Известия вузов. Математика
2013, № 10, с. 43–54

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Е.А. СОЗОНТОВА

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С НОРМАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Аннотация. Исследованы характеристические задачи с нормальными производными для системы гиперболического типа с двумя независимыми переменными. С помощью метода Римана получены условия разрешимости поставленных задач с точностью до набора произвольных постоянных.

Ключевые слова: гиперболическая система, характеристическая задача с нормальными производными, метод Римана.

УДК: 517.956

В работах [1]–[4] были исследованы характеристические задачи с нормальными производными для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве. В частности, были получены соотношения, устанавливающие связь между нормальными производными и граничными значениями задачи Гурса. В работе [5] была изучена задача с производными в граничных условиях для системы уравнений гиперболического типа с двукратными старшими частными производными. В статье [6] исследовалась характеристическая задача с нормальными производными первого порядка для системы уравнений

$$\begin{aligned} u_x &= a(x,y)v, \\ v_y &= b(x,y)u \end{aligned} \tag{1}$$

в области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$, $a, a_y, b, b_x \in C(\overline{D})$. Были получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, а также условия, при которых задача разрешима с точностью до одной или двух произвольных постоянных. В данной работе исследуется характеристическая задача с нормальными производными второго порядка для системы уравнений (1), а также характеристическая задача, в которой на характеристиках задаются линейные комбинации нормальных производных функций u и v до n-го порядка включительно.

Решение системы (1) класса $u, v, u_x, v_y \in C(D)$ назовем регулярным в D.

Задача 1. Найти функции u и v, являющиеся в области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ регулярным решением системы (1) и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} c_1(y)u_{xx}(x_0,y) + c_2(y)v_{xx}(x_0,y) &= n_1(y), \\ d_1(x)u_{yy}(x,y_0) + d_2(x)v_{yy}(x,y_0) &= n_2(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Считаем $c_1, c_2, n_1 \in C[y_0,y_1]$, $d_1, d_2, n_2 \in C[x_0,x_1]$, причем, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$.

Далее потребуются формулы общего решения задачи Гурса для системы уравнений (1) с граничными условиями $u(x_0,y) = \varphi(y)$, $v(x,y_0) = \psi(x)$, записанные в терминах матрицы

Поступила 06.07.2012

Римана [7]

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \varphi(y) + \int_{y_0}^{y} r_{11\eta}(x_0,\beta,x,y)\varphi(\beta)d\beta + \int_{x_0}^{x} r_{12\eta}(\alpha,y_0,x,y)\psi(\alpha)d\alpha,\\
v(x,y) &= \psi(x) + \int_{y_0}^{y} r_{21\xi}(x_0,\beta,x,y)\varphi(\beta)d\beta + \int_{x_0}^{x} r_{22\xi}(\alpha,y_0,x,y)\psi(\alpha)d\alpha,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где r_{ij} $(i,j=1,2)$ — компоненты матрицы Римана, которые определяются как решения систем интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
r_{11}(x,y,\xi,\eta) &= 1 - \int_{\xi}^{x} b(\alpha,y) r_{12}(\alpha,y,\xi,\eta)d\alpha,\\
r_{12}(x,y,\xi,\eta) &= -\int_{\eta}^{y} a(x,\beta) r_{11}(x,\beta,\xi,\eta)d\beta;
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{21}(x,y,\xi,\eta) &= -\int_{\xi}^{x} b(\alpha,y) r_{22}(\alpha,y,\xi,\eta)d\alpha,\\
r_{22}(x,y,\xi,\eta) &= 1 - \int_{\eta}^{y} a(x,\beta) r_{21}(x,\beta,\xi,\eta)d\beta.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Вычислим $u_{yy}(x,y_0)$, $v_{xx}(x_0,y)$.

Продифференцируем в (3) первое соотношение по переменной y

$$
u_y(x,y) = \varphi'(y) + r_{11\eta}(x_0,y,x,y)\varphi(y) + \int_{y_0}^{y} r_{11\eta\eta}(x_0,\beta,x,y)\varphi(\beta)d\beta + \\
+ \int_{x_0}^{x} r_{12\eta\eta}(\alpha,y_0,x,y)\psi(\alpha)d\alpha. \tag{6}
$$

Полагая в (6) $y=y_0$, имеем

$$
u_y(x,y_0) = \varphi'(y_0) + r_{11\eta}(x_0,y_0,x,y_0)\varphi(y_0) + \int_{x_0}^{x} r_{12\eta\eta}(\alpha,y_0,x,y_0)\psi(\alpha)d\alpha. \tag{7}
$$

Вычислим $r_{11\eta}(x_0,y_0,x,y_0)$, $r_{12\eta\eta}(\alpha,y_0,x,y_0)$. Для этого продифференцируем соотношения (4) по переменной η

$$
\begin{aligned}
r_{11\eta}(x,y,\xi,\eta) &= -\int_{\xi}^{x} b(\alpha,y) r_{12\eta}(\alpha,y,\xi,\eta)d\alpha,\\
r_{12\eta}(x,y,\xi,\eta) &= a(x,\eta) r_{11}(x,\eta,\xi,\eta) - \int_{\eta}^{y} a(x,\beta) r_{11\eta}(x,\beta,\xi,\eta)d\beta.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Так как $r_{11}(x,\eta,\xi,\eta) \equiv 1$, второе соотношение в (8) перепишется в виде

$$
r_{12\eta}(x,y,\xi,\eta) = a(x,\eta) - \int_{\eta}^{y} a(x,\beta) r_{11\eta}(x,\beta,\xi,\eta)d\beta.
$$

Дифференцируя (8) по переменной η, получим систему

$$
\begin{aligned}
r_{11\eta\eta}(x,y,\xi,\eta) &= -\int_{\xi}^{x} b(\alpha,y) r_{12\eta\eta}(\alpha,y,\xi,\eta)d\alpha,\\
r_{12\eta\eta}(x,y,\xi,\eta) &= a_\eta(x,\eta) + a(x,\eta) r_{11\eta}(x,\eta,\xi,\eta) - \int_{\eta}^{y} a(x,\beta) r_{11\eta\eta}(x,\beta,\xi,\eta)d\beta.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Так как
$$r_{11\eta}(x,\eta,\xi,\eta) = -\int_\xi^x b(\alpha,\eta) r_{12\eta}(\alpha,\eta,\xi,\eta)d\alpha = -\int_\xi^x b(\alpha,\eta)a(\alpha,\eta)d\alpha,$$
имеем
$$r_{12\eta\eta}(x,y,\xi,\eta) = a_\eta(x,\eta) - a(x,\eta)\int_\xi^x b(\alpha,\eta)a(\alpha,\eta)d\alpha - \int_\eta^y a(x,\beta) r_{11\eta\eta}(x,\beta,\xi,\eta)d\beta.$$
Тогда
$$\begin{aligned} &r_{11\eta}(x_0,y_0,x,y_0) = -\int_x^{x_0} b(\alpha,y_0) r_{12\eta}(\alpha,y_0,x,y_0)d\alpha = \int_{x_0}^x b(\alpha,y_0)a(\alpha,y_0)d\alpha, \\ &r_{12\eta\eta}(\alpha,y_0,x,y_0) = a_y(\alpha,y_0) + a(\alpha,y_0)\int_\alpha^x b(\alpha,y_0)a(\alpha,y_0)d\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$
С учетом (10) соотношение (7) перепишется в виде
$$\begin{aligned} u_y(x,y_0) = \varphi'(y_0) + \varphi(y_0)\int_{x_0}^x b(\alpha,y_0)a(\alpha,y_0)d\alpha + \\ + \int_{x_0}^x \left(a_y(\alpha,y_0) + a(\alpha,y_0)\int_\alpha^x b(\alpha_1,y_0)a(\alpha_1,y_0)d\alpha_1 \right)\psi(\alpha)d\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$
Аналогично записываем соотношение для $v_x(x_0,y)$
$$\begin{aligned} v_x(x_0,y) = \psi'(x_0) + \psi(x_0)\int_{y_0}^y a(x_0,\beta)b(x_0,\beta)d\beta + \\ + \int_{y_0}^y \left(b_x(x_0,\beta) + b(x_0,\beta)\int_\beta^y a(x_0,\beta_1)b(x_0,\beta_1)d\beta_1 \right)\varphi(\beta)d\beta. \end{aligned} \tag{12}$$
Далее вычисляем вторые производные $u_{yy}(x,y_0)$ и $v_{xx}(x_0,y)$. Дифференцируем соотношение (6) по переменной y
$$\begin{aligned} u_{yy}(x,y) = \varphi''(y) + (r_{11\eta}(x_0,y,x,y)\varphi(y))'_y + r_{11\eta\eta}(x_0,y,x,y)\varphi(y) + \\ + \int_{y_0}^y r_{11\eta\eta\eta}(x_0,\beta,x,y)\varphi(\beta)d\beta + \int_{x_0}^x r_{12\eta\eta\eta}(\alpha,y_0,x,y)\psi(\alpha)d\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$
Полагая $y = y_0$, имеем
$$\begin{aligned} u_{yy}(x,y_0) = \varphi''(y_0) + (r_{11\eta}(x_0,y,x,y)\varphi(y))'_{y=y_0} + r_{11\eta\eta}(x_0,y_0,x,y_0)\varphi(y_0) + \\ + \int_{x_0}^x r_{12\eta\eta\eta}(\alpha,y_0,x,y_0)\psi(\alpha)d\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$
Дифференцируя (9) по переменной η, получим систему
$$\begin{aligned} &r_{11\eta\eta\eta}(x,y,\xi,\eta) = -\int_\xi^x b(\alpha,y) r_{12\eta\eta\eta}(\alpha,y,\xi,\eta)d\alpha, \\ &r_{12\eta\eta\eta}(x,y,\xi,\eta) = a_{\eta\eta}(x,\eta) + \left(a(x,\eta)\int_x^\xi b(\alpha,\eta)a(\alpha,\eta)d\alpha \right)'_\eta + \\ &\qquad + a(x,\eta) r_{11\eta\eta}(x,\eta,\xi,\eta) - \int_\eta^y a(x,\beta) r_{11\eta\eta\eta}(x,\beta,\xi,\eta)d\beta. \end{aligned} \tag{15}$$
Учитывая (10), (15), соотношение (14) перепишем в виде

$$u_{yy}(x,y_0)=\varphi''(y_0)+\varphi'(y_0)\int_{x_0}^{x}b(\alpha,y_0)a(\alpha,y_0)d\alpha+\varphi(y_0)\int_{x_0}^{x}(b(\alpha,y_0)a(\alpha,y_0))'_y d\alpha+$$
$$+\varphi(y_0)\int_{x_0}^{x}\left(a_y(\alpha,y_0)+a(\alpha,y_0)\int_{\alpha}^{x}b(\alpha_1,y_0)a(\alpha_1,y_0)d\alpha_1\right)b(\alpha,y_0)d\alpha+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left(a_{yy}(\alpha,y_0)+\left(a(\alpha,y_0)\int_{\alpha}^{x}b(\alpha_1,y_0)a(\alpha_1,y_0)d\alpha_1\right)'_y+\right.$$
$$\left.+a(\alpha,y_0)\int_{\alpha}^{x}\left(a_y(\alpha_1,y_0)+a(\alpha_1,y_0)\int_{\alpha_1}^{x}b(\alpha_2,y_0)a(\alpha_2,y_0)d\alpha_2\right)b(\alpha_1,y_0)d\alpha_1\right)\psi(\alpha)d\alpha. \quad (16)$$

Введем обозначения

$$q_1(x_0,y,y_0)=\int_{y_0}^{y}a(x_0,\beta)b(x_0,\beta)d\beta,$$
$$q_2(x,x_0,y_0)=\int_{x_0}^{x}a(\alpha,y_0)b(\alpha,y_0)d\alpha,$$
$$q_{11}(x_0,y,y_0)=\int_{y_0}^{y}\left(b_x(x_0,\beta)+b(x_0,\beta)\int_{\beta}^{y}a(x_0,\beta_1)b(x_0,\beta_1)d\beta_1\right)a(x_0,\beta)d\beta,$$
$$q_{21}(x,x_0,y_0)=\int_{x_0}^{x}\left(a_y(\alpha,y_0)+a(\alpha,y_0)\int_{\alpha}^{x}a(\alpha_1,y_0)b(\alpha_1,y_0)d\alpha_1\right)b(\alpha,y_0)d\alpha, \quad (17)$$
$$p_1(x_0,y,\beta)=b_x(x_0,\beta)+b(x_0,\beta)\int_{\beta}^{y}a(x_0,\beta_1)b(x_0,\beta_1)d\beta_1=b_x(x_0,\beta)+b(x_0,\beta)q_1(x_0,y,\beta),$$
$$p_2(x,\alpha,y_0)=a_y(\alpha,y_0)+a(\alpha,y_0)\int_{\alpha}^{x}a(\alpha_1,y_0)b(\alpha_1,y_0)d\alpha_1=a_y(\alpha,y_0)+a(\alpha,y_0)q_2(x,\alpha,y_0),$$
$$p_{11}(x_0,y,\beta)=b(x_0,\beta)q_{11}(x_0,y,\beta)+p_{1x}(x_0,y,\beta),$$
$$p_{21}(x,\alpha,y_0)=a(\alpha,y_0)q_{21}(x,\alpha,y_0)+p_{2y}(x,\alpha,y_0).$$

Тогда (16) примет вид

$$u_{yy}(x,y_0)=\varphi''(y_0)+\varphi'(y_0)q_2(x,x_0,y_0)+\varphi(y_0)(q_{21}(x,x_0,y_0)+q_{2y}(x,x_0,y_0))+$$
$$+\int_{x_0}^{x}p_{21}(x,\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha.$$

Аналогично находим

$$v_{xx}(x_0,y)=\psi''(x_0)+\psi'(x_0)q_1(x_0,y,y_0)+\psi(x_0)(q_{11}(x_0,y,y_0)+q_{1x}(x_0,y,y_0))+$$
$$+\int_{y_0}^{y}p_{11}(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta.$$

Вычислим теперь $u_{xx}(x_0,y),\ v_{yy}(x,y_0)$.

Продифференцируем в (1) первое уравнение по x, а второе — по y

$$\begin{aligned}u_{xx}&=a_xv+av_x,\\ v_{yy}&=b_yu+bu_y.\end{aligned} \quad (18)$$

Полагая $y=y_0$ в первом соотношении (3), $x=x_0$ — во втором, имеем

$$\begin{aligned}u(x,y_0)&=\varphi(y_0)+\int_{x_0}^{x}a(\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha,\\ v(x_0,y)&=\psi(x_0)+\int_{y_0}^{y}b(x_0,\beta)\varphi(\beta)d\beta.\end{aligned} \quad (19)$$

Из (11), (12), учитывая обозначения (17), получим

$$u_y(x,y_0)=\varphi'(y_0)+\varphi(y_0)q_2(x,x_0,y_0)+\int_{x_0}^{x}p_2(x,\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha, \tag{20}$$

$$v_x(x_0,y)=\psi'(x_0)+\psi(x_0)q_1(x_0,y,y_0)+\int_{y_0}^{y}p_1(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta. \tag{21}$$

Тогда, используя (19)–(21), соотношения (18) перепишем в виде

$$u_{xx}(x_0,y)=a_x(x_0,y)v(x_0,y)+a(x_0,y)v_x(x_0,y)=a_x(x_0,y)\left(\psi(x_0)+\int_{y_0}^{y}b(x_0,\beta)\varphi(\beta)d\beta\right)+$$
$$+a(x_0,y)\left(\psi'(x_0)+\psi(x_0)q_1(x_0,y,y_0)+\int_{y_0}^{y}p_1(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta\right),$$

$$v_{yy}(x,y_0)=b_y(x,y_0)u(x,y_0)+b(x,y_0)u_y(x,y_0)=b_y(x,y_0)\left(\varphi(y_0)+\int_{x_0}^{x}a(\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha\right)+$$
$$+b(x,y_0)\left(\varphi'(y_0)+\varphi(y_0)q_2(x,x_0,y_0)+\int_{x_0}^{x}p_2(x,\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha\right).$$

Подставим $u_{xx}(x_0,y)$, $v_{xx}(x_0,y)$ в первое из условий (2). Получим следующее соотношение:

$$c_1(y)\Bigg[a_x(x_0,y)\left(\psi(x_0)+\int_{y_0}^{y}b(x_0,\beta)\varphi(\beta)d\beta\right)+$$
$$+a(x_0,y)\left(\psi'(x_0)+\psi(x_0)q_1(x_0,y,y_0)+\int_{y_0}^{y}p_1(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta\right)\Bigg]+$$
$$+c_2(y)\Bigg[\psi''(x_0)+\psi'(x_0)q_1(x_0,y,y_0)+$$
$$+\psi(x_0)(q_{11}(x_0,y,y_0)+q_{1x}(x_0,y,y_0))+\int_{y_0}^{y}p_{11}(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta\Bigg]=n_1(y). \tag{22}$$

Полагая в (22) $y=y_0$, имеем

$$c_1(y_0)[a_x(x_0,y_0)\psi(x_0)+a(x_0,y_0)\psi'(x_0)+a(x_0,y_0)\psi(x_0)q_1(x_0,y_0,y_0)]+$$
$$+c_2(y_0)\big[\psi''(x_0)+\psi'(x_0)q_1(x_0,y_0,y_0)+$$
$$+\psi(x_0)q_{11}(x_0,y_0,y_0)+\psi(x_0)q_{1x}(x_0,y_0,y_0)\big]=n_1(y_0). \tag{23}$$

Так как

$$q_1(x_0,y_0,y_0)\equiv 0,\quad q_{11}(x_0,y_0,y_0)\equiv 0,\quad q_{1x}(x_0,y_0,y_0)\equiv 0,$$

то из (23) получаем

$$c_1(y_0)(a_x(x_0,y_0)\psi(x_0)+a(x_0,y_0)\psi'(x_0))+c_2(y_0)\psi''(x_0)=n_1(y_0).$$

Если $c_2(y_0)\neq 0$, то

$$\psi''(x_0)=\frac{n_1(y_0)}{c_2(y_0)}-\frac{c_1(y_0)}{c_2(y_0)}(a_x(x_0,y_0)\psi(x_0)+a(x_0,y_0)\psi'(x_0)),$$

т. е. постоянная $\psi''(x_0)$ выражается через $\psi(x_0)$, $\psi'(x_0)$.

Введем обозначения

$$K_1(x_0,y,\beta)=c_2(y)p_{11}(x_0,y,\beta)+c_1(y)(a_x(x_0,y)b(x_0,\beta)+a(x_0,y)p_1(x_0,y,\beta)),$$

$$M_1(y)=\frac{c_1(y_0)}{c_2(y_0)}a(x_0,y_0)c_2(y)-c_2(y)q_1(x_0,y,y_0)-c_1(y)a(x_0,y),$$

$$N_1(y)=\frac{c_1(y_0)}{c_2(y_0)}a_x(x_0,y_0)c_2(y)-c_2(y)(q_{11}(x_0,y,y_0)+q_{1x}(x_0,y,y_0))-\\ -c_1(y)a_x(x_0,y)-c_1(y)a(x_0,y)q_1(x_0,y,y_0).$$

Тогда интегральное уравнение (22) перепишется в виде

$$\int_{y_0}^{y}K_1(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta=n_1(y)-\frac{c_2(y)}{c_2(y_0)}n_1(y_0)+M_1(y)\psi'(x_0)+N_1(y)\psi(x_0). \tag{24}$$

Аналогичным образом второе условие в (2) позволяет записать интегральное уравнение

$$\int_{x_0}^{x}K_2(x,\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha=n_2(x)-\frac{d_1(x)}{d_1(x_0)}n_2(x_0)+M_2(x)\varphi'(y_0)+N_2(x)\varphi(y_0), \tag{25}$$

где

$$d_1(x_0)\neq 0.$$

$$K_2(x,\alpha,y_0)=d_1(x)p_{21}(x,\alpha,y_0)+d_2(x)(b_y(x,y_0)a(\alpha,y_0)+b(x,y_0)p_2(x,\alpha,y_0)),$$

$$M_2(x)=\frac{d_2(x_0)}{d_1(x_0)}b(x_0,y_0)d_1(x)-d_1(x)q_2(x,x_0,y_0)-d_2(x)b(x,y_0),$$

$$N_2(x)=\frac{d_2(x_0)}{d_1(x_0)}b_y(x_0,y_0)d_1(x)-d_1(x)(q_{21}(x,x_0,y_0)+q_{2y}(x,x_0,y_0))-\\ -d_2(x)b_y(x,y_0)-d_2(x)b(x,y_0)q_2(x,x_0,y_0).$$

Полагая в (24), (25) $y=y_0$, $x=x_0$, получим соотношения

$$n_1(y_0)-\frac{c_2(y_0)}{c_2(y_0)}n_1(y_0)+M_1(y_0)\psi'(x_0)+N_1(y_0)\psi(x_0)=0,$$

$$n_2(x_0)-\frac{d_1(x_0)}{d_1(x_0)}n_2(x_0)+M_2(x_0)\varphi'(y_0)+N_2(x_0)\varphi(y_0)=0,$$

которые обращаются в тождества при любых значениях $\psi(x_0)$, $\psi'(x_0)$, $\varphi(y_0)$, $\varphi'(y_0)$ (так как $M_1(y_0)=N_1(y_0)=M_2(x_0)=N_2(x_0)=0$). Поэтому далее будем считать $\psi(x_0)$, $\psi'(x_0)$, $\varphi(y_0)$, $\varphi'(y_0)$ произвольными постоянными. Таким образом, уравнения (24), (25) содержат по две произвольные постоянные $\psi(x_0)$, $\psi'(x_0)$ и $\varphi(y_0)$, $\varphi'(y_0)$ соответственно.

Далее, дифференцируя уравнение (24) по y, а уравнение (25) — по x, получим

$$K_1(x_0,y,y)\varphi(y)+\int_{y_0}^{y}K_{1y}(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta=n_1'(y)-\frac{c_2'(y)}{c_2(y_0)}n_1(y_0)+\\ +M_1'(y)\psi'(x_0)+N_1'(y)\psi(x_0), \tag{26}$$

$$K_2(x,x,y_0)\psi(x)+\int_{x_0}^{x}K_{2x}(x,\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha=n_2'(x)-\frac{d_1'(x)}{d_1(x_0)}n_2(x_0)+\\ +M_2'(x)\varphi'(y_0)+N_2'(x)\varphi(y_0). \tag{27}$$

Соотношения (26), (27) при выполнении условий

$$K_1(x_0,y,y)=c_2(y)b_{xx}(x_0,y)+c_1(y)(a_x(x_0,y)b(x_0,y)+a(x_0,y)b_x(x_0,y))\neq 0,$$

$$K_2(x,x,y_0)=d_1(x)a_{yy}(x,y_0)+d_2(x)(b_y(x,y_0)a(x,y_0)+b(x,y_0)a_y(x,y_0))\neq 0$$

представляют собой уравнения Вольтерра второго рода для определения $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ соответственно, решения которых существуют и могут быть записаны в терминах их резольвент ([8], с. 46).

Остановимся вначале на исследовании уравнения (26). При выполнении условий

$$c_2(y)b_{xx}(x_0,y)+c_1(y)(a_x(x_0,y)b(x_0,y)+a(x_0,y)b_x(x_0,y))\neq 0,\quad c_2(y_0)\neq 0$$

возможны следующие варианты разрешимости этого уравнения:

1) если $M_1'(y)\not\equiv 0$, $N_1'(y)\not\equiv 0$, то $\varphi(y)$ определяется с точностью до двух произвольных постоянных (п. п.) $\psi(x_0)$, $\psi'(x_0)$;

2) если $M_1'(y)\not\equiv 0$, $N_1'(y)\equiv 0$, то у $\varphi(y)$ одна п. п. $\psi'(x_0)$;

3) если $M_1'(y)\equiv 0$, $N_1'(y)\not\equiv 0$, то у $\varphi(y)$ одна п. п. $\psi(x_0)$;

4) если $M_1'(y)\equiv 0$, $N_1'(y)\equiv 0$, то $\varphi(y)$ определяется однозначно.

Аналогично для уравнения (27) при выполнении условий

$$d_1(x)a_{yy}(x,y_0)+d_2(x)(b_y(x,y_0)a(x,y_0)+b(x,y_0)a_y(x,y_0))\neq 0,\quad d_1(x_0)\neq 0$$

получим следующие варианты разрешимости:

1) если $M_2'(x)\not\equiv 0$, $N_2'(x)\not\equiv 0$, то у $\psi(x)$ две п. п. $\varphi(y_0)$, $\varphi'(y_0)$;

2) если $M_2'(x)\not\equiv 0$, $N_2'(x)\equiv 0$, то у $\psi(x)$ одна п. п. $\varphi'(y_0)$;

3) если $M_2'(x)\equiv 0$, $N_2'(x)\not\equiv 0$, то у $\psi(x)$ одна п. п. $\varphi(y_0)$;

4) если $M_2'(x)\equiv 0$, $N_2'(x)\equiv 0$, то $\psi(x)$ определяется однозначно.

Рассмотрим теперь соотношения (26) и (27) совместно. Положим в (26) $y=y_0$, в (27) $x=x_0$. Получим систему соотношений

$$\begin{gathered}K_1(x_0,y_0,y_0)\varphi(y_0)-N_1'(y_0)\psi(x_0)=A_1(y_0),\\ -N_2'(x_0)\varphi(y_0)+K_2(x_0,x_0,y_0)\psi(x_0)=A_2(x_0),\end{gathered}$$

где

$$\begin{aligned}A_1(y_0)&=n_1'(y_0)-\frac{c_2'(y_0)}{c_2(y_0)}n_1(y_0)+M_1'(y_0)\psi'(x_0),\\ A_2(x_0)&=n_2'(x_0)-\frac{d_1'(x_0)}{d_1(x_0)}n_2(x_0)+M_2'(x_0)\varphi'(y_0).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(y_0)&=\frac{A_1(y_0)K_2(x_0,x_0,y_0)+A_2(x_0)N_1'(y_0)}{\Delta},\\ \psi(x_0)&=\frac{K_1(x_0,y_0,y_0)A_2(x_0)+A_1(y_0)N_2'(x_0)}{\Delta},\end{aligned}$$

если $\Delta=K_1(x_0,y_0,y_0)K_2(x_0,x_0,y_0)-N_2'(x_0)N_1'(y_0)\neq 0$. Таким образом, если рассматривать уравнения (26) и (27) совместно, то при выполнении условия $\Delta\neq 0$ постоянные $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$ могут быть выражены через $\varphi'(y_0)$, $\psi'(x_0)$. Учитывая это, будем комбинировать варианты разрешимости уравнения (26) с вариантами разрешимости уравнения (27). Каждую такую комбинацию обозначим упорядоченным набором (i,j), где i, j — номера вариантов разрешимости уравнений (26), (27) соответственно. Получается

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{gathered}c_2(y)b_{xx}(x_0,y)+c_1(y)(a_x(x_0,y)b(x_0,y)+a(x_0,y)b_x(x_0,y))\neq 0,\\ d_1(x)a_{yy}(x,y_0)+d_2(x)(b_y(x,y_0)a(x,y_0)+b(x,y_0)a_y(x,y_0))\neq 0,\\ c_2(y_0)\neq 0,\quad d_1(x_0)\neq 0.\end{gathered}\tag{28}$$

Тогда задача 1

1) *разрешима однозначно в случаях* $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$, $(4,4)$;

2) *разрешима с точностью до одной произвольной постоянной в случаях* $(2,3)$ (*произвольная постоянная* $\psi'(x_0)$), $(3,2)$ (*произвольная постоянная* $\varphi'(y_0)$);

3) *разрешима с точностью до двух произвольных постоянных* $\varphi'(y_0)$, $\psi'(x_0)$ *в случаях* $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$;

Если имеет место дополнительное условие

$$K_1(x_0,y_0,y_0)K_2(x_0,x_0,y_0)-N_2'(x_0)N_1'(y_0)\neq 0,$$

то задача 1 *разрешима однозначно в случае* $(3,3)$, *с точностью до одной произвольной постоянной в случаях* $(1,3)$ (*постоянная* $\psi'(x_0)$), $(3,1)$ (*постоянная* $\varphi'(y_0)$), *с точностью до двух произвольных постоянных* $\varphi'(y_0)$, $\psi'(x_0)$ *в случае* $(1,1)$. *При этом для каждого конкретного случая предполагается выполнение всех содержащихся в нем требований.*

Пусть теперь $K_1(x_0,y,y)\equiv 0$, $K_2(x,x,y_0)\equiv 0$. Дифференцируя уравнение (26) по переменной y, а уравнение (27) — по переменной x, получим

$$K_{1y}(x_0,y,y)\varphi(y)+\int_{y_0}^{y}K_{1yy}(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta=n_1''(y)-\frac{c_2''(y)}{c_2(y_0)}n_1(y_0)+ \\ +M_1''(y)\psi'(x_0)+N_1''(y)\psi(x_0), \quad (29)$$

$$K_{2x}(x,x,y_0)\psi(x)+\int_{x_0}^{x}K_{2xx}(x,\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha=n_2''(x)-\frac{d_1''(x)}{d_1(x_0)}n_2(x_0)+ \\ +M_2''(x)\varphi'(y_0)+N_2''(x)\varphi(y_0). \quad (30)$$

Вновь получили уравнения Вольтерра второго рода для определения $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ соответственно. Уравнения (29), (30) имеют ту же структуру, что и уравнения (26), (27) и могут быть исследованы по аналогичной схеме. При $y=y_0$ уравнение (29) принимает вид

$$K_{1y}(x_0,y_0,y_0)\varphi(y_0)=n_1''(y_0)-\frac{c_2''(y_0)}{c_2(y_0)}n_1(y_0)+M_1''(y_0)\psi'(x_0)+N_1''(y_0)\psi(x_0). \quad (31)$$

Поэтому уравнение (29), подобно уравнению (26), содержит две произвольные постоянные $\psi'(x_0)$, $\psi(x_0)$. Если в вариантах разрешимости 1)–4) уравнения (26) условие $K_1(x_0,y,y)\neq 0$ заменить на условие $K_{1y}(x_0,y,y)\neq 0$, выражения $M_1'(y)$, $N_1'(y)$ на $M_1''(y)$, $N_1''(y)$ соответственно, то получим варианты разрешимости уравнения (29). Аналогичные рассуждения справедливы и для уравнения (30), которое при $x=x_0$ принимает вид

$$K_{2x}(x_0,x_0,y_0)\psi(x_0)=n_2''(x_0)-\frac{d_1''(x_0)}{d_1(x_0)}n_2(x_0)+M_2''(x_0)\varphi'(y_0)+N_2''(x_0)\varphi(y_0). \quad (32)$$

Если же рассматривать соотношения (31), (32) совместно, то часть произвольных постоянных, а именно $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$, могут быть выражены через постоянные $\varphi'(y_0)$, $\psi'(x_0)$. При этом необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$K_{1y}(x_0,y_0,y_0)K_{2x}(x_0,x_0,y_0)-N_1''(y_0)N_2''(x_0)\neq 0.$$

Таким образом, если в теореме 1 условия (28) заменить на условия

$$c_2'(y)b_{xx}(x_0,y)+c_2(y)(3b(x_0,y)b_x(x_0,y)a(x_0,y)+b^2(x_0,y)a_x(x_0,y))+ \\ +c_1'(y)(a_x(x_0,y)b(x_0,y))'_x+c_1(y)((a_y(x_0,y)b(x_0,y))'_x+a^2(x_0,y)b^2(x_0,y))\neq 0,$$

$$d_1'(x)a_{yy}(x,y_0)+d_1(x)(3a(x,y_0)a_y(x,y_0)b(x,y_0)+a^2(x,y_0)b_y(x,y_0))+ \\ +d_2'(x)(b_y(x,y_0)a(x,y_0))'_y+d_2(x)((b_x(x,y_0)a(x,y_0))'_y+a^2(x,y_0)b^2(x,y_0))\neq 0$$

соответственно, то легко записать варианты разрешимости задачи 1 в случае, если величины $K_1(x_0, y, y)$, $K_2(x, x, y_0)$ обращаются в нуль одновременно. При этом для вариантов (1,1), (1,3), (3,1), (3,3) условие $K_1(x_0, y_0, y_0)K_2(x_0, x_0, y_0) - N_2'(x_0)N_1'(y_0) \neq 0$ заменится условием $K_{1y}(x_0, y_0, y_0)K_{2x}(x_0, x_0, y_0) - N_1''(y_0)N_2''(x_0) \neq 0$.

Дальнейшее исследование уравнений (26), (27) в случае, когда $K_{1y}(x_0, y, \beta)|_{\beta=y} \equiv 0$, $K_{2x}(x, \alpha, y_0)|_{\alpha=x} \equiv 0$ соответственно, проводится аналогично. При этом рассуждения повторяются многократно, а именно, потребуется исследовать уравнения

$$K_{1y}^{(i-1)}(x_0, y, y)\varphi(y) + \int_{y_0}^{y} K_{1y}^{(i)}(x_0, y, \beta)\varphi(\beta)d\beta = n_1^{(i)}(y) - \frac{c_2^{(i)}(y)}{c_2(y_0)}n_1(y_0) + \\ + M_1^{(i)}(y)\psi'(x_0) + N_1^{(i)}(y)\psi(x_0), \quad (33)$$

$$K_{2x}^{(i-1)}(x, x, y_0)\psi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_{2x}^{(i)}(x, \alpha, y_0)\psi(\alpha)d\alpha = n_2^{(i)}(x) - \frac{d_1^{(i)}(x)}{d_1(x_0)}n_2(x_0) + \\ + M_2^{(i)}(x)\varphi'(y_0) + N_2^{(i)}(x)\varphi(y_0) \quad (34)$$

$(i = 3, 4, \dots)$. Уравнения (33), (34) при заданном i получаются путем дифференцирования уравнений при $i-1$ в том случае, когда $K_{1y}^{(i-1)}(x_0, y, y) \equiv 0$, $K_{2x}^{(i-1)}(x, x, y_0) \equiv 0$ соответственно. Структура этих уравнений аналогична структуре уравнений (29), (30), следовательно, все рассуждения могут быть перенесены на уравнения (33), (34). При любом значении i решения этих уравнений могут зависеть от одной или двух произвольных постоянных либо вовсе не зависеть от них. Совместное рассмотрение уравнений (33), (34) при $y = y_0$, $x = x_0$ позволяет постоянные $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$ выразить через $\varphi'(y_0)$, $\psi'(x_0)$. Таким образом, в случаях, когда в уравнениях (33), (34) $K_{1y}^{(i-1)}(x_0, y, y) \equiv 0$, $K_{2x}^{(i-1)}(x, x, y_0) \equiv 0$ соответственно, решение задачи 1 по-прежнему может зависеть не более чем от двух произвольных постоянных либо вовсе не зависеть от них.

Основываясь на полученных результатах, перейдем к изучению следующей задачи.

Задача 2. Найти в области $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1\}$ регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} a_0(y)\varphi(y) + \sum_{i=1}^{m} a_i(y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\Big|_{x=x_0} + \sum_{j=1}^{n} c_j(y)\frac{\partial^j v}{\partial x^j}\Big|_{x=x_0} = m_1(y), \\ b_0(x)\psi(x) + \sum_{i=1}^{r} b_i(x)\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\Big|_{y=y_0} + \sum_{j=1}^{s} d_j(y)\frac{\partial^j v}{\partial y^j}\Big|_{y=y_0} = m_2(x). \end{aligned} \quad (35)$$

Остановимся вначале на исследовании характера разрешимости частного случая задачи 2 при $m = 1$, $n = 2$, $r = 1$, $s = 2$: найти в области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} a_0(y)\varphi(y) + a_1(y)u_x(x_0, y) + c_1(y)v_x(x_0, y) + c_2(y)v_{xx}(x_0, y) = m_1(y), \\ b_0(x)\psi(x) + b_1(x)u_y(x, y_0) + d_1(x)v_y(x, y_0) + d_2(x)v_{yy}(x, y_0) = m_2(x). \end{aligned} \quad (36)$$

Вычислим $u_x(x_0, y)$ и $v_y(x, y_0)$. Проинтегрируем первое уравнение системы (1) в пределах от x_0 до x, а второе — в пределах от y_0 до y

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \varphi(y) + \int_{x_0}^{x} a(\alpha,y)v(\alpha,y)d\alpha, \\ v(x,y) &= \psi(x) + \int_{y_0}^{y} b(x,\beta)u(x,\beta)d\beta. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (1), учитывая (37), получим

$$u_x(x,y) = a(x,y)v(x,y) = a(x,y)\left(\psi(x) + \int_{y_0}^{y} b(x,\beta)u(x,\beta)d\beta\right),$$

$$v_y(x,y) = b(x,y)u(x,y) = b(x,y)\left(\varphi(y) + \int_{x_0}^{x} a(\alpha,y)v(\alpha,y)d\alpha\right).$$

Тогда

$$u_x(x_0,y) = a(x_0,y)\left(\psi(x_0) + \int_{y_0}^{y} b(x_0,\beta)\varphi(\beta)d\beta\right),$$

$$v_y(x,y_0) = b(x,y_0)\left(\varphi(y_0) + \int_{x_0}^{x} a(\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha\right).$$

Подставим $u_x(x_0, y)$ и вычисленные ранее $v_x(x_0, y)$, $v_{xx}(x_0, y)$ в первое из условий (36). Получим интегральное уравнение

$$a_0(y)\varphi(y) + \int_{y_0}^{y} K_1^*(x_0,y,\beta)\varphi(\beta)d\beta = m_1(y) + N_1^*(y)\psi(x_0) + M_1^*(y)\psi'(x_0) + \\ + L_1^*(y)\psi''(x_0), \tag{38}$$

где

$$K_1^*(x_0,y,\beta) = a_1(y)a(x_0,y)b(x_0,\beta) + c_1(y)p_1(x_0,y,\beta) + c_2(y)p_{11}(x_0,y,\beta),$$

$$N_1^*(y) = -(a_1(y)a(x_0,y) + c_1(y)q_1(x_0,y,y_0) + c_2(y)q_{11}(x_0,y,y_0) + c_2(y)q_{1x}(x_0,y,y_0)),$$

$$M_1^*(y) = -(c_1(y) + c_2(y)q_1(x_0,y,y_0)),$$

$$L_1^*(y) = -c_2(y).$$

Уравнение (38) содержит три произвольные постоянные $\psi(x_0)$, $\psi'(x_0)$, $\psi''(x_0)$.

Подставляя теперь $u_y(x, y_0)$, $v_y(x, y_0)$, $v_{yy}(x, y_0)$ во второе из условий (36), получим интегральное уравнение для определения $\psi(x)$

$$b_0(x)\psi(x) + \int_{x_0}^{x} K_2^*(x,\alpha,y_0)\psi(\alpha)d\alpha = m_2(x) + N_2^*(x)\varphi(y_0) + M_2^*(x)\varphi'(y_0), \tag{39}$$

где

$$K_2^*(x,\alpha,y_0) = b_1(x)p_2(x,\alpha,y_0) + d_1(x)b(x,y_0)a(\alpha,y_0) + d_2(x)a(\alpha,y_0)b_y(x,y_0) + \\ + d_2(x)b(x,y_0)p_2(x,\alpha,y_0),$$

$$N_2^*(x) = -(b_1(x)q_2(x,x_0,y_0) + d_1(x)b(x,y_0) + d_2(x)b_y(x,y_0) + d_2(x)b(x,y_0)q_2(x,x_0,y_0)),$$

$$M_2^*(x) = -(b_1(x) + d_2(x)b(x,y_0)).$$

Уравнение (39) содержит две произвольные постоянные $\varphi(y_0)$, $\varphi'(y_0)$.

Пусть $a_0(y) \neq 0$, $b_0(x) \neq 0$. Рассматривая уравнения (38) (при $y = y_0$) и (39) (при $x = x_0$) совместно, получим, что при выполнении условия $a_0(y_0)b_0(x_0) - N_1^*(y_0)N_2^*(x_0) \neq 0$ постоянные $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$ могут быть выражены через постоянные $\varphi'(y_0)$, $\psi'(x_0)$, $\psi''(x_0)$. В этом случае решение задачи (1), (36) может зависеть от одной до трех произвольных постоянных, либо вовсе не зависеть от них.

Пусть $a_0(y) = 0$, $b_0(x) = 0$. Дифференцируя уравнение (38) по переменной y, а уравнение (39) — по переменной x, получим интегральные уравнения

$$K_1^*(x_0, y, y)\varphi(y) + \int_{y_0}^{y} K_{1y}^*(x_0, y, \beta)\varphi(\beta)d\beta = m_1'(y) + N_1^{*'}(y)\psi(x_0) + M_1^{*'}(y)\psi'(x_0) + \\ + L_1^{*'}(y)\psi''(x_0), \quad (40)$$

$$K_2^*(x, x, y_0)\psi(x) + \int_{x_0}^{x} K_{2x}^*(x, \alpha, y_0)\psi(\alpha)d\alpha = m_2'(x) + N_2^{*'}(x)\varphi(y_0) + M_2^{*'}(x)\varphi'(y_0), \quad (41)$$

структура которых аналогична структуре уравнений (38), (39) соответственно. Следовательно, все рассуждения с очевидными изменениями переносятся на уравнения (40), (41). Дальнейшее исследование уравнений (38), (39) проводится аналогично. При этом рассуждения повторяются многократно, а именно, потребуется исследовать уравнения

$$K_{1y}^{*(i-1)}(x_0, y, y)\varphi(y) + \int_{y_0}^{y} K_{1y}^{*(i)}(x_0, y, \beta)\varphi(\beta)d\beta = m_1^{(i)}(y) + \\ + N_1^{*(i)}(y)\psi(x_0) + M_1^{*(i)}(y)\psi'(x_0) + L_1^{*(i)}(y)\psi''(x_0), \quad (42)$$

$$K_{2x}^{*(i-1)}(x, x, y_0)\psi(x) + \int_{x_0}^{x} K_{2x}^{*(i)}(x, \alpha, y_0)\psi(\alpha)d\alpha = m_2^{(i)}(x) + \\ + N_2^{*(i)}(x)\varphi(y_0) + M_2^{*(i)}(x)\varphi'(y_0) \quad (43)$$

$(i = 2, 3, \dots)$, структура которых аналогична структуре уравнений (38), (39). Уравнения (42), (43) при заданном i получаются путем дифференцирования уравнений при $i-1$ в том случае, когда $K_{1y}^{*(i-1)}(x_0, y, y) \equiv 0$, $K_{2x}^{*(i-1)}(x, x, y_0) \equiv 0$ соответственно. Итак, решение задачи (1), (36) может зависеть от одной до трех произвольных постоянных либо вовсе не зависеть от них.

Проводя аналогичные рассуждения, можно установить, что

если $m = 2$, $n = 1$, $r = 2$, $s = 1$, то число произвольных постоянных $t \le 3$;

если $m = 1$, $n = 2$, $r = 2$, $s = 1$, то $t \le 4$;

если $m = 2$, $n = 2$, $r = 2$, $s = 2$, то $t \le 4$;

если $m = 2$, $n = 3$, $r = 2$, $s = 3$, то $t \le 5$, и т. д.

Перейдем теперь к задаче 2 при произвольных m, n, r, s. Аналогами уравнений (38), (39) являются следующие уравнения:

$$a_0(y)\varphi(y) + \int_{y_0}^{y} P_1(x_0, y, \beta)\varphi(\beta)d\beta = m_1(y) + Q_1(y)\psi(x_0) + \sum_{i=1}^{k} R_i(y)\psi^{(i)}(x_0), \quad (44)$$

$$b_0(x)\psi(x) + \int_{x_0}^{x} P_2(x, \alpha, y_0)\psi(\alpha)d\alpha = m_2(x) + Q_2(x)\varphi(y_0) + \sum_{i=1}^{l} S_i(x)\varphi^{(i)}(y_0), \quad (45)$$

где $k = \max\{m-1, n\}$, $l = \max\{r, s-1\}$. Положим в (44), (45) $y = y_0$, $x = x_0$ соответственно. При выполнении условия $a_0(y_0)b_0(x_0) - Q_1(y_0)Q_2(x_0) \ne 0$ постоянные $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$ могут быть выражены через $\varphi^{(i)}(y_0)$, $\psi^{(j)}(x_0)$ $(i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, k})$.

Итак, справедлива

Теорема 2. *Если* $a_i^2 + c_j^2 \neq 0$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, $b_k^2 + d_l^2 \neq 0$ $(k = \overline{1,r},\ l = \overline{1,s})$ *и* $a_0(y) \neq 0$, $b_0(x) \neq 0$, *то число произвольных постоянных* t, *с точностью до которых разрешима задача* 2, *может принимать значение*

$$0 \leq t \leq T,$$

где $T = \max\{n + r,\ m + r - 1,\ n + s - 1,\ m + s - 2\}$.

Литература

[1] Zhegalov V.I. *Relation between the boundary values of Goursat problem and the normal derivatives* (Conditionally Well-Posed Problems: Moscow, TVP Sc. Publ., 1994), pp. 346–349.

[2] Котухов М.П. *О некоторых дифференциальных свойствах решений одного уравнения в частных производных*, Изв. вузов. Матем., № 5, 59–62 (1996).

[3] Миронов А.Н. *О связи граничных значений задачи Гурса с нормальными производными третьего порядка*, Изв. вузов. Матем., № 10, 23–26 (1999).

[4] Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях*, Дифференц. уравнения **36** (6), 833–836 (2000).

[5] Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными*, Изв. вузов. Матем., № 3, 12–21 (2007).

[6] Жегалов В.И. *Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений*, Изв. вузов. Матем., № 8, 70–72 (2008).

[7] Миронова Л.Б. *О методе Римана в* R^n *для одной системы с кратными характеристиками*, Изв. вузов. Матем., № 1, 34–39 (2006).

[8] Забрейко П.П., Кошелев А.И. и др. *Интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).

Е.А. Созонтова

ассистент, кафедра математического анализа, алгебры и геометрии,

Елабужский филиал Казанского (Приволжского) федерального университета,

ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423603, Россия,

`e-mail:` sozontova.elena@gmail.com

E.A. Sozontova

Characteristic problems with normal derivatives for hyperbolic systems

Abstract. We consider characteristic problems with normal derivatives for a hyperbolic system with two independent variables. Using the Riemann method, we obtain solvability conditions for these problems accurate to several arbitrary constants.

Keywords: hyperbolic system, characteristic problem with normal derivatives, Riemann method.

E.A. Sozontova

Assistant, Chair of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry,
Elabuga Branch of Kazan (Volga Region) Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423603 Russia,

`e-mail:` sozontova.elena@gmail.com