ на отрезок $[\overline{s}_{i-1}, \overline{s}_i]$, $i = \overline{0, N+1}$ (в правых концах отрезков траекторные компоненты доопределяются по непрерывности, так что $\overline{x}^i, \overline{V}^i \in AC$, а $\overline{u}^i$, $\overline{v}^i$ измеримы).

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления $\mathcal{P}_N$:

$$\begin{gathered} \dot{x}^i = f(t, x^i, V^i, u^i) + G(t, x^i, V^i)v^i, \quad \dot{V}^i = \|v^i\|, \\ u^i(t) \in U(t), \quad v^i(t) \in K, \quad t \in [s_{i-1}, s_i], \quad i = \overline{0, N+1}; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\frac{dz^i}{d\tau} = G(s_i, z^i, z_V^i)\omega^i, \quad \frac{dz_V^i}{d\tau} = 1, \quad \omega^i(\tau) \in K_1, \quad \tau \in [0, d_i], \quad i = \overline{0, N}; \tag{15}$$

$$x^i(s_i) = z^i(0), \ \ V^i(s_i) = z_V^i(0), \quad x^{i+1}(s_i) = z^i(d_i), \ \ V^{i+1}(s_i) = z_V^i(d_i), \quad i = \overline{0, N}; \tag{16}$$

$$d_i \geq 0, \ \ i = \overline{0, N}, \ \ s_{-1} = t_0, \ \ s_{N+1} = t_1, \quad t_0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_N \leq t_1; \tag{17}$$

$$\rho \in C, \quad V^0(t_0) = 0, \quad l(\rho) \to \min, \tag{18}$$

где $\rho = (x^0(t_0), x^{N+1}(t_1), V^{N+1}(t_1))$ — концевой вектор.

В задаче $\mathcal{P}_N$ минимум ищется по всем мультинаборам

$$\xi = \Big(\{(s_{i-1}, s_i, x^i, V^i, u^i, v^i)\}_{i=\overline{0,N+1}}, \{d_i, z^i, z_V^i, \omega^i\}_{i=\overline{0,N}}\Big),$$

составляющие которых удовлетворяют ограничениям (14)–(18).

Исследуемому импульсному процессу $\overline{e}$ соответствует в силу (10)–(13) мультинабор $\overline{\xi}$, допустимый ограничениями задачи $\mathcal{P}_N$. Обратно, любой допустимый мультинабор ξ задачи $\mathcal{P}_N$ порождает допустимый импульсный процесс e задачи $\mathcal{P}$, который определяется соотношениями

$$x(t) = x^i(t), \quad V(t) = V^i(t), \quad u(t) = u^i(t), \quad v(t) = v^i(t), \quad t \in [s_{i-1}, s_i),$$
$$d\nu(t) = v(t)dt + \sum_{s_i \le t} c^i \delta(t - s_i), \quad c^i = \int_0^{d_i} \omega^i(\tau) d\tau.$$

Отсюда вытекает

Предложение 1. *Если процесс $\overline{e}$ оптимален в задаче $\mathcal{P}$, то соответствующий ему мультинабор $\overline{\xi}$ оптимален в задаче $\mathcal{P}_N$.*

Шаг 2. Необходимые условия оптимальности для задачи $\mathcal{P}_N$ и $\mathcal{P}$ будут получены применением ПМ для негладкой многоэтапной задачи динамической оптимизации [8]. Постановка этой задачи и ПМ анонсируются ниже.

Пусть динамика управляемого объекта описывается k управляемыми динамическими системами

$$\dot{y}_i = \varphi_i(t, y_i, w_i), \quad w_i(t) \in W_i(t), \quad t \in \Delta_i, \tag{19}$$

где $y_i : \Delta_i \to R^{n_i}$ — абсолютно непрерывные функции, $w_i : \Delta_i \to R^{m_i}$ — измеримые функции (управления), $W_i(t) = \{w \mid (t, w) \in W_i\}$ — сечение множества $W_i \subset R \times R^{m_i}$ при фиксированном t, отрезки $\Delta_i = [t_0^i, t_1^i]$ не фиксированы, $t_0^i \le t_1^i$ (случай $t_0^i = t_1^i$ не исключается). Системы (19) связаны совместным ограничением типа включения на граничные значения моментов времени и концы траекторий этапов $y_i(t_0^i) = y_{i0}$, $y_i(t_1^i) = y_{i1}$, вектор

$$q = \left((t_0^i, t_1^i, y_{i0}, y_{i1})\right)_{i=\overline{1,k}} \in Q, \tag{20}$$

а $Q \subset \prod_{i=1}^{k} R \times R \times R^{n_i} \times R^{n_i}$ — заданное множество.

Четверку $(t_0^i, t_1^i, y_i(\cdot), w_i(\cdot))$, удовлетворяющую системе (19), назовем i-м подпроцессом, а составленный из них упорядоченный мультинабор — мультипроцессом. Допустимые мультипроцессы характеризуются выполнением ограничения (20). На множестве допустимых мультипроцессов рассматривается задача (обозначим ее через $\mathcal{P}_M$)

$$J(q) \to \min,$$

где J — скалярная функция.

Пусть $\{(T_0^i, T_1^i, \overline{y}_i(\cdot), \overline{w}_i(\cdot))\}_{i=\overline{1,k}}$ — исследуемый на оптимальность допустимый мультипроцесс и выполнены следующие предположения:

- **(H1)** $\forall y \in R^{n_i}$ функция $(t, w) \to \varphi_i(t, y, w)$ $\mathcal{L} \times B$-измерима, $i = \overline{1,k}$;
- **(H2)** существуют окрестность V_i графика функции $\overline{y}_i(\cdot)$ и число $M > 0$ такие, что для $i = \overline{1,k}$ выполнено условие ограниченности

$$|\varphi_i(t, y, w)| \le M \quad \forall (t, y, w) \in V_i \times W_i(t)$$

  и условие Липшица

$$|\varphi_i(t, y', w) - \varphi_i(t, y, w)| \le M|y' - y| \quad \forall\, (t, y', w),\ (t, y, w) \in V_i \times W_i(t);$$

- **(H3)** множества W_i измеримы по Борелю $\forall\, i = \overline{1,k}$;
- **(H4)** множество Q замкнуто;
- **(H5)** функция J локально липшицева.

В этих предположениях справедлив следующий ПМ, в котором используются функции Понтрягина

$$H_i(t,y,p_i,w) = \langle p_i, \varphi(t,y,w)\rangle.$$

Теорема 2 ([8]). *Пусть* $\{(T_0^i, T_1^i, \overline{y}_i(\cdot), \overline{w}_i(\cdot))\}_{i=\overline{1,k}}$ *— оптимальный мультипроцесс в задаче* $\mathcal{P}_M$. *Тогда существуют числа* $\alpha \in \{0,1\}$, $h_0^i, h_1^i \in R$ *и абсолютно непрерывные функции* $p_i : [T_0^i, T_1^i] \to R^{n_i}$ *такие, что выполняются условия*

1) *нетривиальности* $\alpha + \sum\limits_{i=1}^{k} |p_i(T_1^i)| > 0$;
2) *функции* p_i *удовлетворяют сопряженным включениям*
$$-\dot{p}_i(t) \in \partial_y H_i(t, \overline{y}_i(t), p_i(t), \overline{w}_i(t)), \quad t \in [T_0^i, T_1^i], \quad i = \overline{1,k};$$
3) *условие максимума*
$$H_i(t, \overline{y}_i(t), p_i(t), \overline{w}_i(t)) = \max_{w \in W_i(t)} H_i(t, \overline{y}_i(t), p_i(t), w), \quad t \in [T_0^i, T_1^i], \quad i = \overline{1,k};$$
4) *условие оптимальности моментов времени* T_0^i, T_1^i
$$h_0^i \in \mathrm{co} \operatorname*{ess}_{t \to T_0^i} \big[\sup_{w \in W_i(t)} H_i(t, \overline{y}_i(T_0^i), p_i(T_0^i), w) \big],$$
$$h_1^i \in \mathrm{co} \operatorname*{ess}_{t \to T_1^i} \big[\sup_{w \in W_i(t)} H_i(t, \overline{y}_i(T_1^i), p_i(T_1^i), w) \big], \quad i = \overline{1,k};$$
5) *условия трансверсальности*
$$\big((-h_0^i, h_1^i, p_i(T_0^i), -p_i(T_1^i))\big)_{i=\overline{1,k}} \in N_Q + \alpha \partial J,$$
где нормальный конус N_Q *и обобщенный градиент* ∂J *Кларка берутся в точке* $\overline{q} = \big((T_0^i, T_1^i, \overline{y}_{i0}, \overline{y}_{i1})\big)_{i=\overline{1,k}}$.

Замечания. 1) Если i-я подсистема автономна, то

$$h_0^i = h_1^i = \sup_{w \in W_i(t)} H_i(\overline{y}_i(t), p_i(t), w).$$

2) Если $T_0^i = T_1^i$, то $h_0^i = h_1^i$ ([8], с. 1083).

Шаг 3. а) Заметим сначала, что т. к. в задаче $\mathcal{P}_M$ динамические системы связаны лишь совместным ограничением на концевые значения моментов времени и траекторий, то наличие в них общей независимой переменной (t) не играет существенной роли, теорема 2 естественным образом распространяется на случай различающихся переменных типа времени (в задаче $\mathcal{P}_N$ это t и τ).

б) Чтобы избавиться в задаче $\mathcal{P}_N$ от параметров s_i в предельных подсистемах, положим

$$\frac{ds_i}{d\tau} = 0, \quad i = \overline{0,N}, \tag{21}$$

и перепишем концевые ограничения, связывающие этапы задачи $\mathcal{P}_N$, в эквивалентном виде (с переобозначением $t_0^i = s_{i-1}$, $t_1^i = s_i$ для $i = \overline{0, N+1}$)

$$\begin{aligned}
&(x^0(t_0^0), x^{N+1}(t_1^{N+1}), V^{N+1}(t_1^{N+1})) \in C, \quad (x^{i+1}(t_0^{i+1}), z^i(d_i)) \in \{(a,a) \mid a \in R^{d(x)}\}, \ \ i = \overline{0,N};\\
&(x^i(t_1^i), z^i(0)) \in \{(a,a) \mid a \in R^{d(x)}\}, \quad i = \overline{0,N}; \quad (V^{i+1}(t_0^{i+1}), z_V^i(d_i)) \in \{(a,a) \mid a \in R\}, \ \ i = \overline{0,N};\\
&(V^i(t_1^i), z_V^i(0)) \in \{(a,a) \mid a \in R\}, \quad i = \overline{0,N}; \quad (s_i(0), t_0^{i+1}, t_1^i) \in \{(a,a,a) \mid a \in R\}, \ \ i = \overline{1,N-1};\\
&(s_0(0), t_0^1, t_1^0) \in \{(a,a,a) \mid a \geq t_0\}, \quad (s_N(0), t_0^{N+1}, t_1^N) \in \{(a,a,a) \mid a \leq t_1\},\\
&t_0^0 = t_0, \ \ t_1^{N+1} = t_1, \ \ V^0(t_0^0) = 0, \ \ \tau_0^i = 0, \ \ d_i \geq 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

в) Для любого натурального числа $j > \|\overline{v}(\cdot)\|_\infty$ положим $K_j = K \cap B_j$, где B_j — замкнутый шар радиуса j в пространстве $R^{d(v)}$, и рассмотрим задачу $\mathcal{P}_{Nj}$, которая получается из $\mathcal{P}_N$ заменой ограничения $v^i(t) \in K$ на $v^i(t) \in K_j$, связующих концевых ограничений (16), (17), (18) на (22) и добавлением дифференциальных связей (21) (остальные уравнения динамики не меняются).

Ясно, что исследуемый оптимальный мультипроцесс естественным образом вкладывается в множество допустимых мультипроцессов каждой задачи $\mathcal{P}_{Nj}$, причем является в них оптимальным. Ясно также, что к задаче $\mathcal{P}_{Nj}$ применима теорема 2.

Шаг 4. Рассмотрим ПМ для мультипроцесса $\overline{\xi}$ в фиксированной задаче $\mathcal{P}_{Nj}$ (индекс j у двойственных переменных для краткости будет опускаться).

а) В роли функций Понтрягина для этапов по времени t и τ будут выступать соответственно функции

$$H^i = H(t, x^i, V^i, \psi^i, u^i) + \psi_V^i \|v^i\|, \quad \Pi^i = H_1(s_i, z^i, z_V^i, p^i, \omega^i) + p_V^i.$$

Отсюда ясно, что для сопряженных переменных в ПМ войдут следующие дифференциальные включение и уравнения:

$$(-\dot{\psi}^i(t) - H_{1x}^i(t), -\dot{\psi}_V^i(t) - H_{1V}^i(t)) \in \partial_{(x,V)} H_0^i(t), \quad t \in [\overline{s}_{i-1}, \overline{s}_i], \quad i = \overline{0, N+1}$$

(разложение функций H^i в сумму $H_0^i + H_1^i$ аналогично разложению H);

$$-\dot{p}^i(\tau) = \Pi_{z^i}^i(\tau) = H_{1x}\big|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau), \quad -\dot{p}_V^i(\tau) = \Pi_{z_V^i}^i(\tau) = H_{1V}\big|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau),$$
$$-\dot{p}_s^i(\tau) = \Pi_{s_i}^i(\tau) = H_{1t}\big|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau), \quad \tau \in [0, \overline{d}_i], \quad i = \overline{0, N}.$$

Очевидно, что эти включение и уравнения перейдут в сопряженные системы из ПМ для задачи $\mathcal{P}$. То же самое относится к условиям максимума по управлениям с той лишь разницей, что максимум по v-компонентам будет браться по множеству K_j, т. е. пока имеем равенство

$$H_1(t) + \psi_V(t)\|\overline{v}(t)\| = \max_{v \in K_j}(H_1(t, v) + \psi_V(t)\|v\|). \tag{23}$$

Кроме того, отметим, что в силу автономности предельных подпроцессов их гамильтониан постоянен вдоль оптимали (замечание 1) к теореме 2). Это дает условие

$$H_1\big|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau) + p_V^i(\tau) = \max_{\omega \in K_1} \Pi^i(\tau, \omega) = h^i \tag{24}$$

при $\tau \in [0, \overline{d}_i]$ и некотором $h^i \in R$. Оно совпадает с условием максимума по предельному управлению ω^i (9) в теореме 1, если только окажется, что $h^i = 0 \ \forall i = \overline{0, N}$.

Проанализируем остальные условия ПМ в задаче $\mathcal{P}_{Nj}$.

б) Обратимся к условиям трансверсальности и нормировки.

Прежде напомним свойства нормального конуса, которые будут нами использоваться [9].

Предложение 2. *Пусть $C \subset R^m \times R^n$ — замкнутое множество, $(x, y) \in C$, тогда*

$$N_{\{(a,a,b)|(a,b)\in C\}}(x, y) \subset \{(p, q, r) \mid (p + q, r) \in N_C(x, y)\}.$$

Предложение 3. *Пусть $C_1 \subset R^m$, $C_2 \subset R^n$ — замкнутые множества, $x \in C_1$, $y \in C_2$, тогда*

$$N_{C_1 \times C_2}(x, y) = N_{C_1}(x) \times N_{C_2}(y).$$

Используя предложение 3, из условий трансверсальности при $\rho = \overline{\rho}$ получаем включение

$$(\psi^0(t_0), -\psi^{N+1}(t_1), -\psi_V^{N+1}(t_1)) \in \alpha\partial l(\overline{\rho}) + N_C(\overline{\rho}).$$

С учетом переобозначения концевого вектора $b \to \rho$ и равенств

$$\psi^0(t_0) = \psi(t_0-), \quad \psi^{N+1}(t_1) = \psi(t_1+), \quad \psi_V^{N+1}(t_1) = \psi_V(t_1+)$$

получаем условия трансверсальности из теоремы 1.

Используя предложение 2, запишем условия трансверсальности для промежуточных и предельных подпроцессов

$$\psi^{i+1}(\overline{s}_i) - p^i(\overline{d}_i) = 0, \quad -\psi^i(\overline{s}_i) + p^i(0) = 0, \quad i = \overline{0,N}; \tag{25}$$

$$\psi_V^{i+1}(\overline{s}_i) - p_V^i(\overline{d}_i) = 0, \quad -\psi_V^i(\overline{s}_i) + p_V^i(0) = 0, \quad i = \overline{0,N}; \tag{26}$$

$$p_s^i(0) - h_0^{i+1} + h_1^i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}; \tag{27}$$

$$p_s^0(0) - h_0^1 + h_1^0 \in N_{\{a \in R | t_0 - a \le 0\}}(\overline{s}_0) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } t_0 < \overline{s}_0; \\ \{a \in R \mid a \le 0\}, & \text{если } t_0 = \overline{s}_0, \end{cases} \tag{28}$$

$$p_s^N(0) - h_0^{N+1} + h_1^N \in N_{\{a \in R | a - t_1 \le 0\}}(\overline{s}_N) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \overline{s}_N < t_1; \\ \{a \in R \mid a \ge 0\}, & \text{если } \overline{s}_N = t_1, \end{cases} \tag{29}$$

$$p_s^i(\overline{d}_i) = 0, \quad i = \overline{0,N}; \tag{30}$$

$$h_0^0 \in R, \;\; h_1^{N+1} \in R, \;\; \psi_V^0(t_0) \in R,$$

$$h^i \in N_{\{a \in R | a \ge 0\}}(\overline{d}_i) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } \overline{d}_i > 0; \\ \{a \in R \mid a \le 0\}, & \text{если } \overline{d}_i = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Из условий (25), (26) сразу следуют условия допустимости скачков сопряженных переменных в теореме 1.

Условие нетривиальности для задачи $\mathcal{P}_{Nj}$ имеет вид

$$\alpha + |\widetilde{\psi}^0(t_0)| + |\widetilde{\psi}^{N+1}(t_1)| + \sum_{i=1}^{N} |\widetilde{\psi}^i(\overline{s}_i)| + \sum_{i=0}^{N} |\widetilde{p}^i(\overline{d}_i)| > 0. \tag{32}$$

Здесь $\widetilde{\psi}^i = (\psi^i, \psi_V^i)$, $\widetilde{p}^i = (p^i, p_V^i, p_s^i)$ и напомним, что $\widetilde{\psi}^0(t_0) = (\psi(t_0-), \psi_V(t_0-))$, $\widetilde{\psi}^{N+1}(t_1) = (\psi(t_1+), \psi_V(t_1+))$.

Хотя на первый взгляд данное условие нетривиальности сильнее, чем в ПМ задачи $\mathcal{P}$, они равносильны в силу линейности и однородности сопряженных включений относительно $\widetilde{\psi}^i$, $\widetilde{p}^i$: допущение $\alpha = 0$, $\psi(t_1+) = 0$, $\psi_V(t_1+) = 0$ приводит к нарушению условия (32), в чем можно убедиться путем последовательного рассмотрения включений в обратном времени.

в) Обратимся к условиям оптимальности моментов времени. Начнем с предельных подпроцессов. Заметим, что если $\overline{d}_i > 0$ (т. е. импульс в точке $\overline{s}_i$ есть), то $h_i = 0$ в силу (31). Отсюда в дополнение к условию максимума (24) получаем, что

$$H_1\big|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau) + p_V^i(\tau) = h^i = 0 \quad \text{при } \; \overline{d}_i > 0, \quad \tau \in [0, \overline{d}_i].$$

Это совпадает с условием максимума (9) в теореме 1.

Согласно теореме 2 числа h_0^i, h_1^i определяются следующим образом (мы учитываем, что ограничения на управление u, v разделены и функция H_1 непрерывна):

$$\begin{aligned} h_0^{i+1} \in \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{s}_i} \Big(\sup_{\substack{u \in U(t) \\ v \in K_j}} H(t, \overline{x}^{i+1}(\overline{s}_i), \overline{V}^{i+1}(\overline{s}_i), \psi^{i+1}(\overline{s}_i), \psi_V^{i+1}(\overline{s}_i), u, v) \Big) = \\ = \operatorname{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{s}_i} \Big(\sup_{u \in U(t)} H_0(t, \overline{x}(\overline{s}_i+), \overline{V}(\overline{s}_i+), \psi(\overline{s}_i+), u) \Big) + \\ + \max_{v \in K_j} \big(H_1(s, \overline{x}(\overline{s}_i+), \overline{V}(\overline{s}_i+), \psi(\overline{s}_i+), v) + \psi_V(\overline{s}_i+) \|v\| \big) \end{aligned} \tag{33}$$

и аналогично

$$h_1^i \in \mathrm{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{s}_i} \Big(\sup_{u \in U(t)} H_0(t, \overline{x}(\overline{s}_i-), \overline{V}(\overline{s}_i-), \psi(\overline{s}_i-), u) \Big) + \\ + \max_{v \in K_j} \big(H_1(s, \overline{x}(\overline{s}_i-), \overline{V}(\overline{s}_i-), \psi(\overline{s}_i-), v) + \psi_V(\overline{s}_i-)\|v\| \big). \quad (34)$$

Шаг 5. Итак, мы доказали, что при любом $j > \|\overline{v}(\cdot)\|_\infty$ мультипроцесс $\overline{\xi}$ удовлетворяет ПМ в задаче $\mathcal{P}_{Nj}$, который содержит все условия теоремы 1, за исключением условия максимума по управлению v и условий оптимальности моментов $\overline{s}_i \in S_d(\overline{V})$ (вместо них имеем равенства (23) и (27)–(29)). Завершить доказательство нужно предельным переходом при $j \to \infty$.

Заметим, что при $j > 2\|\overline{v}(\cdot)\|_\infty$ из условия (23) следует равенство

$$\langle H_v(t), \overline{v}(t) \rangle + \psi_V(t)\|\overline{v}(t)\| = 0, \quad t \in T$$

(левая часть совпадает с левой частью равенства (23)). Тогда максимумы по v в соотношениях (33), (34) равны нулю и эти соотношения сводятся к включениям

$$h_0^{i+1} \in \mathrm{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{s}_i} \mathcal{H}_0(t; \overline{s}_i+), \quad h_1^i \in \mathrm{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{s}_i} \mathcal{H}_0(t; \overline{s}_i-).$$

Используя эти включения и интегральное представление

$$p_s^i(0) = \int_0^{\overline{d}_i} H_{1t}\big|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau) d\tau$$

(оно вытекает из (30) и уравнений для $p_s^i(\tau)$), преобразуем равенства (27) и соотношения (28), (29) к включениям

$$\mathrm{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{s}_i} \mathcal{H}_0(t; \overline{s}_i+) - \mathrm{co} \operatorname*{ess}_{t \to \overline{s}_i} \mathcal{H}_0(t; \overline{s}_i-) \ni \int_0^{\overline{d}_i} H_{1t}\big|_{\theta(\overline{s}_i)}(\tau) d\tau + \gamma_{s_i},$$

где $\gamma_{s_0} \geq 0$, $\gamma_{s_0}(t_0 - \overline{s}_0) = 0$, $\gamma_{s_N} \leq 0$, $\gamma_{s_N}(\overline{s}_N - t_1) = 0$, $\gamma_{s_i} = 0$, $i = \overline{1, N-1}$. Полученные включения тождественны условиям оптимальности моментов импульса теоремы 1.

Итак, при всех достаточно больших j выполнение ПМ для процесса $\overline{\xi}$ в задаче $\mathcal{P}_{Nj}$ равносильно теореме 1, за исключением взятия максимума по множеству K_j в условии (23) вместо K. При $j \to \infty$ все стационарные (по j) условия остаются неизменными, а (23) с очевидностью переходит в недостающее условие максимума по конусу K.

Этим доказательство ПМ завершается.

5. Заключение

Полученные в работе необходимые условия оптимальности об. решений с конечным числом точек разрыва имеют достаточно широкий спектр приложений. Метод их доказательства допускает распространение и на более сложные классы негладких задач импульсного управления, например, на задачи с промежуточными ограничениями на траекторию в общих нелинейных системах, для которых известно описание структуры разрывных об. траекторий.

Литература

1. Миллер Б.М. *Условия оптимальности в задаче управления системой, описываемой дифференциальным уравнением с мерой* // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 6. – С. 60–72.
2. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы: модели и приложения.* – М.: Наука, 1991. – 256 с.
3. Миллер Б.М. *Оптимизация динамических систем с обобщенными управлениями* // Автоматика и телемеханика. – 1989. – № 6. – С. 23–34.
4. Миллер Б.М. *Условия оптимальности в задачах обобщенного управления* // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 5. – С. 50–58.

5. Vinter R.B., Pereira F.M. *A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories* // SIAM J. Control and Optim. – 1988. – V. 26. – № 1. – P. 205–229.
6. Дыхта В.А. *Необходимые условия оптимальности импульсных процессов при ограничениях на образ управляющей меры* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 12. – С. 1–9.
7. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Принцип максимума для импульсных процессов при ограничениях на образ и полную вариацию управляющей меры* // Краев. задачи. – Иркутск, 1997.– С. 122–138.
8. Clarke F.H., Vinter R.B. *Optimal multiprocesses* // SIAM J. Control and Optim. – 1989. – V. 27. – № 5. – P. 1072–1091.
9. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.
10. Арутюнов А.В. *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи.* – М.: Изд-во "Факториал", 1997. – 256 с.

Иркутская государственная
экономическая академия

Поступила
10.08.1999