И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 517.968 : 519.6

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ И ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Многочисленные теоретические и прикладные задачи приводят (см., напр., [1]–[9] и библиографию в них) к необходимости решения сингулярных интегральных уравнений (с. и. у.) I-рода вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)\sqrt{1-\tau^2}}+R(x;t)=y(t),\quad -1<t<1, \tag{0.1}$$

с дополнительным условием

$$\int_{-1}^{+1}\frac{x(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=0, \tag{0.1$'$}$$

слабо с. и. у. I-рода

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\ln|\tau-t|}{\sqrt{1-\tau^2}}x(\tau)\,d\tau+R(x;t)=y(t),\quad -1\le t\le 1, \tag{0.2}$$

и сингулярного интегро-дифференциального уравнения I-рода (так называемого уравнения теории крыла) вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\Gamma'(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+V(\Gamma;t)=f(t),\quad -1<t<1, \tag{0.3}$$

при краевых условиях

$$\Gamma(-1)=\Gamma(+1)=0. \tag{0.3$'$}$$

Здесь R и V — данные вполне непрерывные (в том числе интегральные) или же малые по норме операторы, $y(t)$ и $f(t)$ — данные, а $x(t)$ и $\Gamma(t)$ — искомые функции из некоторых функциональных пространств.

Известно ([6], [10], [11]), что указанные уравнения, как правило, точно не решаются. Поэтому для их решения разработаны и применяются многочисленные приближенные (в первую очередь, прямые и проекционные) методы. В связи с этим возникает задача оптимизации по точности различных классов методов решения таких уравнений. Значительная часть этой работы посвящена решению указанной задачи на основе ранее полученных автором результатов по оптимизации методов решения операторных уравнений [2], [12], [13] и по прямым методам (напр., [2], [4], [5]) решения уравнений (0.1)–(0.3). В связи с этим в начале работы приводится ряд общих результатов по оптимизации прямых и проекционных методов решения линейных операторных уравнений в нормированных пространствах.

1. Постановка задачи и некоторые общие результаты

1.1. *Постановка задачи.* Пусть X и Y — данные банаховы пространства, а $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – их произвольные конечномерные подпространства одинаковой размерности $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ будем обозначать пространство линейных (т. е. аддитивных и однородных) операторов, отображающих X в Y.

Рассмотрим класс $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых уравнений

$$Kx = y \quad (x \in X,\ y \in Y,\ K \in \mathcal{L}(X, Y)), \tag{1.1}$$

определяемый некоторыми классами операторов $\mathcal{K} = \{K\} \subset L(X, Y)$ и правых частей $Y^* = \{y\} \subset Y$ соответственно. Введем класс $\mathcal{E}_n = \{e_n\}$ однозначно разрешимых операторных уравнений

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\ y_n \in Y_n,\ K_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)), \tag{1.2}$$

порождаемых прямыми методами решения уравнения (1.1) при каждой паре произвольно фиксированных подпространств X_n и Y_n с $\dim X_n = \dim Y_n = n < \infty$. Решение $x^* \in X$ уравнения (1.1) из класса $\mathcal{E}$ будем аппроксимировать решениями $x_n^* \in X_n \subset X$ уравнений (1.2) из класса $\mathcal{E}_n$. При этом за оптимальную оценку погрешности класса $\mathcal{E}_n$ прямых методов (1.2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1) примем величину [2], [12]

$$V_n(\mathcal{E}) = \inf_{X_n, Y_n} \inf_{e_n \in \mathcal{E}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X, \tag{1.3}$$

где внутренний inf берется по всем уравнениям вида (1.2) при произвольно фиксированных подпространствах X_n и Y_n, а внешний inf — по всевозможным подпространствам $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ размерности n.

Определение 1. Пусть существует фиксированный прямой метод (уравнение)

$$K_n^\circ x_n^\circ = y_n^\circ \quad (x_n^\circ \in X_n^\circ \subset X, y_n^\circ \in Y_n^\circ \subset Y, K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ)) \tag{1.2°}$$

с $\dim X_n^\circ = \dim Y_n^\circ = n$, для которого выполняется одно из условий[1)]

$$\sup\{\|x^* - x_n^\circ\|_X : e \in \mathcal{E}\} =, \sim, \asymp V_n(\mathcal{E}), \quad x_n^\circ = K_n^{\circ -1} y_n^\circ. \tag{1.4}$$

Тогда метод (1.2°) называется соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку среди всевозможных прямых методов вида (1.2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1).

В связи со сказанным возникает *задача* 1 нахождения оптимальной оценки погрешности (1.3) и построения фиксированного метода (1.2°), оптимального в смысле определения 1.

Далее, обозначим через $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(Y, Y_n) \subset \mathcal{L}(Y, Y_n)$ некоторое множество линейных проекционных ($P_n^2 = P_n$) операторов из Y в Y_n и наряду с (1.2) и (1.2°) рассмотрим уравнения

$$K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\ P_n \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n)), \tag{1.5}$$

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv P_n^\circ K x_n^\circ = P_n^\circ y \quad (x_n^\circ \in X_n^\circ,\ P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ)). \tag{1.5°}$$

Отметим, что уравнениями (1.5), (1.5°) описываются часто используемые на практике проекционные методы. Проекционными являются, например, хорошо известные методы Галеркина, моментов, наименьших квадратов, коллокаций, подобластей и др. Ясно, что проекционные методы (1.5) и (1.5°) являются частными случаями прямых методов (1.2) и (1.2°) соответственно. Поэтому, если элемент $x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y$ удовлетворяет одному из условий (1.4), то проекционный метод (1.5°) является соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку среди всех прямых методов вида (1.2). Однако на практике многие проекционные методы такой “конкуренции” не выдерживают. Как следует из проведенных автором

[1)] Здесь и далее символы $\sim$ и $\asymp$ означают соответственно сильную и слабую эквивалентности.

исследований ([2], гл. II, IV), таким "неприятным" свойством обладают, например, важнейшие полиномиальные проекционные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений в пространствах типа C и $C^{(m)}$ (m — порядок уравнения) с обычными нормами. Поэтому имеет смысл специально организовать оптимизацию класса проекционных методов вида (1.5). В этом случае за оптимальную оценку погрешности класса $\mathcal{E}_n$ проекционных методов (1.5) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1) естественно принять величину [2], [12]

$$U_n(\mathcal{E}) = \inf_{X_n, Y_n} \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X. \tag{1.6}$$

Определение 2. Если элемент $x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y$ удовлетворяет одному из условий

$$\sup\{\|x^* - x_n^\circ\|_X : e \in \mathcal{E}\} = , \sim, \asymp U_n(\mathcal{E}), \tag{1.7}$$

то проекционный метод (1.5°) называется соответственно оптимальным, асимптотически оптимальным,оптимальным по порядку среди всех проекционных методов вида (1.5) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1).

В связи со сказанным возникает *задача* 2 нахождения оптимальной оценки погрешности (1.6) при различных способах задания класса операторов $\mathcal{P}_n$ и построения метода (1.5°), оптимального прежде всего в смысле определения 2, а также в смысле определения 1, т. е. построения проекционного метода (1.5°), оптимального или асимптотически оптимального или же оптимального по порядку среди всех прямых методов вида (1.2) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1.1).

1.2. *Оптимизация прямых методов.* Сначала приведем две теоремы для общих прямых методов (1.2). При этом существенную роль будут играть n–поперечники Колмогорова (напр., [14]–[16]) $d_n(Y^*, Y)$ и $d_n(X^*, X)$, где $X^* = \{x^* \in X : Kx^* \equiv y,\ K \in \mathcal{K},\ y \in Y^*\}$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия*

а) X^* (*соответственно* Y^*) — *центрально-симметрический компакт в пространстве* X (*соответственно в* Y);

б) $\|K\|_{X \to Y} \le c_0 < \infty$, $\|K^{-1}\|_{Y \to X} \le c_1 < \infty$, *где* c_0 *и* c_1 — *положительные постоянные, общие для всего класса* $\mathcal{E}$;

в) *уравнения* (1.1) *и* (1.2°) *таковы, что*

$$\sup_{K \in \mathcal{K}} \|K - K_n^\circ\|_{X_n^\circ \to Y} = O(d_n), \quad \sup_{y \in Y^*} \|y - y_n^\circ\|_Y = O(d_n),$$

где $d_n = d_n(X^*, X)$ (*соответственно* $d_n = d_n(Y^*, Y)$).

Тогда справедливы соотношения

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \asymp d_n, \tag{1.8}$$

и прямой метод (1.2°) *оптимален по порядку в смысле определения* 1.

Доказательство проведем по схеме доказательства аналогичных результатов из ([2], гл. 2).

Будем рассматривать случай $d_n = d_n(X^*, X)$. Сначала покажем, что уравнения (1.2°) однозначно разрешимы при всех $n \in \mathbb{N}$, начиная хотя бы с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$. В силу условия в) равномерно относительно $K \in \mathcal{K}$ имеем

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n^\circ\|_{X_n^\circ \to Y} \le c_2 d_n(X^*, X) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.9}$$

где c_2 — постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$ и от $K \in \mathcal{K}$. Поэтому для всех $n \ge n_0$ и $K \in \mathcal{K}$ выполняется неравенство

$$q_n \equiv \varepsilon_n \, \|K^{-1}\|_{Y \to X} < 1/2. \tag{1.10}$$

Тогда в силу ([2], гл. I, теорема 7) и условия б) операторы $K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ)$ линейно обратимы при всех $n \ge n_0$ и обратные операторы ограничены по норме в совокупности, точнее,

$$\|K_n^{\circ -1}\|_{Y_n^\circ \to X_n^\circ} \le \|K^{-1}\|_{Y\to X}\,(1-q)^{-1} \le 2\,\|K^{-1}\|_{Y\to X} \le 2\,c_1 \quad (n \ge n_0). \tag{1.11}$$

В силу соотношений (1.9)–(1.10) последние неравенства справедливы равномерно относительно $K \in \mathcal{K}$.

В силу ([2], гл. I, теорема 7) погрешность решения $x_n^\circ = K_n^{\circ -1} y_n^\circ$ уравнения (1.2°) можно оценить неравенствами

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \le \frac{\|K^{-1}\|}{1-q_n}[\|y - y_n^\circ\|_Y + q_n\,\|y\|_Y] \le 2\,c_1[\|y - y_n^\circ\|_Y + q_n\,\|y\|_Y]. \tag{1.12}$$

Ясно, что в силу условий а) и б)

$$\sup_{y\in Y^*}\|y\|_Y \le \sup_{e\in\mathcal{E}}(\|K\|_{X\to Y}\|x^*\|_X) \le c_0 \sup_{x^*\in X^*}\|x^*\|_X \le c_3 < \infty, \tag{1.13}$$

где c_3 — постоянная, общая для класса $\mathcal{E}$. Из соотношений (1.9)–(1.13) и условий а)–в) теоремы находим неравенства

$$V_n(\mathcal{E}) \le \sup_{e\in\mathcal{E}}\|x^* - x_n^\circ\|_X = O\,\{d_n(X^*, X)\}. \tag{1.14}$$

Поскольку уравнения (1.1) и (1.2) однозначно разрешимы, то $x_n^* = K_n^{-1} y_n \in X_n$ и

$$\sup_{e\in\mathcal{E}}\|x^* - x_n^*\|_X \ge \sup_{x^*\in X^*}\rho(x^*, X_n) = \rho(X^*, X_n),$$

где $\rho(\cdot,\cdot)$ — функция расстояния в пространстве X. Поэтому с учетом (1.3) имеем

$$V_n(\mathcal{E}) = \inf_{X_n, Y_n}\inf_{e_n\in\mathcal{E}_n}\sup_{x^*\in X^*}\|x^* - x_n^*\|_X \ge \inf_{X_n\subset X}\rho(X^*, X_n) = d_n(X^*, X). \tag{1.15}$$

Из соотношений (1.14), (1.15) с учетом определения 1 получаем требуемое утверждение

$$d_n(X^*, X) \le V_n(\mathcal{E}) \le \sup_{e\in\mathcal{E}}\|x^* - x_n^\circ\|_X = O\,\{d_n(X^*, X)\},$$

т. е. теорема 1.1 при $d_n = d_n(X^*, X)$ доказана. Случай $d_n = d_n(Y^*, Y)$ доказывается аналогично.

Из теоремы 1.1, а также из результатов ([2], гл. I, § 5) легко выводятся два следствия.

Следствие 1. Если

$$K_n^\circ = P_n^\circ K \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ), \quad y_n^\circ = P_n^\circ y \in Y_n^\circ, \quad P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ),$$

то в условиях теоремы 1.1 проекционный метод (1.5°) оптимален по порядку среди всех прямых методов вида (1.2).

Следствие 2. В условиях теоремы 1.1 справедливы утверждения

а) оптимальный по порядку прямой метод (1.2°) устойчив относительно малых возмущений оператора $K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ)$ и элемента $y_n^\circ \in Y_n^\circ$;

б) из хорошей обусловленности уравнений (1.1) из класса $\mathcal{E}$ следует хорошая обусловленность уравнения (1.2°), а следовательно, и конечной системы линейных алгебраических уравнений, эквивалентной операторному уравнению (1.2°).

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия*

а) X^* (*соответственно* Y^*) — *центрально-симметрический компакт в* X (*соответственно в* Y);

б) X_n° (*соответственно* Y_n°) *экстремально хотя бы по порядку для* $d_n(X^*, X)$ (*соответственно для* $d_n(Y^*, Y)$);

в) *существует такой оператор* $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ)$, *что при* $n \to \infty$

$$\beta_n \equiv \sup_{K \in \mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K\|_{X \to X} = O\,(1),$$
$$\gamma_n \equiv \sup_{K \in \mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K\|_{X_n^\circ \to X_n^\circ} = O\,(d_n),$$
$$\delta_n \equiv \sup_{K \in \mathcal{K},\ y \in Y^*} \|K_n^{\circ -1}(y_n^\circ - P_n^\circ y)\|_X = O\,(d_n),$$

где $d_n = d_n(X^*, X)$ (*соответственно* $d_n = d_n(Y^*, Y)$).

Тогда выполняются соотношения (1.8), *и прямой метод* (1.2°) *оптимален по порядку в смысле определения* 1.

Доказательство. Поскольку уравнения (1.1) и (1.2°) при $X_n = X_n^\circ$ и $Y_n = Y_n^\circ$ принадлежат к классам соответственно $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, то в силу ([2], гл. I, теорема 6) находим тождество

$$x^* - x_n^\circ = (x^* - \overline{x}_n^\circ) + (\overline{x}_n^\circ - x_n^\circ) = (E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K)(x^* - \overline{x}_n) + \\ + (E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K)\overline{x}_n + K_n^{\circ -1}(P_n^\circ y - y_n^\circ), \quad (1.16)$$

где $\overline{x}_n^\circ = K_n^{\circ -1} P_n^\circ y$ — решение уравнения (1.2°) с правой частью $P_n^\circ y$, а $\overline{x}_n$ — произвольный элемент из X_n°. В (1.16) в качестве $\overline{x}_n \in X_n^\circ$ возьмем элемент наилучшего приближения для точного решения $x^* \in X$ в пространстве X. Тогда в силу условий а) и в) теоремы из тождества (1.16) последовательно находим

$$\sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \le \beta_n \sup_{x^* \in X} E_n(x^*)_X + \gamma_n \sup_{e \in \mathcal{E}} \|\overline{x}_n\|_X + \delta_n \le O(1)\, \rho(X^*, X_n^\circ) + \\ + \gamma_n \sup_{x^* \in X^*} [\|x^*\|_X + E_n(x^*)_X] + \delta_n = O(1)\, \rho(X^*, X_n^\circ) + \gamma_n\, O(1) + \delta_n.$$

Отсюда и из условий теоремы при $d_n = d_n(X^*, X)$ получаем

$$V_n(\mathcal{E}) \le \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X = O\,\{d_n(X^*, X)\}. \quad (1.17)$$

Из соотношений (1.15) и (1.17) следует требуемое утверждение при $d_n = d_n(X^*, X)$, случай же $d_n = d_n(Y^*, Y)$ рассматривается аналогично.

1.3. *Оптимизация проекционных методов.* Для проекционных методов (1.5), (1.5°) теоремы 1.1 и 1.2 значительно упрощаются. Однако здесь можно получить и более сильные результаты; при этом существенную роль играют поперечники (напр., [14]–[16]), а именно n-поперечник Колмогорова $d_n(X^*, X)$ и n-й проекционный поперечник $\pi_n(X^*, X)$ множества X^* в пространстве X, а также соотношение

$$\sigma_n \equiv \sup_{K \in \mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K\|_{X \to X}, \quad K_n^\circ = P_n^\circ K \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ).$$

По аналогии с ([2], гл. II, лемма 1) доказывается

Лемма 1.1. *Для однозначно разрешимых уравнений* (1.1), (1.2), (1.5), (1.5°) *справедливы неравенства*

$$d_n(X^*, X) \le V_n(\mathcal{E}) \le U_n(\mathcal{E}) \le \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \le \sigma_n\, \rho(X^*, X_n^\circ),$$

где $x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y \in X_n^\circ$.

Из леммы 1.1 легко выводится

Теорема 1.3. *Пусть выполняется одно из условий*

а) $\sigma_n = 1$ *и* X_n° — *экстремальное подпространство для поперечника* $d_n(X^*, X)$;
б) $\sigma_n \sim 1$ *и* X_n° — *хотя бы асимптотически экстремальное подпространство для* $d_n(X^*, X)$;
в) $\sigma_n \asymp 1$ *и* X_n° — *экстремальное хотя бы по порядку подпространство для* $d_n(X^*, X)$.

Тогда проекционный метод (1.5°) *соответственно оптимален, асимптотически оптимален, оптимален по порядку не только в смысле определения* 2, *но и в смысле определения* 1.

Лемма 1.2. *Пусть*

$$K = G + T \in \mathcal{L}(X,Y), \quad K_n = P_n G + P_n T \in \mathcal{L}(X_n, Y_n), \quad G X_n^\circ = Y_n^\circ,$$
$$K_n^\circ = G + P_n^\circ T \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ), \quad P_n \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n), \quad P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ),$$

где $G \in \mathcal{L}(X,Y)$ — *фиксированный изометрический изоморфизм. Тогда для однозначно разрешимых уравнений* (1.1), (1.5), (1.5°) *справедливы неравенства*

$$\pi_n(X^*, X) \le U_n(\mathcal{E}) \le \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \le \theta_n \, \rho_n, \; x_n^\circ = (K_n^\circ)^{-1} P_n^\circ y,$$

где

$$\theta_n = \sup_{K \in \mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ T\|_{X \to X}, \quad \rho_n = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - G^{-1} P_n^\circ G x^*\|_X.$$

Доказательство фактически совпадает с доказательством леммы 3 из ([2], гл. II).

Из леммы 1.2 с учетом (1.7) легко выводится

Теорема 1.4. *Пусть в условиях леммы* 1.2 *выполняется одно из требований*

а) $\theta_n = 1$ *и оператор* $\Pi_n^\circ = G^{-1} P_n^\circ G \in \mathcal{L}(X, X_n^\circ)$ *является экстремальным для проекционного поперечника* $\pi_n(X^*, X)$;

б) $\theta_n \sim 1$ *и оператор* Π_n° *хотя бы асимптотически экстремален для* $\pi_n(X^*, X)$;

в) $\theta_n \asymp 1$ *и оператор* Π_n° *экстремален хотя бы по порядку для* $\pi_n(X^*, X)$.

Тогда проекционный метод (1.5°) *соответственно оптимален, асимптотически оптимален, оптимален по порядку в смысле определения* 2.

2. Сингулярные интегральные уравнения I-рода

Положим $p = p(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, $q = q(t) = (1-t^2)^{1/2}$ и рассмотрим весовые пространства Лебега $Y = L_2(q) = L_2(q; [-1,1])$ и $X = \mathring{L}_2(p) = \mathring{L}_2(p; [-1,1]) = \Big\{ x \in L_2(p) : \int\limits_{-1}^{+1} p(t) x(t)\, dt = 0 \Big\}$ с обычными нормами

$$\|y\|_Y = \left\{ \int_{-1}^{+1} q(t) |y(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} \equiv \|y\|_{2q}, \quad y \in Y;$$
$$\|x\|_X = \left\{ \int_{-1}^{+1} p(t) |x(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} \equiv \|x\|_{2p}, \quad x \in X,$$

а также с обычными скалярными произведениями $(\varphi, \psi)_{2q}$ и $(\varphi, \psi)_{2p}$ соответственно.

Рассмотрим класс $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых с. и. у. вида (0.1)–(0.1′)

$$Kx \equiv Sx + Rx = y \quad (x \in X, \; y \in Y), \tag{2.1}$$

где сингулярный интеграл

$$S(x;t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{(\tau - t)\sqrt{1-\tau^2}}, \quad x \in X, \; -1 < t < 1, \tag{2.2}$$

понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу.

Известно (напр., [4], гл. II), что оператор $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ непрерывно обратим и

$$\|S\|_{X \to Y} = \|S^{-1}\|_{Y \to X} = 1. \tag{2.3}$$

В силу (2.2)–(2.3) можно считать, что

$$\|K\|_{X\to Y} \le 1 + \|R\|_{X\to Y} \le c_0 < \infty, \tag{2.4}$$

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \le c_1 < \infty, \tag{2.5}$$

где c_0 и c_1 — положительные постоянные, общие для всего класса $\mathcal{E} = \{e\}$.

Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ с $\dim X_n = \dim Y_n = n < \infty$, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(Y, Y_n) \subset \mathcal{L}_n(Y, Y_n)$. Введем классы $\mathcal{E}_n = \{e_n\}$ однозначно разрешимых уравнений вида

$$K_n x_n \equiv S_n x_n + R_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\ y_n \in Y_n,\ K_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)), \tag{2.6}$$

$$P_n K x_n \equiv P_n S x_n + P_n R x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\ P_n \in \mathcal{P}_n), \tag{2.7}$$

и приближенное решение уравнения (2.1) будем определять как точное решение любого из уравнений (2.6) и (2.7). Заметим, что каждое из уравнений (2.6) и (2.7) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $I\!H_m$ — множество всех алгебраических многочленов степени не выше m $(m+1 \in \mathbb{N})$. Положим

$$X_n^\circ = I\!H_n \cap X, \quad Y_n^\circ = I\!H_{n-1} \cap Y, \quad P_n^\circ \in \mathcal{L}(Y, Y_n^\circ),$$

где для любой функции $\varphi \in Y$

$$P_n^\circ(\varphi; t) = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1}^u(\varphi) u_{k-1}(t), \quad u_{k-1}(t) = \frac{\sin k \arccos t}{\sqrt{1-t^2}}\,, \tag{2.8}$$

$$c_{k-1}^u(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} q(t)\varphi(t) u_{k-1}(t)\, dt, \tag{2.9}$$

или

$$P_n^\circ(\varphi; t) = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{n+1}\biggl(\int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau \biggr), \quad \varphi \in Y, \tag{2.10}$$

где $\mathcal{L}_{n+1}(\psi; t)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $\psi \in C[-1,1]$ по узлам Чебышева

$$t_k^\circ = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Введем операторное уравнение

$$P_n^\circ K x_n \equiv P_n^\circ S x_n + P_n^\circ R x_n = P_n^\circ y \quad (x_n \in X_n^\circ,\ P_n^\circ y \in Y_n^\circ),$$

где оператор $P_n^\circ \in \mathcal{L}(Y, Y_n^\circ)$ определен формулами (2.8), (2.9) или же (2.10), (2.11). Поскольку $(P_n^\circ)^2 = P_n^\circ$ и $S x_n \in Y_n^\circ$ для любого элемента $x_n \in X_n^\circ$, то последнее уравнение принимает вид

$$P_n^\circ K x_n \equiv S x_n + P_n^\circ R x_n = P_n^\circ y \quad (x_n \in X_n^\circ,\ P_n^\circ y \in Y_n^\circ). \tag{2.12}$$

Следует отметить,что (2.12) представляет собой метод ортогональных многочленов или же соответственно метод подобластей решения уравнения (2.1), если оператор P_n° определен соответственно согласно (2.8), (2.9) или же согласно (2.10), (2.11). Решение x_n° уравнения (2.12), в случае его существования, можно представить в виде

$$x_n^\circ(t) = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\circ T_k(t), \quad T_k(t) = \cos k \arccos t, \tag{2.13}$$

где $\alpha_1^\circ, \alpha_2^\circ, \ldots, \alpha_n^\circ$ определяются ([4], сс. 119, 120, 126) как решения СЛАУ порядка $n = \dim X_n^\circ = \dim Y_n^\circ$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* а) $R : X \to Y$ — *вполне непрерывный оператор или же* $\|R\|_{X\to Y} \le q < 1$, *где* q — *постоянная, общая для всего класса* $\mathcal{E}$;

б) $X^* = \{x \in X : Kx^* \equiv y,\ e \in \mathcal{E}\}$ — *центрально-симметрический компакт в* X.

Тогда

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp U_n(\mathcal{E}) \asymp \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \asymp d_n(X^*, X), \tag{2.14}$$

и полиномиальные методы ортогональных многочленов (2.12), (2.13), (2.8), (2.9) *и подобластей* (2.12), (2.13), (2.10), (2.11) *оптимальны по порядку в смысле любого из определений* 1 *и* 2.

Доказательство может быть проведено с помощью любой из теорем 1.1–1.4. Прежде всего отметим, что из соотношений (1.3), (1.6) и (1.15) следуют неравенства

$$U_n(\mathcal{E}) \ge V_n(\mathcal{E}) \ge d_n(X^*, X). \tag{2.15}$$

Известно, что для оператора $P_n^\circ \in \mathcal{L}(Y, Y_n^\circ)$, определенного формулами (2.8), (2.9), для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$(P_n^\circ)^2 = P_n^\circ,\ \ \|P_n^\circ\|_{Y\to Y} = 1, \quad \|f - P_n^\circ f\| = E_n(f)_Y,\ \ f \in Y, \tag{2.16}$$

где $E_n(f)_Y = \rho(f, Y_n^\circ)$ — наилучшее приближение функции $f \in Y = L_2(q)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$ в пространстве Y.

В случае метода подобластей, т. е. для оператора $P_n^\circ \in \mathcal{L}(Y, Y_n^\circ)$, определяемого формулами (2.10), (2.11), аналогичное соотношениям (2.16) утверждение содержится в следующей лемме ([5], гл. I, § 4, следствия лемм 4.1 и 4.2).

Лемма 2.1. *Для любых натуральных* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливы соотношения*

$$\begin{gathered} (P_n^\circ)^2 = P_n^\circ, \quad \|P_n^\circ\|_{Y\to Y} \le \frac{\pi}{2}, \\ E_n(f)_Y \le \|f - P_n^\circ f\|_Y \le \frac{\pi}{2} E_n(f)_Y,\ \ f \in Y. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Из соотношений (2.16), (2.17) следует, что для операторов P_n°, определяемых согласно формулам (2.8)–(2.11), имеем

$$P_n^\circ \to E \ \text{ сильно в }\ Y, \quad P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ). \tag{2.18}$$

Далее, из уравнений (2.1) и (2.12) для любого $x_n \in X_n^\circ$ находим

$$\|Kx_n - K_n^\circ x_n\|_Y = \|Rx_n - P_n^\circ R x_n\|_Y \le \|x_n\|_X \sup_{z_n\in X_n,\ \|z_n\|\le 1} \|Rz_n - P_n^\circ R z_n\|_Y \le \theta_n \|x_n\|_X, \tag{2.19}$$

где в силу (2.16), (2.17) имеем

$$\theta_n = \sup_{z_n\in X_n,\ \|z_n\|\le 1} \|Rz_n - P_n^\circ R z_n\|_Y \le \sup_{z\in X,\ \|z\|\le 1} \|Rz - P_n^\circ R z\|_Y = \sup_{\varphi\in RS(0,1)} \|\varphi - P_n^\circ \varphi\|_Y \le$$

$$\le \frac{\pi}{2} \sup_{\varphi\in RS(0,1)} E_n(\varphi)_Y = \frac{\pi}{2}\rho(RS(0,1), Y_n^\circ), \quad S(0,1) = \{x \in X : \|x\|_X \le 1\}. \tag{2.20}$$

Поскольку $M \equiv RS(0,1)$ — компактное множество в пространстве Y, а в силу теоремы И.М. Гельфанда (напр., [17], с. 274–276) сильно сходящаяся последовательность операторов на компактном множестве сходится равномерно, то из (2.18)–(2.20) получаем

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n^\circ\|_{X_n^\circ\to Y} \le \theta_n \le \frac{\pi}{2}\rho(M, Y_n^\circ) \to 0,\ \ n\to\infty. \tag{2.21}$$

Из (2.21), как и при доказательстве теоремы 1.1, находим, что операторы $K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ)$ из (2.12) линейно обратимы и

$$\sup_{e\in\mathcal{E}} \|K_n^{\circ -1}\|_{Y_n^\circ\to X_n^\circ} \le 2\,c_1 < \infty \quad (n \ge n_0). \tag{2.22}$$

В силу ([2], гл. I, теорема 6) и соотношений (2.4), (2.5) для решений $x^* \in X$ и $x_n^\circ \in X_n^\circ$ уравнений соответственно (2.1) и (2.12) справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \le \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ K\|_{X\to X} \cdot E_n(x^*)_X, \tag{2.23}$$

где $E_n(x^*)_X = \rho(x^*, X_n^\circ)$, $K_n^\circ = S + P_n^\circ R \in \mathcal{L}(X_n^\circ, Y_n^\circ)$, $x_n^\circ = (K_n^\circ)^{-1} P_n^\circ y$. Поскольку X^* — центрально-симметрический компакт в X, а $X_n^\circ = I\!H_n \cap X$ — экстремальное по порядку подпространство для поперечника $d_n(X^*, X)$, то из соотношений (2.23), (2.22), (2.16), (2.17), (2.4) последовательно находим

$$U_n(\mathcal{E}) \le \sup_{x^*\in X^*} \|x^* - x_n^\circ\|_X \le (1 + \pi c_0 c_1)\rho(X^*, X_n^\circ) = O\,\{d_n(X^*, X)\}. \tag{2.24}$$

Из соотношений (2.15) и (2.24) следуют неравенства (2.14), а из них — утверждение теоремы в случае полной непрерывности оператора $R \in \mathcal{L}(X, Y)$. Если же R — малый по норме оператор, например,

$$\|R\|_{X\to Y} < 2/\pi,$$

то доказательство теоремы значительно упрощается; это достигается за счет применения к уравнениям (2.1) и (2.12) принципа сжатых отображений, согласно которому существуют обратные операторы $K^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ и $(K_n^\circ)^{-1} \in \mathcal{L}(Y_n^\circ, X_n^\circ)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, и для них справедливы неравенства

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \le \frac{1}{1-q_1} \equiv c_1, \quad q_1 = \|R\|_{X\to Y} < 1,$$

и

$$\|K_n^{\circ -1}\|_{Y_n^\circ\to X_n^\circ} \le \frac{1}{1-q_1}, \quad q_1 = \|R\|_{X\to Y} < 1, \;\; n \in \mathbb{N},$$

для метода ортогональных многочленов и

$$\|K_n^{\circ -1}\|_{Y_n^\circ\to X_n^\circ} \le \frac{1}{1-q_2}, \quad q_2 = \frac{\pi}{2}\|R\|_{X\to Y} < 1, \;\; n \in \mathbb{N},$$

для метода подобластей. В силу сказанного выше остальное очевидно.

Теперь несколько изменим класс допускаемых к конкуренции прямых методов решения уравнения (2.1). Обозначим через $\overline{\mathcal{E}}_n = \{e_n\}$ множество всевозможных полиномиальных приближенных методов решения класса $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых уравнений (2.1), позволяющих построить приближенное решение в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, T_k(t) \in X_n^\circ, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{2.25}$$

Тогда за оптимальную оценку погрешности класса $\overline{\mathcal{E}}_n$ таких методов в классе $\mathcal{E}$ уравнений (2.1) можно принять величину

$$\overline{V}_n(\mathcal{E}) = \inf_{e_n\in\overline{\mathcal{E}}_n} \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n\|_X. \tag{2.26}$$

В этом случае теорему 2.1 несколько дополняет

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *справедливы соотношения*

$$\overline{V}_n(\mathcal{E}) \asymp d_n(X^*, X),$$

и оптимальными по порядку являются указанные выше варианты методов ортогональных многочленов и подобластей, а также метод наименьших квадратов (2.25),

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, (KT_k, KT_j)_{2q} = (y, KT_j)_{2q}, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Доказательство. В силу (2.25), (2.26) имеем

$$\overline{V}_n(\mathcal{E}) \geq \sup_{x^* \in X^*} \inf_{z_n \in X_n^\circ} \|x^* - z_n\|_X = \rho(X^*, X_n^\circ) \geq d_n(X^*, X). \tag{2.28}$$

С другой стороны, в ходе доказательства теоремы 2.1 показано (см. (2.24)), что

$$\sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^\circ\|_X = O\,\{d_n(X^*, X)\}, \tag{2.24$'$}$$

где полином $x_n^\circ(t)$ определен в (2.13) методом ортогональных многочленов или же подобластей. Если же полином $x_n^\circ(t)$ определен по методу наименьших квадратов (2.13), (2.27), то в силу ([4], гл. II, теорема 2.12) справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^\circ\|_X \leq \eta(K)\, E_n(x^*)_X, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.29}$$

где с учетом (2.4), (2.5) имеем

$$\eta(K) = \|K\|_{X \to Y} \, \|K^{-1}\|_{Y \to X} \leq c_0 c_1 < \infty. \tag{2.30}$$

Из формул (2.29), (2.30) следует справедливость соотношений (2.24$'$) и для рассматриваемого здесь варианта метода наименьших квадратов (2.25), (2.27). Тогда из соотношений (2.28)–(2.30), (2.24$'$) находим неравенства

$$d_n(X^*, X) \leq \overline{V}_n(\mathcal{E}) \leq \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X = O\,\{d_n(X^*, X)\},$$

откуда и следует требуемое утверждение.

3. Слабо сингулярные интегральные уравнения I-рода

Пусть $X = L_2(p)$, $p = p(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$, с обычной нормой и $Y = W_2^1(q; [-1, 1]) = W_2^1(q)$, $q = q(t) = (1 - t^2)^{1/2}$, с нормой

$$\|y\|_Y = \|y\|_{2p} + \|y'\|_{2q}, \quad y \in Y,$$

где нормы $\|\cdot\|_{2p}$ и $\|\cdot\|_{2q}$ определены в § 2. Тогда слабо с. и. у. (0.2) можно записать как операторное уравнение вида

$$Kx \equiv Gx + Rx = y \quad (x \in X, \ y \in Y, \ K \in \mathcal{L}(X, Y)), \tag{3.1}$$

где интеграл

$$G(x; t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\ln|\tau - t|}{\sqrt{1 - \tau^2}} x(\tau)\, d\tau, \quad x \in X,$$

понимается как несобственный.

Известно (напр., [5], гл. II, § 2), что оператор $G : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|G\|_{X \to Y} \leq 1, \quad \|G^{-1}\|_{Y \to X} \leq \frac{1}{\ln 2};$$

поэтому в дальнейшем можно считать, что

$$\|K\|_{X \to Y} \leq 1 + \|R\|_{X \to Y} \leq c_0, \quad \|K^{-1}\|_{Y \to X} \leq c_1, \tag{3.2}$$

где c_0 и c_1 — общие для всего класса $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых уравнений (0.2) положительные постоянные.

Пусть $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ — произвольные конечномерные подпространства одинаковой размерности $n \in \mathbb{N}$, а $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(Y, Y_n) \subset \mathcal{L}(Y, Y_n)$.

Приближенное решение уравнения (3.1) будем определять как точное решение любого из однозначно разрешимых конечномерных уравнений

$$K_n x_n \equiv G_n x_n + R_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\ y_n \in Y_n,\ K_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)), \tag{3.3}$$

$$P_n K x_n \equiv P_n G x_n + P_n R x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\ P_n y \in Y_n,\ P_n \in \mathcal{P}_n). \tag{3.4}$$

Заметим, что каждое из уравнений (3.3) и (3.4) эквивалентно СЛАУ порядка $n = \dim X_n = \dim Y_n < \infty$.

Положим

$$\begin{gathered} X_n^\circ = I\!H_{n-1} \cap X, \quad Y_n^\circ = I\!H_{n-1} \cap Y, \quad P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ), \\ P_n^\circ(\varphi; t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k^\circ)\, l_k(t), \quad \varphi \in Y, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где $l_k(t)$ — фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам Чебышева

$$t_k^\circ = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = \overline{1,n}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{3.5$'$}$$

$$P_n^\circ(\varphi; t) = \frac{c_0^T(\varphi)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} c_k^T(\varphi)\, T_k(t), \quad \varphi \in Y, \tag{3.6}$$

где[1)]

$$c_k^T(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t)\, T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.6$'$}$$

— коэффициенты Фурье–Чебышева.

В соответствии с (3.5), (3.6) и (3.3), (3.4) введем фиксированное конечномерное уравнение

$$P_n^\circ K x_n \equiv S x_n + P_n^\circ R x_n = P_n^\circ y \quad (x_n \in X_n^\circ,\ P_n^\circ y \in Y_n^\circ), \tag{3.7}$$

которое представляет собой уравнение метода коллокации или же метода ортогональных многочленов, если оператор $P_n^\circ \in \mathcal{P}_n(Y, Y_n^\circ)$ определен по формуле соответственно (3.5)–(3.5$'$) или же (3.6)–(3.6$'$).

Для классов однозначно разрешимых уравнений $\mathcal{E} = \{e\}$ вида (3.1) и $\mathcal{E}_n = \{e_n\}$ вида (3.3) и (3.4) справедлива

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия*

а) $R \in \mathcal{L}(X, Y)$ — *вполне непрерывные или же малые по норме операторы;*

б) *операторы* $R \in \mathcal{L}(X, Y)$ *и множество* $Y^* = \{y\} \subset Y$ *таковы, что множество* $X^* = \{x^* : Kx^* \equiv y,\ e \in \mathcal{E}\}$ *есть центрально-симметрический компакт в пространстве* X.

Тогда

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp U_n(\mathcal{E}) \asymp \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \asymp d_n(X^*, X), \tag{3.8}$$

где

$$x_n^\circ(t) = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\circ T_{k-1}(t), \tag{3.9}$$

[1)] Везде полагаем $\sum\limits_{k=1}^{0} = 0$.

и методы коллокаций (3.7), (3.5)–(3.5′) *и ортогональных многочленов* (3.7), (3.6)–(3.6′) *оптимальны по порядку на классе* $\mathcal{E}$ *как среди всех прямых методов вида* (3.3), *так и среди всевозможных проекционных методов вида* (3.4).

Доказательство соотношений (3.8)–(3.9) ведется по схеме доказательства теоремы 2.1; однако здесь, в отличие от § 2, существенным образом используются результаты автора по методам коллокаций и ортогональных многочленов из параграфов соответственно 5 и 11 из ([5], гл. II).

Рассмотрим частный случай подпространств $X_n = X_n^\circ \subset X$, $Y_n = Y_n^\circ \subset Y$ и, следуя § 2, рассмотрим также класс $\overline{\mathcal{E}}_n = \{e_n\}$ всевозможных приближенных методов, позволяющих построить приближенное решение уравнения (3.1) из класса $\mathcal{E} = \{e\}$ в виде многочлена

$$\overline{x}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, T_{k-1}(t) \in X_n^\circ, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}. \tag{3.10}$$

Тогда по аналогии с теоремой 2.2 доказывается

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *справедливы соотношения*

$$\overline{V}_n(\mathcal{E}) \equiv \inf_{e_n \in \overline{\mathcal{E}}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - \overline{x}_n\|_X \asymp d_n(X^*, X), \tag{3.11}$$

и оптимальными по порядку на классе $\mathcal{E}$ *являются указанные выше методы коллокаций и ортогональных многочленов, а также метод наименьших квадратов*

$$\overline{x}_n^\circ(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\circ\, T_{k-1}(t), \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\circ\, (KT_{k-1}, KT_j) = (y, KT_j), \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{3.12}$$

где

$$(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{2p} + (\varphi', \psi')_{2q}, \quad \varphi, \psi \in W_2^1(q), \tag{3.13}$$

— *скалярное произведение в пространстве* $W_2^1(q)$, $q = q(t) = (1 - t^2)^{1/2}$.

Доказательство теоремы, в частности, соотношений (3.11), ведется по схеме доказательства теоремы 2.2, используя при этом результаты автора из ([5], гл. II, §§ 5, 11). Однако здесь для метода наименьших квадратов (3.10), (3.12) требуется небольшое пояснение.

1°. Обозначим через $\overline{Y}$ пространство $W_2^1(q)$, наделенное нормой

$$\|\varphi\|_{\overline{Y}} = \{\|\varphi\|_{2p} + \|\varphi'\|_{2q}\}^{1/2}, \quad \varphi \in W_2^1(q),$$

индуцированной скалярным произведением (3.13). Легко показать, что нормы $\|\cdot\|_Y$ и $\|\cdot\|_{\overline{Y}}$ являются эквивалентными, точнее,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|\varphi\|_Y \le \|\varphi\|_{\overline{Y}} \le \|\varphi\|_Y, \quad \varphi \in W_2^1(q). \tag{3.14}$$

2°. Системы функций $\{T_i(t)\}_0^\infty$ и $\{K(T_i;t)\}_0^\infty$ являются линейно независимыми, а также полными в пространствах соответственно X и Y; в силу (3.14) система функций $\{K(T_i;t)\}_0^\infty$ полна также в пространстве $\overline{Y}$. Тогда, как известно ([18], § 83), система линейных алгебраических уравнений (3.12) имеет единственное решение при любых $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, многочлен $\overline{x}_n^\circ(t)$ методом наименьших квадратов определяется однозначно. Поэтому для любых $x_n \in X_n^\circ$ справедливо неравенство

$$\|K\overline{x}_n^\circ - y\|_{\overline{Y}} \le \|Kx_n - y\|_{\overline{Y}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

3°. Из соотношений (3.14) и (3.15) находим неравенство

$$\|K\overline{x}_n^\circ - y\|_Y \le \sqrt{2}\,\|Kx_n - y\|_Y \quad \forall x_n \in X_n^\circ. \tag{3.16}$$

Пользуясь ограниченностью оператора $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ и его непрерывной обратимостью, а также произвольностью элемента $x_n \in X_n^\circ$, из (3.16) находим неравенство

$$\|x^* - \overline{x}_n^\circ\|_X \le \sqrt{2}\,\|K\|_{X\to Y} \cdot \|K^{-1}\|_{Y\to X} \cdot E_n(x^*)_X, \quad E_n(x^*)_X = \rho(x^*, X_n^\circ). \tag{3.17}$$

4°. Из соотношений (3.17), (3.2) и условий теоремы находим

$$\sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - \overline{x}_n^\circ\|_X \le \sqrt{2}\, c_0 c_1 \rho(X^*, X_n^\circ) = O\left\{d_n(X^*, X)\right\}. \tag{3.18}$$

5°. С другой стороны, в силу (3.10) имеем

$$\overline{V}_n(\mathcal{E}) = \inf_{e_n\in\overline{\mathcal{E}}_n} \sup_{x^*\in X^*} \|x^* - \overline{x}_n\|_X \ge \sup_{x^*\in X^*} \inf_{z_n\in X_n^\circ} \|x^* - z_n\|_X = \rho(X^*, X_n^\circ) \ge d_n(X^*, X). \tag{3.19}$$

Из (3.18), (3.19) с учетом условий теоремы получаем соотношения

$$d_n(X^*, X) \le \overline{V}_n(\mathcal{E}) \le \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - \overline{x}_n^0\|_X = O\{d_n(X^*, X)\},$$

откуда и следует требуемое утверждение в случае метода наименьших квадратов.

4. Уравнение теории крыла

В этом параграфе решается задача оптимизации *полиномиальных* прямых и проекционных методов решения класса $\mathcal{E} = \{e\}$ однозначно разрешимых краевых задач вида (0.3)–(0.3′); переход к общему случаю, т. е. к случаю *общих* прямых и проекционных методов, в силу результатов автора из ([4], гл. III, § § 2, 3) и вышеприведенных теорем 1.1–1.4 не представляет принципиальной трудности.

Положим $\rho = \rho(t) = (1 - t^2)^{1/2}$, $-1 \le t \le 1$, и обозначим через $X = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\rho)$ пространство функций из $W_2^1(\rho; [-1, 1])$, удовлетворяющих условиям (0.3′) и представимых в виде $\Gamma(t) = \sqrt{1-t^2}\,\gamma(t)$, где $\gamma'(t) \in L_2(q)$, $q = q(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$. Норму в X введем соотношением

$$\|\Gamma\|_X = \left\{ \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2}\,|\Gamma'(t)|^2\,dt \right\}^{1/2}, \quad \Gamma \in X.$$

Будем использовать также пространство $Y = L_2(\rho) = L_2(\rho; [-1, 1])$ с обычной нормой $\|y\|_Y = \|y\|_{2\rho}$, $y \in Y$. Тогда задача (0.3)–(0.3′) эквивалентна операторному уравнению

$$K\Gamma \equiv G\Gamma + V\Gamma = f \quad (\Gamma \in X,\ f \in Y), \tag{4.1}$$

где $K = G + V \in \mathcal{L}(X,Y)$, а сингулярный интеграл

$$G(\Gamma; t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Gamma'(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \quad \Gamma \in X,$$

понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу.

Известно ([4], с. 165–166), что оператор $G : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|G\|_{X\to Y} = 1, \quad \|G^{-1}\|_{Y\to X} = 1; \tag{4.2}$$

поэтому в дальнейшем можно считать, что

$$\|K\|_{X\to Y} \le 1 + \|V\|_{X\to Y} \le c_0 < \infty, \quad \|K^{-1}\|_{Y\to X} \le c_1 < \infty,$$

где c_0 и c_1 — общие для всего класса $\mathcal{E}$ положительные постоянные.

Пусть $Y_n = \mathbb{H}_{n-1} \cap Y$, а $X_n \subset X$ есть подпространство элементов вида

$$\Gamma_n(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, u_{k-1}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \sin k \arccos t, \tag{4.3}$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}$ — неизвестные постоянные. Обозначим через $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(Y, Y_n) \subset \mathcal{L}(Y, Y_n)$ множество всех полиномиальных проекционных ($P_n^2 = P_n$) операторов из Y в Y_n.

Приближенное решение $\Gamma_n^*(t) \in X_n$ уравнения (4.1) из класса $\mathcal{E}$ будем определять как точное решение любого из следующих однозначно разрешимых уравнений

$$K_n\Gamma_n \equiv G_n\Gamma_n + V_n\Gamma_n = f_n \quad (\Gamma_n \in X_n,\ f_n \in Y_n), \tag{4.4}$$

$$P_nK\Gamma_n \equiv P_nG\Gamma_n + P_nV\Gamma_n = P_nf \quad (\Gamma_n \in X_n,\ P_nf \in Y_n), \tag{4.5}$$

где $K_n = G_n + V_n \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)$, $P_nK = P_nG + P_nV \in \mathcal{L}(X_n, Y_n)$, $P_n \in \mathcal{P}_n$. Ясно, что каждое из уравнений (4.4) и (4.5) эквивалентно СЛАУ порядка $n \in \mathbb{N}$ относительно неизвестных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ элемента (4.3). Ясно также, что в рассматриваемом случае оптимальные оценки погрешности (1.3) и (1.6) принимают вид соответственно

$$V_n(\mathcal{E}) = \inf_{e_n \in \mathcal{E}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|\Gamma^* - \Gamma_n^*\|_X, \quad U_n(\mathcal{E}) = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|\Gamma^* - \Gamma_n^*\|_X.$$

Наряду с *общими* полиномиальными и проекционными методами (4.4) и (4.5) введем также следующие *конкретные* полиномиальные методы решения задачи (0.3)–(0.3′). Известно (напр., [4], гл. III, § 3), что согласно методу ортогональных многочленов коэффициенты приближенного решения (4.3) определяются из СЛАУ

$$i\alpha_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\alpha_k = c_{i-1}^u(f), \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.6}$$

где

$$c_{i-1}^u(f) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2} f(t) u_{i-1}(t)\, dt,\ \beta_{ik} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-t^2} V(\rho u_{k-1}; t)\, u_{i-1}(t)\, dt; \tag{4.6′}$$

аналогично, в методе подобластей указанные коэффициенты определяются из СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} (\cos k\theta_{i-1} - \cos k\theta_i + \gamma_{ik})\alpha_k = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.7}$$

где

$$f_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dt, \quad \gamma_{ik} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} V(\rho u_{k-1}; t)\, dt, \quad t_r = \cos\frac{2r+1}{2n+2}\pi\,. \tag{4.7′}$$

В ([4], гл. III, § 3) доказано, что каждая из СЛАУ (4.6)–(4.6′) и (4.7)–(4.7′) имеет единственное решение $\alpha_1^\circ, \alpha_2^\circ, \ldots, \alpha_n^\circ$ для всех $n \in \mathbb{N}$, хотя бы начиная с некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$; поэтому методы ортогональных многочленов и подобластей позволяют построить приближенное решение задачи (0.3)–(0.3′) в явном виде:

$$\Gamma_n^\circ(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\circ\, u_{k-1}(t). \tag{4.8}$$

Для классов однозначно разрешимых уравнений $\mathcal{E} = \{e\}$ вида (4.1) и $\mathcal{E}_n = \{e_n\}$ вида (4.4) и (4.5) справедлива

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия*

а) $V \in \mathcal{L}(X, Y)$ — *вполне непрерывные или же малые по норме операторы*;

б) *операторы* $V \in \mathcal{L}(X, Y)$ *и множество* $Y^* = \{y\} \subset Y$ *таковы, что множество* GX^* — *центрально-симметрический компакт в пространстве* Y.

Тогда

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp U_n(\mathcal{E}) \asymp \sup_{e\in\mathcal{E}} \|\Gamma^* - \Gamma_n^\circ\|_X \asymp d_n(GX^*, Y),$$

и методы ортогональных многочленов (4.8), (4.6)–(4.6′) *и подобластей* (4.8), (4.7)–(4.7′) *оптимальны по порядку как среди всех полиномиальных прямых методов* (4.4), *так и среди всех полиномиальных проекционных методов* (4.5).

Доказательство ведется по схеме доказательства теоремы 2.1, существенно используя при этом результаты автора из ([4], гл. III, § § 2, 3), а также лемму 2.1 при обосновании метода подобластей.

Обозначим через $\overline{\mathcal{E}}_n = \{e_n\}$ множество всех прямых методов, позволяющих построить приближенное решение уравнения (4.1) из класса $\mathcal{E}$ в виде элемента (4.3). Тогда по аналогии с теоремами 2.2 и 3.2 доказывается

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *справедливы соотношения*

$$\overline{V}_n(\mathcal{E}) \equiv \inf_{e_n\in\overline{\mathcal{E}}_n} \sup_{e\in\mathcal{E}} \|\Gamma^* - \Gamma_n\|_X \asymp d_n(GX^*, Y),$$

и оптимальными по порядку на классе $\mathcal{E}$ являются указанные выше методы ортогональных многочленов и подобластей, а также метод наименьших квадратов (4.3),

$$\sum_{k=1}^{n} (K\varphi_k, K\varphi_j)\,\alpha_k = (f, K\varphi_j), \quad j = \overline{1,n},$$

где $\varphi_r(t) = \sin r \arccos t$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве

$$Y = L_2(\rho), \quad \rho = (1-t^2)^{1/2}.$$

Заметим, что при доказательстве этой теоремы существенно используются результаты автора по методам ортогональных многочленов, подобластей и наименьших квадратов для уравнения теории крыла (0.3), изложенные в ([4], гл. III, § 3), а также приведенная выше лемма 2.1.

Замечание. Нетрудно доказать, что в условиях теорем 1.4, 2.1, 2.2, 4.1 и 4.2 справедливо равенство

$$d_n(X^*, X) = d_n(GX^*, Y), \tag{4.9}$$

а в условиях теорем 3.1 и 3.2 — неравенства

$$d_n(X^*, X)\ln 2 \le d_n(GX^*, Y) \le d_n(X^*, X). \tag{4.10}$$

Формулами (4.9), (4.10) удобно пользоваться в тех случаях, когда описание структуры множества функций GX^* проще, чем аналогичная задача для множества X^*; это так, например, для сингулярных уравнений I-рода (0.1)–(0.3), а также для ряда других классов сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Отметим, что результаты работы докладывались и обсуждались на различных научных конференциях (см., напр., [13], [19], [20], а также библиографию в [4], [5]), в том числе на Международных конференциях по конструктивной теории функций (Болгария, г. Варна, 1987 г.), по численным методам и их применениям (Болгария, г. София, 1989 г.), по теории приближений и функциональному анализу (Италия, г. Бари, 1992 г.) и на Школе-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения проф. Б.М. Гагаева (Россия, г. Казань, 1997 г.).

Литература

1. Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.* – М.: Наука, 1985. – 254 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
6. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО "Янус", 1995. – 520 с.
7. Каландия А.И. *Математические методы двумерной упругости.* – М.: Наука, 1973. – 303 с.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двухмерных задачах дифракции.* – Киев: Наук. думка, 1984 – 344 с.
9. Назарчук З.Т. *Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах.* – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.
10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 638 с.
11. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.
12. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений*: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Киев, 1985. – 48 с.
13. Велев Г.Д., Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные методы решения операторных уравнений* // Тр. Международн. конф. по числен. методам и их прилож. – София, 1988. – София: Изд-во Болг. АН, 1989. – С. 545–552.
14. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
15. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.
16. *Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики* / Под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
17. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
18. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.
19. Gabdulkhaev B.G., Velev G.D. *Best approximations of solutions of singular integral equations of the first kind* // Proc. Int. Conf. of Constructive Theory of Functions, 1987. – Sofia, 1988. – P. 471–477.
20. Gabdulkhaev B.G., Velev G.D. *Optimization of projection methods for solution of singular integral equation* // Intern. conf. in Approxim. theory and Funct. analysis. – Italy, Maratea, 1992. – P. 53.

Казанский государственный университет

Поступила 29.10.1999