ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 530.12

Р.Ф. БИЛЯЛОВ

СПИНОРЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

1. Введение

В наиболее общей математической форме спиноры были введены Э. Картаном в 1913 г. [1], а в 1928 г. переоткрыты Ван дер Варденом [2] в связи с физическими исследованиями Дирака. Спиноры в общую теорию относительности были введены в [3]. В правой части уравнений Эйнштейна находится так называемый тензор энергии-импульса материальных полей, общий рецепт построения которого для тензорных и спинорных полей был предложен Л. Розенфельдом [4] в 1940 г. Метод Л. Розенфельда существенно основан на применении аппарата производной Ли. Построение производной Ли тензорных полей не встречает никаких трудностей, для спинорных полей это не так. При выводе формулы для тензора энергии-импульса спинорных полей Л. Розенфельд предполагает, что существует производная Ли спинорных полей со свойством: частное дифференцирование и дифференцирование Ли коммутируют между собой. Производная Ли спиноров вдоль векторных полей Киллинга была впервые построена А. Лихнеровичем [5]. В дальнейшем И. Косман постулировала формулу для производной Ли спиноров по аналогии с производной Ли для тензорных полей [6]. Обоснование формулы И. Косман было предложено в [7]. Производная Ли спинора у И. Косман не обладает тем свойством, что коммутатор производных Ли есть производная Ли вдоль коммутатора, не говоря уже о коммутировании частного дифференцирования и дифференцирования Ли.

Решение проблемы построения производной Ли спинорного поля и его применение к построению, на основе теоремы Нётер, тензора энергии-импульса спинорных полей в пространстве-времени общей теории относительности были получены в [8], [9]. Был применен метод индуцированных представлений для расширения спинорного представления группы Лоренца $O(1,3)$ до представления полной линейной группы $GL(4)$ четырехмерного пространства. При этом расширяется и пространство представления: пространство спиноров тензорным образом умножается на пространство симметрических тензоров второго ранга, определяющих квадратичную форму сигнатуры $(+,-,-,-)$. С помощью этой группы спиноры, ранее рассматриваемые как элементы расслоения, ассоциированного с главным расслоением ортогональных реперов, теперь могут рассматриваться как элементы расслоения, ассоциированного с главным расслоением линейных реперов.

В данной работе результаты [8], [9] обобщаются на случай произвольных римановых многообразий; показывается, что существует произвол в задании спиноров на римановых многообразиях, связанный с выбором сечений в главном расслоении $GL(n)$ со структурной группой $O(p,q)$, $n = p + q$. Если функция Лагранжа спинорного поля инвариантна относительно действия структурной группы на ассоциированном спинорном расслоениии, то соответствующая теория спинорного поля оказывается калибровочно инвариантной, при условии, что калибровочное преобразование есть изменение сечения.

2. Сечения главного расслоения $GL(n)(S_2(p,q), O(p,q))$

Пусть $O(p,q)$ — подгруппа в группе обратимых матриц $GL(n)$, состоящая из матриц A таких, что $A^T\eta A = \eta$, где $\eta = \mathrm{diag}(\underbrace{+1,\ldots,+1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{q})$. Определено главное расслоение $GL(n)(GL(n)/O(p,q), O(p,q))$ с тотальным пространством $GL(n)$, с базой $GL(n)/O(p,q)$ и со структурной группой $O(p,q)$, причем база диффеоморфна многообразию $S_2(p,q)$ квадратичных форм сигнатуры (p,q) ([10], с. 61).

Фундаментальные спинорные представления ортогональной группы $O(p,q)$ строятся следующим образом. Пусть $n = 2\nu$ или $n = 2\nu+1$, в комплексном пространстве $\Psi \equiv C_{2^\nu}$ существуют так называемые гамма-матрицы γ^α, определенные с точностью до выбора базиса в Ψ и удовлетворяющие соотношениям $\gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta}I_{2^\nu}$. Спинорное представление $o \in O(p,q) \to \Lambda(o) \in \mathrm{End}(\Psi)$ определяется условием $o\gamma = \Lambda^{-1}(o)\gamma\Lambda(o)$, где γ есть столбец с элементами γ^α и

$$\Lambda^{-1}(o)\gamma\Lambda(o) = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1}(o)\gamma^1\Lambda(o) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Lambda^{-1}(o)\gamma^n\Lambda(o) \end{pmatrix}.$$

В случае $p = 1,\ q = 3$ матрицы γ^α имеют вид

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и называются матрицами Дирака. Спиноры $\psi \in \Psi$ преобразуются по закону $\psi' = \Lambda\psi$. Величины $\overline{\psi} = \psi^+\gamma^0$, где $+$ означает эрмитово сопряжение, называют сопряженными спинорами, закон их преобразования имеет вид $\overline{\psi}' = \overline{\psi}\Lambda^{-1}$. Если ψ рассматриваются как контравариантные спиноры, то $\overline{\psi}$ — как ковариантные спиноры. Обозначение $\overline{\psi}$ для ковариантных спиноров сохраним и для случая произвольных p и q.

1. Если $q = 0$ (или $p = 0$), то гладкое отображение $\phi : GL(n) \to S_2(n,0) \times O(n)$, $\phi(A) = (\sqrt{A^TA}, \sqrt{A^TA}^{-1}A)$ в силу теоремы о полярном разложении есть диффеоморфизм. Таким образом, в этом случае расслоение $GL(n)(S_2(n,0), O(n))$ тривиально и существует глобальное сечение $s : S_2(n,0) \to GL(n)$, $g \to s(g) \in GL(n)$, где матрица $s(g)$ удовлетворяет условиям: 1) симметрична относительно η, 2) положительна относительно η, 3) $s(g)gs(g) = \eta$. Любое другое сечение получается путем умножения $s(g)$ на произвольную функцию $o(g)$ на $S_2(n,0)$ со значениями в $O(n)$.

2. Пусть $n = 2$, $p = q = 1$. Матрицу $g \in S_2(1,1)$ можно представить в виде

$$g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 - c^2 > 0.$$

Поверхность $D = 0$, где $D = c^2 - b^2$ — дискриминант характеристического уравнения $\det|g - \lambda\eta| = 0$, делит пространство переменных $a,\ b,\ c$ на три области: I. $b > |c|$, II. $-|c| < b < |c|$, III. $b < -|c|$. Так как $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, то $a^2 > 0$ для области II, поэтому она состоит из двух частей, в которых $a > 0$ или $a < 0$. Существуют η-симметрические преобразования

$$s_\pm(g) = \frac{1}{k_\pm}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}\begin{pmatrix} a-c & -b \\ b & a+c \end{pmatrix}\right), \quad k_\pm = \sqrt{\sqrt{a^2+b^2-c^2} \pm a},$$

которые удовлетворяют условиям $s_{\pm}^T(g)gs_{\pm}(g) = \pm\eta$. Если $D > 0$ и $D = u^2$, то $k_{\pm} = \frac{\sqrt{|a|-u}+\sqrt{|a|+u}}{\sqrt{2}}$ и $s_+(g)$ определено для $a > 0$, а $s_-(g)$ – для $a < 0$.

Положим

$$s(g) = s_1(g) = s_+(g), \quad g \in U_1 = \mathrm{I} \cup \mathrm{II}_{a>0} \cup \mathrm{III} \cup \{D = 0,\ a > 0\},$$
$$s(g) = s_2(g) = s_-(g)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \in U_2 = \mathrm{I} \cup \mathrm{II}_{a<0} \cup \mathrm{III} \cup \{D = 0,\ a < 0\}.$$

В областях I и III имеет место

$$s_1 = s_2(g)o = s_2(g)\frac{1}{u}\begin{pmatrix} b & c \\ c & b \end{pmatrix},$$

для области I выполнено неравенство $b > 0$, для области III выполнено $b < 0$. Если $b > 0$, то преобразование $o \in O(1,1)$ принадлежит связной компоненте группы $O(1,1)$, в которой содержится единица группы, значит на области $\mathrm{I} \subset U_1 \cap U_2$ сечения $s_1(g)$, $s_2(g)$ возможно гладким образом деформировать друг в друга. Если $b < 0$, то преобразование $o \in O(1,1)$ принадлежит связной компоненте группы $O(1,1)$, в которой единица группы не содержится, поэтому на области $\mathrm{III} \subset U_1 \cap U_2$ сечения $s_1(g)$, $s_2(g)$ невозможно гладким образом деформировать друг в друга. В итоге в $S_2(1,1)$ существуют две области U_1 и U_2, $S_2(1,1) = U_1 \cup U_2$, на которых определены локальные сечения.

3. Общий случай. Пусть $r = \min(p,q)$. Покажем, что на $S_2(p,q)$ существует атлас из $r+1$ карт, на которых определены локальные сечения.

Преобразования ортогональной группы $O(p,q)$ оставляют инвариантной квадратичную форму с матрицей η. Матрица $g \in S_2(p,q)$ определяет квадратичную форму той же сигнатуры. С помощью преобразований из группы $O(p,q)$ матрицу g можно привести к каноническому виду. Решение задачи получено в [11] в следующем виде. При одновременном рассмотрении пары форм их матрицы η и g можно привести к виду

$$\eta = \begin{pmatrix} G_{m_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & G_{m_k} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} T_{m_1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & T_{m_k} \end{pmatrix},$$

где

$$G_{m_i} = \begin{pmatrix} & & l_i \\ & \cdot & \\ \cdot & & \\ l_i & & \end{pmatrix}, \quad T_{m_i} = \begin{pmatrix} & & & & l_i\lambda_i \\ & & & l_i\lambda_i & 1 \\ & & \cdot & & \\ & l_i\lambda_i & 1 & & \\ l_i\lambda_i & 1 & & & \end{pmatrix},$$

здесь $l_i = \pm 1$, когда корни λ_i характеристического уравнения $\det|g - \lambda\eta| = 0$ вещественны, и $l_i = 2(1 \pm i)$, когда корни комплексны. В случае вещественных корней всегда существует G_{m_i}-симметрическая матрица s_{m_i} с положительными собственными значениями такая, что $s_{m_i}^T T_{m_i} s_{m_i} = \mathrm{sgn}(\lambda_i) G_{m_i}$. Матрицы s_{m_i} имеют вид

$$s_{m_i} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{m_i-2} & \mu_{m_i-1} & \mu_{m_i} \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{m_i-3} & \mu_{m_i-2} & \mu_{m_i-1} \\ 0 & 0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{m_i-4} & \mu_{m_i-3} & \mu_{m_i-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix},$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m_i}$ определяются как решения уравнений

$$\lambda_i \mu_1^2 = \operatorname{sgn}(\lambda_i), \quad \mu_1 > 0, \quad 2l_i\lambda_i\mu_2 + \mu_1 = 0,$$
$$l_i\lambda_i(2\mu_1\mu_3 + \mu_2^2) + 2\mu_1\mu_2 = 0, \quad l_i\lambda_i(2\mu_1\mu_4 + 2\mu_2\mu_3) + 2\mu_1\mu_3 + \mu_2^2 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$l_i\lambda_i\mu(2\mu_1\mu_{m_i} + 2\mu_2\mu_{m_i-1} + \dots + \tau_{m_i}) + 2\mu_1\mu_{m_i-1} + \ldots + \kappa_{m_i} = 0.$$

В последнем уравнении слагаемые τ_{m_i}, κ_{m_i} равны

$$\tau_{m_i} = 2\mu_k\mu_{k+1}, \qquad \kappa_{m_i} = 2\mu_{k-1}\mu_{k+1} + \mu_k^2, \quad \text{если } m_i = 2k,$$
$$\tau_{m_i} = 2\mu_k\mu_{k+2} + \mu_{k+1}^2, \quad \kappa_{m_i} = 2\mu_k\mu_{k+1}, \qquad \text{если } m_i = 2k+1.$$

Если корни комплексные, то существуют G_{m_i}-симметрические матрицы $s_{m_i\pm}$ такие, что можно найти решение обоих уравнений $s^T_{m_i\pm}T_{m_i}s_{m_i\pm} = \pm G_{m_i}$. В этом случае для однозначного определения μ_1 нужно потребовать, чтобы комплексное число μ_1 имело положительную вещественную часть. Отметим, что одно решение получается из другого путем умножения на G_{m_i}-симметрическую матрицу $P_{m_i} = \operatorname{sgn}(\beta_i)\mathrm{i}I_{m_i}$, i — мнимая единица, удовлетворяющую условию $P^2_{m_i} = -I_{m_i}$. Необходимость привлечения матриц P_{m_i} вызвана тем, что преобразование s_{m_i} переводит ортонормированный базис относительно квадратичной формы с матрицей G_{m_i} в ортонормированный базис относительно квадратичной формы с матрицей T_{m_i}, и при этом значения квадратичных форм на соответствующих элементах базисов имеют противоположные знаки. В случае комплексных корней и в случае вещественных корней, когда m_i — четное число, индексы квадратичных форм с матрицами G_{m_i} и T_{m_i} равны нулю. Если же m_i — нечетное число и корень вещественен и отрицателен, то преобразование s_{m_i} переводит индекс инерции $\pm$ в индекс $\mp$. Из закона инерции индекса квадратичных форм следует, что суммарный индекс инерции клеток T_{m_i}, для которых приходится вводить матрицы P_{m_i}, должен равняться нулю. В случае вещественных отрицательных корней в каноническом базисе матриц η и g уже надо вводить матрицы P_{m_i,m_j} ($i \neq j$, m_i, m_j — нечетные числа, $l_il_j < 0$), действущие на прямой сумме двух корневых подпространств, соответствующих клеткам размерностей m_i и m_j. По матрице $G_{m_i,m_j} = \begin{pmatrix} G_{m_i} & \\ & G_{m_j} \end{pmatrix}$ строим матрицу P_{m_i,m_j} следующим образом. Матрицам второго порядка, расположенным симметрично относительно центра и побочной диагонали матриц G_{m_i} или G_{m_j} сопоставим матрицы $\begin{pmatrix} & -l_i \\ l_i & \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} & -l_j \\ l_j & \end{pmatrix}$. Матрице второго порядка, лежащей на центральных элементах матриц G_{m_i} и G_{m_j}, сопоставим матрицу $\begin{pmatrix} & l_i \\ l_j & \end{pmatrix}$, связывающую различные жордановы клетки. Остальные элементы матрицы P_{m_i,m_j} положим равными нулю. Матрица P_{m_i,m_j} является G_{m_i,m_j}-симметрической матрицей, $P^2_{m_i,m_j} = -I_{m_i+m_j}$. Если отрицательных корней больше чем два, то может возникнуть произвол в составлении пар жордановых клеток. Но тогда можно ввести упорядочение в расположении жордановых клеток, принимая во внимание абсолютные величины собственных значений и порядки жордановых клеток. Далее первую жорданову клетку с $l_i > 0$ нужно связать с жордановой клеткой с $l_j < 0$. В итоге приходим к следующей картине.

Обозначим через $U_0 \in S_2(p,q)$ область, в которой $\forall g \in U_0$ существует η-симметрическое преобразование $s(g)$ с вещественными положительными собственными значениями или с комплексными собственными значениями с положительной вещественной частью, удовлетворяющее условиям $s^T(g)gs(g) = \eta$ и $s(\eta) = I$. Это преобразование $s(g)$, определенное на U_0, обозначим $s_0(g)$. Через U_k, $k = 1, \dots, r$, обозначим область в $S_2(p,q)$, в которой матрица $s_k(g)$, переводящая g в η, имеет вид $s(g)P(g)$. Преобразования $s(g)$ и $P(g)$ являются η-симметрическими преобразованиями, обладают общими инвариантными пространствами V_{2k} и V_{n-2k}, причем $P^2\big|_{V_{2k}} = -I_{2k}$, а $P^2\big|_{V_{n-2k}} = I_{n-2k}$. Собственные значения преобразования $s(g)$ положительны, если они вещественны и имеют положительные вещественные части, если комплексны. Преобразование P^2 симметрично относительно η и g, имеет общие корневые подпространства с $g^{-1}\eta$, собственные значения равны $\pm$, и коммутирует с s, $g^{-1}\eta$. Области U_0 и U_k, $k \neq 0$, пересекаются в точках g, в которых g имеет комплексные собственные значения.

Возникает вопрос о гладкости построенных сечений (см., напр., [12] с. 229).

Лемма 1. *Пусть для матриц A_1 и A_2 любая сумма собственного значения одной матрицы с собственным значением другой матрицы не равна нулю, тогда матричное уравнение $A_1X + XA_2 = B$ имеет решение относительно X и оно единственно.*

Гладкая зависимость $Q = P^2$ от g. Матрица Q обладает свойствами: $Q^2 = I_n$, $Qg^{-1}\eta = g^{-1}\eta Q$. Дифференцируя эти соотношения, получим уравнения

$$QdQ + dQQ = 0,$$
$$g^{-1}\eta dQ - dQg^{-1}\eta = Qg^{-1}dgg^{-1}\eta - g^{-1}dgg^{-1}\eta Q.$$

Эти уравнения относительно dQ допускают единственное решение. Для доказательства на инвариантных подпространствах введем ортонормированные базисы, в которых матрицы Q и $g^{-1}\eta$ имеют клеточно диагональную структуру $Q = \begin{pmatrix} -I_{2k} & \\ & I_{n-2k} \end{pmatrix}$, $g^{-1}\eta = \begin{pmatrix} R_1 & \\ & R_2 \end{pmatrix}$, где R_1 состоит из жордановых клеток с отрицательными собственными значениями, а R_2 — из жордановых клеток с положительными вещественными значениями или с комплексными собственными значениями с положительной вещественной частью. Матрицу dQ можно записать в виде $dQ = \begin{pmatrix} dQ_{11} & dQ_{12} \\ dQ_{21} & dQ_{22} \end{pmatrix}$. В введенном базисе из первого уравнения имеем $dQ_{11} = 0$, $dQ_{22} = 0$, а dQ_{12} и dQ_{21} однозначно определяются из второго уравнения на основе леммы. Из существования первого дифференциала следует существование дифференциалов любых порядков. Значит, $Q = P^2$ гладко зависит от g.

Существование гладкого P. Ввиду гладкости Q в его корневых пространствах можно построить ортонормированный базис из гладких векторов, в этом базисе, например, положим $P|_{V_{2k}} = \begin{pmatrix} & -I_k \\ I_k & \end{pmatrix}$, $P|_{V_{n-2k}} = I|_{V_{n-2k}}$. В базисе, где задана матрица η, элементы матрицы P будут гладкими.

Гладкая зависимость $s(g)$ от g. Уравнение $P^Ts^TgsP = \eta$ можно переписать в виде $s^Tgs = {P^T}^{-1}\eta P^{-1} = \eta {P^{-1}}^2 = \eta Q^{-1}$. Но s и Q коммутируют между собой, поэтому $g = \eta Q^{-1}s^{-2}$, значит, $s^2 = g^{-1}\eta Q^{-1}$. Дифференцируя, находим $dss + sds = d(g^{-1}\eta Q^{-1})$. В силу леммы ds существует, значит, s есть гладкая функция от g.

3. Действие группы Ли $GL(n)$ на $S_2(p, q) \times \Psi$

Пусть области U_i, $i = 0, 1, \ldots, r$, на которых определены сечения $s_i(g)$, задают покрытие многообразия $S_2(p, q)$. На непустом пересечении $U_i \cap U_j$ имеет место равенство $s_i(g) = s_j(g)o_{ij}(g)$, где o_{ij} — некоторое ортогональное преобразование. В дальнейшем вместо s_i будем писать s.

Пусть функция $\Lambda : O(p, q) \to \mathrm{End}\{\Psi\}$, $o \in O(p, q) \to \Lambda(o) \in \mathrm{End}\{\Psi\}$ задает спинорное представление ортогональной группы $O(p, q)$ в пространстве спиноров Ψ. Действие группы Ли $GL(n)$ на пространстве $S_2(p, q) \times \Psi$ определим следующим образом:

$$A \in GL(n) : (g, \psi) \to (g', \psi'),$$
$$g' = {A^{-1}}^T gA^{-1},$$
$$\psi' = \Lambda(s^{-1}(g')As(g))\psi.$$

Аргумент $s^{-1}(g')As(g)$ функции Λ принадлежит ортогональной группе $O(p, q)$, т. к.

$$(s^{-1}(g')As(g))^T\eta(s^{-1}(g')As(g)) =$$
$$= s^T(g)A^T{s^{-1}}^T(g')\eta s^{-1}(g')As(g) = s^T(g)A^Tg'As(g) = s^T(g)gs(g) = \eta.$$

Если $g'' = (B^{-1})^Tg'B^{-1}$, то $s^{-1}(g'')Bs(g')s^{-1}(g')As(g) = s^{-1}(g'')BAs(g)$.

Если $A \in O(p,q)$, $g = \eta$, то $g' = \eta$, $\psi' = \Lambda(A)\psi$. Отсюда видно, что действие группы Ли $GL(n)$ на пространстве $S_2(p,q) \times \Psi$ содержит представление ортогональной группы $O(p,q)$.

Наряду с гамма-матрицами $\gamma = (\gamma^\alpha)$, связанными с каноническим метрическим тензором η, введем гамма-матрицы $\gamma_g = (\gamma_g^\alpha) = s(g)\gamma = (s(g)^\alpha_\beta \gamma^\beta)$, связанные с метрическим тензором g. Закон их преобразования $\gamma_{g'} = A\Lambda\gamma_g\Lambda^{-1}$.

При переходе к другому сечению $s_1 = so$ закон преобразования ψ_{s_1} имеет вид

$$\psi'_{s_1} = \Lambda(s_1^{-1}(g')As_1(g)\psi_{s_1}) = \Lambda(o^{-1}(g')s^{-1}(g')As(g)o(g))\psi_{s_1} = \\ = \Lambda(o^{-1}(g'))\Lambda(s^{-1}(g')As(g))\Lambda(o(g))\psi_{s_1},$$

поэтому переход к другому сечению можно интерпретировать и как преобразование базиса в пространстве спиноров $\psi_s = \Lambda(o)\psi_{so} = \Lambda(o)\psi_{s_1}$. Если же $s_2 = s_1 o_1 = soo_1$, то $\psi_s = \Lambda(o)\psi_{s_1} = \Lambda(o)\Lambda(o_1)\psi_{s_2} = \Lambda(oo_1)\psi_{s'_2}$.

4. Действие группы Ли $GL(n)$ на произвольных многообразиях Y, ассоциированные расслоения $E(M,Y,GL(n),L(M))$. Ковариантные производные и их свойства

Пусть функции $y' = f(y,A)$, где $y \in Y$, $\dim Y = m$, $A \in GL(n)$, задают действие полной линейной группы $GL(n)$ на дифференцируемом многообразии Y. Эти функции обладают свойством

$$f(f(y,A),B) = f(y,BA) \ \ \forall y \in Y, \ \ \forall B, A \in GL(n).$$

Для тождественного преобразования $A = 1$ выполняется $f(y,1) \equiv y$.

В дальнейшем через $y = (y^1,\dots,y^n)^T$ будем обозначать локальные координаты на Y. Элементы группы Ли $GL(n)$ будем отождествлять с матрицами $A = (a^k_l)$. Через $\frac{\partial f(y,A)}{\partial A}$ обозначим матрицу с элементами $[\frac{\partial f(y,A)}{\partial A}]^k_l = \frac{\partial f(y,A)}{\partial a^l_k}$. Имеют место тождества, полученные дифференцированием закона умножения в группе

$$\frac{\partial f(y,B)}{\partial y}\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A} = \frac{\partial f(y,B)}{\partial A}B,$$

$$\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial y} = I_m, \quad \frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial a^k_l}\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial a^i_j} = \frac{\partial^2 (y,I_n)}{\partial a^i_j \partial a^k_l} + \frac{\partial f(y,I_n)}{\partial a^k_j}\delta^l_i,$$

$$\frac{\partial f(f(y,B),I_n)}{\partial A} = B\frac{\partial f(y,A)}{\partial A}.$$

Пусть M — многообразие, $\dim N = n$. Действие группы Ли $GL(n)$ на многообразии Y порождает расслоение $E(M,Y,GL(n),L(M))$, ассоциированное главному расслоению $L(M)$ линейных реперов на многообразии M. Ассоциированное расслоение $E(M,Y,GL(n),L(M))$ определяется как факторпространство произведения $L(M)\times Y$ относительно правого действия группы $GL(n)$

$$A \in GL(n): \ (e,y) \in L(M)\times Y \ \to \ A(e,y) = (eA, f(y,A^{-1})).$$

Поле реперов e на U задает тривиализацию расслоения $L(M)$ и, одновременно, тривиализацию расслоения E. В заданной тривиализации любое сечение $s: \ U \to E$ однозначно задается отображением $y: U \to Y$. Если $e'(x) = e(x)A(x)$, то отображения $y, y': U \to Y$, определяющие одно и то же сечение, связаны соотношением $y'(x) = f(y(x),A(x))$.

Для матриц координат векторов реперов $e'(x')$ и $e(x)$ относительно натуральных реперов $\partial x'$ и ∂x соответственно, имеем $e'(x') = \partial x' e' = \partial x \frac{\partial x}{\partial x'}e' = \partial x e$, откуда $\frac{\partial x}{\partial x'}e' = e$, $e' = \frac{\partial x'}{\partial x}e$, $(e')^{-1} = e^{-1}\frac{\partial x}{\partial x'}$. Сечения в натуральном репере обозначим $y(x)$. Так как $e = \partial x(e^\alpha_a)$, то $y(x) =$

$f(\widetilde{y}(x), e(x))$. Из $\partial x = \partial x' \frac{\partial x'}{\partial x}$ следует, что $y'(x') = f(y(x), \frac{\partial x'}{\partial x})$. Для сечения $\widetilde{y}'(x')$ в репере $e'(x')$ имеем

$$\widetilde{y}'(x') = f(y'(x'), (e')^{-1}(x')) = f\left(y'(x'), e^{-1}\frac{\partial x}{\partial x'}\right) = f\left(f\left(y'(x'), \frac{\partial x}{\partial x'}\right), e^{-1}\right) = f(y(x), e^{-1}) = \widetilde{y}(x).$$

Таким образом, при преобразовании координат поля в реперах $\widetilde{y}(x)$ ведут себя как скаляры.

Связность ω на расслоении $L(M)$ индуцирует ковариантную производную $\bigtriangledown_\xi \widetilde{y}$ вдоль векторного поля ξ на M. Ковариантная производная находится следующим образом.

Пусть $L(M)$ — главное расслоение линейных реперов с формой связности ω, соответствующей некоторому полю реперов $e_0(x) = ({e_0}^\alpha_a(x))$, $x \in M$. Если $x(t)$ — путь в M, порожденный векторным полем ξ^α, то соответствующий горизонтальный путь в $L(M)$ для малых значений t будет представлять кривую $t \to (x(t), A(x(t))(I_n - t\omega(\xi)))$. Каждый элемент $z = (x, e(x)) = (x, e_0(x)B)$ порождает отображение

$$Y \to Y_x, \quad y \to z(y) = (x, e_0(x)B, y) \simeq (x, e_0(x), f(y, B^{-1})).$$

Кривая

$$\begin{aligned} t \to (x(t), e_0(x)(I_n - t\omega(\xi)))(\widetilde{y}(x)) \simeq (x(t), e_0(x(t))(I_n - t\omega(\xi)))A, f(\widetilde{y}(x), A^{-1}) \simeq \\ \simeq (x(t), e_0(x(t)), f(\widetilde{y}(x), I_n - t\omega(\xi))) \end{aligned}$$

представляет горизонтальный путь в ассоциированном расслоении и определяет параллельный перенос $\widetilde{y}(x)$ из точки x в точку $x(t)$. Поэтому ковариантная производная $\bigtriangledown_\xi \widetilde{y}$ в направлении вектора ξ есть

$$\bigtriangledown_\xi \widetilde{y} = \lim_{t \to 0} \frac{\widetilde{y}(x(t)) - f(\widetilde{y}(x), I_n - t\omega(\xi))}{t} = \partial_\xi \widetilde{y} + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}, I_n)}{\partial A}\omega(\xi)\right),$$

где Sp означает след матрицы. Таким образом, имеет место

Теорема 1. *В тривиализации расслоения E ковариантная производная подсчитывается по формуле*

$$\bigtriangledown_\xi \widetilde{y} = \partial_\xi \widetilde{y} + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}, I_n)}{\partial A}\omega(\xi)\right).$$

Теорема 2. *Если $\widetilde{y}' = f(\widetilde{y}, A)$, то $\bigtriangledown_\xi \widetilde{y}' = \frac{\partial f(\widetilde{y}, A)}{\partial y} \bigtriangledown_\xi \widetilde{y}$.*

Доказательство. С одной стороны, имеем

$$\bigtriangledown_\xi \widetilde{y}' = \partial_\xi \widetilde{y}' + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}', I_n)}{\partial A}\omega'(\xi)\right), \quad \text{где } \omega' = A\omega A^{-1} - \partial_\xi A A^{-1},$$

$$\partial \widetilde{y}' = \partial_\xi f(\widetilde{y}, A) = \frac{\partial_\xi f(\widetilde{y}, A)}{\partial y}\partial_\xi \widetilde{y} + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}, A)}{\partial A}\partial_\xi A\right),$$

с другой —

$$\frac{\partial f(\widetilde{y}', I_n)}{\partial A} = A\frac{\partial f(\widetilde{y}, B)}{\partial B}\Big|_{B=A}.$$

Поэтому

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}, A)}{\partial A}\partial_\xi A\right) + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}', 1)}{\partial A}(-\partial_\xi A A^{-1})\right) = 0,$$

значит,

$$\bigtriangledown_\xi \widetilde{y}' = \frac{\partial f(\widetilde{y}, A)}{\partial y}\partial_\xi \widetilde{y} + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}, B)}{\partial B}\Big|_{B=A} A\omega\right) = \frac{\partial f(\widetilde{y}, A)}{\partial y}\left(\partial_\xi \widetilde{y} + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(\widetilde{y}, 1)}{\partial A}\omega(\xi)\right)\right).$$

Для натурального репера $\omega(\xi) = \Gamma(\xi) = (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\xi^\gamma)$, где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — коэффициенты аффинной связности. □

Теорема 3. *В тривиализации, построенной по натуральному реперу, ковариантная производная $\bigtriangledown_\xi y$ имеет вид*

$$\bigtriangledown_\xi y = \partial_\xi y + \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f(y,1)}{\partial A}\Gamma(\xi)\right),$$

и закон преобразования при преобразовании координат —

$$\bigtriangledown_\xi y'(x') = \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y} \bigtriangledown_\xi y(x).$$

Получим новое ассоциированное с $L(M)$ расслоение, и аналогично можно определить *ковариантные производные 2-го порядка*, которые имеют вид

$$\bigtriangledown_\eta \bigtriangledown_\xi \widetilde{y} = \partial_\eta \bigtriangledown_\xi \widetilde{y} + \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(\widetilde{y},1)}{\partial y \partial A}\omega(\xi)\right] \bigtriangledown_\xi \widetilde{y}.$$

Ковариантная производная спиноров. Поскольку спинорное представление ортогональной группы $O(p,q)$ расширено до представления полной линейной группы $GL(n)$, то ковариантную производную спиноров можно определить относительно произвольной линейной связности $\omega(\xi)$. Но происхождение спиноров связано с ортогональной группой, поэтому при рассмотрении ковариантной производной спиноров мы будем предполагать, что линейная связность $\omega(\xi)$ ассоциирована римановой связности, тогда $\omega^a{}_b(\xi) = -\nabla_\beta e^a_\alpha e^\alpha_b \xi^\beta$.

Как известно, ортогональное преобразование L и соответствующее спинорное преобразование $\Lambda(L)$ связаны соотношением $L\gamma = \Lambda^{-1}\gamma\Lambda$, где γ — столбец с элементами γ^α, являющимися матрицами Дирака. Для дифференциалов $dL = \frac{\partial L}{\partial A}\Delta A$, $d\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial A}\Delta A$ имеем $d\Lambda = \frac{\Lambda}{4}\gamma_T L^{-1} dL\gamma$, γ_T — матрица-строка с элементами $\gamma_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\gamma^\beta$. Поэтому

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial A}\Gamma(\xi)\right)\Big|_{A=1} = \frac{\Lambda}{4}\gamma_T L^{-1}\Big(- s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial A}\Gamma(\xi)s^{-1}s + s^{-1}\Gamma(\xi)s\Big)\gamma\Big|_{A=1} = \\ = \frac{1}{4}\gamma_T\big(- s^{-1}\partial_\xi g + s^{-1}\Gamma(\xi)s\big)\gamma.$$

Для ковариантной производной спинора в натуральном репере получим формулу

$$\nabla_\xi g = 0, \quad \nabla_\xi \psi = \partial_\xi \psi + \frac{1}{4}\gamma_\alpha\gamma^\beta\big(s^{-1}(g)\left[\partial_\xi s(g) + \Gamma(\xi)s(g)\right]\big)^\alpha_\beta \psi.$$

Ковариантная производная в произвольном репере имеет вид

$$\nabla_\xi \widetilde{g} = 0, \quad \nabla_\xi \widetilde{\psi} = \partial_\xi \widetilde{\psi} + \frac{1}{4}\gamma_\alpha\gamma^\beta\big(s^{-1}(\widetilde{g})\left[\partial_\xi s(\widetilde{g}) + \omega(\xi)s(\widetilde{g})\right]\big)^\alpha_\beta \widetilde{\psi}.$$

Ввиду равенства нулю ковариантных производных от метрического тензора, ковариантные производные спиноров есть спинор, т. е. закон преобразования ковариантной производной спинора совпадает с законом преобразования спинора

$$\nabla_\xi \psi'(x') = \Lambda\Big(s^{-1}(g'(x'))\frac{\partial x'}{\partial x}s(g(x))\Big)\nabla_\xi \psi,$$
$$\nabla_\xi \widetilde{\psi}'(x) = \Lambda\big(s^{-1}(\widetilde{g}'(x))As(\widetilde{g}(x))\big)\nabla_\xi \widetilde{\psi}.$$

Ковариантные производные 2-го порядка спиноров в репере для римановой связности. В случае спиноров $\widetilde{y} = (\widetilde{g}, \widetilde{\psi})$ при преобразованиях $y' = f(y, A)$ переменные $\widetilde{g}$ преобразуются только сами через себя, т. е. $\widetilde{g}' = f(\widetilde{g}, A) = {A^{-1}}^T \widetilde{g} A^{-1}$. Откуда $\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial \widetilde{g}'}{\partial \widetilde{\psi}}\omega(\xi)\right) = 0$, поэтому

$$\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 f(\widetilde{y}, I_n)}{\partial y \partial A}\omega(\xi)\right)\nabla_\xi \widetilde{y} = \left(0, \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial^2 f(\widetilde{y}, I_n)}{\partial \widetilde{\psi}\partial A}\omega(\xi)\right)\nabla_\xi \widetilde{\psi}\right) = \left(0, \mathrm{Sp}\left(\frac{\partial f((0, \nabla_\xi \widetilde{\psi}), I_n)}{\partial A}\omega(\xi)\right)\right).$$

При получении последнего равенства учтено то, что $\widetilde{\psi}'$ линейно относительно $\widetilde{\psi}$. В итоге ковариантную производную $\bigtriangledown_\eta \bigtriangledown_\xi \widetilde{y}$ можно представить в виде

$$\bigtriangledown_\eta(\bigtriangledown_\xi\widetilde{y}) = \partial_\eta(\bigtriangledown_\xi\widetilde{y}) + \mathrm{Sp}\Big(\frac{\partial f(\bigtriangledown_\xi\widetilde{y}, I_n)}{\partial A}\omega(\xi)\Big).$$

Это означает, что ковариантная производная высших порядков вычисляется как ковариантная производная от ковариантной производной порядка на единицу ниже по правилам вычисления ковариантной производной 1-го порядка.

Закон преобразования ковариантной производной спинора при изменении сечения. С помощью непосредственного вычисления может быть доказана

Теорема 4. *Если даны два сечения*: s, s' *и* $s' = so$, *то*

$$\nabla_\xi\psi_{so} = \Lambda(o^{-1})\nabla_\xi\psi_s, \quad \nabla_\xi\widetilde{\psi}_{so} = \Lambda(o^{-1})\nabla_\xi\widetilde{\psi}_s.$$

5. Производные Ли и их свойства

Производная Ли сечений $y(x)$. При преобразовании координат $x' = x'(x)$ поле $y(x)$ преобразуется по закону $y'(x') = f(y(x), \frac{\partial x'}{\partial x})$. Локальная однопараметрическая группа преобразований $x' = x + t\xi(x)$ индуцирует диффеоморфизм слоя $Y_{x-t\xi}$ в $E(M, Y, GL(n), L(M))$ на слой Y_x

$$y(x - i\xi) \to \widetilde{y}(x) = f\Big(y(x - t\xi), I_n + t\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big) \in Y_x.$$

Имеем $\widetilde{y}(x) = y(x - t\xi) + t\,\mathrm{Sp}\,[\frac{\partial f(y, I_n)}{\partial A}\frac{\partial\xi}{\partial x}] + \cdots$. Следуя общему рецепту построения производной Ли полей ([10], с. 37), производную Ли $L_\xi y$ определим следующим образом

$$L_\xi y = \lim_{t\to 0}(y(x) - \widetilde{y}(x))/t = \partial_\xi y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y, 1)}{\partial A}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right].$$

Закон преобразования производной Ли при преобразовании координат.

Теорема 5. *Имеет место*

$$L_{\xi'}y'(x') = \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y}L_\xi y(x).$$

Доказательство.

$$L_{\xi'}y'(x') = \partial_{\xi'}y'(x') - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y'(x'), I_n)}{\partial A}\frac{\partial\xi'}{\partial x'}\right] = \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y}\partial_\xi y +$$
$$+\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial A}\partial_\xi\frac{\partial x'}{\partial x}\right] - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial A}\Big(\partial_\xi\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}\Big)\right] =$$
$$= \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y}\partial_\xi y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial A}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right] = \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y}\partial_\xi y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y}\frac{\partial f(y(x), I_n)}{\partial A}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right] =$$
$$= \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y}\Big(\partial_\xi y(x) - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y(x), I_n)}{\partial A}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]\Big) = \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y}L_\xi y(x). \quad \square$$

Производная Ли производной Ли. Используя закон преобразования производной Ли $L_\xi y(x)$ при преобразовании координат, находится следующее выражение для производной Ли от производной Ли полей $y(x)$

$$L_\xi L_\eta y = \partial_\xi L_\eta y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y, I_n)}{\partial y\partial A}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]L_\eta y.$$

Коммутатор производных Ли. Имеем

$$L_\xi L_\eta y - L_\eta L_\xi y = \partial_\xi L_\eta y - \partial_\eta L_\xi y + \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] L_\xi y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] L_\eta y.$$

Так как

$$\partial_\eta L_\xi y + \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] L_\eta y =$$
$$= \partial_\eta \partial_\xi y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\partial_\eta \frac{\partial \xi}{\partial x}\right],$$

то

$$L_\xi L_\eta y - L_\eta L_\xi y = (\partial_\xi \partial_\eta - \partial_\eta \partial_\xi) y +$$
$$+ \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] +$$
$$+ \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\left(\partial_\eta \frac{\partial \xi}{\partial x} - \partial_\xi \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\right].$$

В правой части этого выражения разность второго и третьего членов можно представить в виде

$$\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right],$$

с другой стороны,

$$\partial_\eta \frac{\partial \xi}{\partial x} - \partial_\xi \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial [\eta, \xi]}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right),$$

поэтому

$$L_\xi L_\eta y - L_\eta L_\xi y = L_{[\xi,\eta]} y.$$

Таким образом, мы проверили, что *коммутатор производных Ли есть производная Ли вдоль коммутатора*, т. е. $L_\xi L_\eta y - L_\eta L_\xi y = L_{[\xi,\eta]} y$.

Из закона преобразования поля $y(x)$ при преобразовании координат $x' = x'(x)$ путем дифференцирования получим следующий закон преобразования $\partial_\alpha y(x)$:

$$\frac{\partial y'(x')}{\partial x'^\alpha} = \left\{ \frac{\partial f(y, \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial y} \partial_\beta y(x) + \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y(x), \frac{\partial x'}{\partial x})}{\partial A}\partial_\beta \frac{\partial x'}{\partial x}\right]\right\} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}.$$

Снова строим отображение $\partial_\alpha y(x - t\xi)$ в $\widetilde{\partial_\alpha y(x)} = \frac{\partial y'(x')}{x'^\alpha}\big|_{x'=x-t\xi}$:

$$\widetilde{\partial_\alpha y(x)} = \left\{ \frac{\partial f(y(x-t\xi), I_n + t\frac{\partial \xi}{\partial x})}{\partial y} \partial_\beta y(x-t\xi) + t\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\partial_\beta \frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\right\} \left(\delta^\beta_\alpha - t\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha}\right) =$$
$$= \partial_\alpha y(x) - \partial_\xi \partial_\alpha y - t\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha}\partial_\beta y + t\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\partial_\alpha y + t\,\mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\partial_\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + \cdots,$$

поэтому

$$L_\xi \partial_\alpha y = \partial_\xi \partial_\alpha y + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha}\partial_\beta y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial^2 f(y,I_n)}{\partial y \partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\partial_\alpha y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y,I_n)}{\partial A}\partial_\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}\right].$$

Легко проверить, что $L_\xi \partial_\alpha y = \partial_\alpha L_\xi y$, т. е. два дифференцирования коммутируют между собой.

Теорема 6. *Если поле задано с помощью отображения $y(x)$ в тривиализации, порожденной картой x^α, то операции дифференцирования Ли и частного дифференцирования ∂_α поля $y(x)$ коммутируют друг с другом.*

Производная Ли сечения $\widetilde{y}(x)$ в репере строится следующим образом. При преобразовании $x' = x + t\xi$ элемент $(x - t\xi,\ e(x - t\xi),\ \widetilde{y}(x - t\xi))$ переходит в элемент

$$(x, e - tL_\xi e,\ \widetilde{y}(x - t\xi)) = (x,\ e(1 + tK),\ \widetilde{y}(x - t\xi)),$$

где $K = -e^{-1}L_\xi e$. Полю $\widetilde{y}(x - t\xi)$ в репере $e(1 + tK)$ соответствует поле

$$\widetilde{y}'(x) = f(\widetilde{y}(x - t\xi), 1 + tK) = \widetilde{y}(x) - t\Big(\partial_\xi \widetilde{y} - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y, I_n)}{\partial A}K\right]\Big) + \cdots$$

в репере $e(x)$. Производная Ли $L_\xi \widetilde{y}$, определяемая как

$$L_\xi \widetilde{y} = \lim_{t \to 0} \frac{\widetilde{y}(x) - \widetilde{y}'(x)}{t},$$

равна

$$L_\xi \widetilde{y} = \partial_\xi \widetilde{y} - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y, I_n)}{\partial A}K\right].$$

Когда репер $e_a^\alpha \partial_\alpha$ превращается в натуральный репер $(\partial x) = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, матрица K становится равной $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ и производная Ли в натуральном репере представляет производную Ли в координатах

$$L_\xi y = \partial_\xi y - \mathrm{Sp}\left[\frac{\partial f(y, I_n)}{\partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right].$$

Производная Ли спиноров. Производная Ли спиноров в натуральном репере определяется в виде

$$L_\xi g = \partial_\xi g + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^T g(x) + g(x)\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$L_\xi \psi = \partial_\xi \psi - \frac{1}{4}\gamma_T\Big(s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\Big(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^T g(x) + g(x)\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big) + s^{-1}\frac{\partial \xi}{\partial x}s\Big)\gamma\psi.$$

Исключая производную по направлению $\partial_\xi \psi$ с помощью ковариантной производной $\nabla_\xi \psi$, производную Ли $L_\xi \psi$ можно записать в виде

$$L_\xi \psi = \nabla_\xi \psi - \frac{1}{4}\gamma_T s^{-1}\Big(\frac{\partial s}{\partial g}L_\xi g + \nabla\xi s\Big)\gamma\psi, \quad \nabla\xi = (\nabla_\alpha \xi^\beta).$$

Аналогичным образом находится производная Ли спинора в произвольном репере

$$L_\xi \widetilde{g} = (\nabla\xi)^T \widetilde{g} + \widetilde{g}\nabla\xi,$$

$$L_\xi \psi = \partial_\xi \widetilde{\psi} + \frac{1}{4}\gamma_t\Big(- s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}e^{-1}L_\xi e + s^{-1}e^{-1}L_\xi e s\Big)\gamma\widetilde{\psi} = \nabla_\xi \widetilde{\psi} - \frac{1}{4}\gamma_T s^{-1}\Big(\frac{\partial s}{\partial \widetilde{g}}L_\xi \widetilde{g} + \nabla\xi s\Big)\gamma\widetilde{\psi},$$

где $\nabla\xi = (\nabla_b \xi^a) = (e^a_\beta \nabla_\alpha \xi^\beta e^\alpha_b) = e^{-1}\nabla\xi e$. При получении связи между производной Ли и ковариантной производной необходимо учесть, что $K = \nabla\xi - \omega(\xi)$.

Преобразование производной Ли спинора при преобразовании координат.

Теорема 7. *Если в сечении $s : g \to s(g) \in GL(n)$ преобразование $s(g)$ есть η-симметрическое преобразование, то производная Ли спинора есть спинор при преобразованиях координат.*

Доказательство. Так как $\frac{\partial}{\partial\psi}(\Lambda(L)\psi)L_\xi\psi = \Lambda(L)L_\xi\psi$, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\frac{\partial}{\partial g}\Lambda(L) = 0$ или что $\delta L = \frac{\partial L}{\partial g}\delta g = 0$, где δg — некоторая произвольная вариация метрики. Так как $L = s^{-1}(g'(x'))\frac{\partial x'}{\partial x}s(g(x))$, то уравнение $\delta L = 0$ эквивалентно уравнению

$$s^{-1}(g')\frac{\partial s(g')}{\partial g'}\delta g' = Ls^{-1}(g)\frac{\partial s(g)}{\partial g}\delta g L^{-1}.$$

Если $s(g)$ — η-симметрическое преобразование, то $s^2(g) = g^{-1}\eta$, откуда

$$s^{-1}(g)\frac{\partial s(g)}{\partial g}\delta g + \frac{\partial s(g)}{\partial g}\delta g s^{-1}(g) = -s\eta^{-1}\delta g s.$$

Так как относительно преобразования $s(g)$ предполагается, что у него собственные значения положительны, а комлексные собственные значения имеют положительные вещественные части, то снова можем утверждать, что последнее уравнение имеет решение $\frac{\partial s(g)}{\partial g}\delta g$ и оно единственно. Поэтому для доказательства соотношения $\delta L = 0$ достаточно доказать, что

$$s'\eta^{-1}\delta g' s' = Ls\eta^{-1}\delta g s L^{-1}.$$

Но это соотношение есть тождество в силу соотношений $\delta g' = \frac{\partial x}{\partial x'}^T \delta g \frac{\partial x}{\partial x'}$, $\frac{\partial x'}{\partial x} = s' L s^{-1}$. □

Приведем другое доказательство теоремы на основе иного подхода и на языке реперов.

Закон преобразования производной Ли спинора при преобразовании реперов. Пользуясь понятием ковариантной производной спинора, производную Ли спинора можно записать в виде

$$L_\xi \psi = \bigtriangledown_\xi \psi + \frac{1}{4}\gamma_T S^{-1}(\delta s - \bigtriangledown\xi s)\gamma\psi,$$

где

$$s^{-1}\delta s + \delta s s^{-1} = s\eta^{-1} L_\xi g s, \ \bigtriangledown\xi = (\bigtriangledown_a \xi^b).$$

Для производной Ли метрического тензора g можно также использовать формулу

$$L_\xi g_{ab} = \bigtriangledown_a \xi_b + \bigtriangledown_b \xi_a.$$

Поскольку $\bigtriangledown_\xi \psi$ — спинор, то для доказательства того, что $L_\xi \psi$ — спинор, необходимо доказать, что

$$\gamma_T (s')^{-1}(\delta s' - \bigtriangledown\xi' s')\gamma\psi' = \Lambda\gamma_T s^{-1}(\delta s - \bigtriangledown\xi s)\gamma\psi,$$

если $\psi' = \Lambda\psi$, или при условии, что $s^{-1}(\delta s - \bigtriangledown\xi s)$ — η-кососимметрическое преобразование, доказать равенство

$$(s')^{-1}\delta s' = L s^{-1}\delta s L^{-1}. \tag{1}$$

Воспользовавшись соотношениями

$$L\gamma = \Lambda^{-1}\gamma\Lambda, \quad \gamma_T L^{-1} = \Lambda^{-1}\gamma_T\Lambda, \quad \bigtriangledown\xi' = A \bigtriangledown \xi A^{-1},$$

для доказательства (1) нужно показать, что определяемое из (1) выражение для $\delta S'$ удовлетворяет уравнению

$$(s')^{-1}\delta s' + \delta s'(s')^{-1} = s'\eta^{-1} L_\xi g' s'.$$

Из (1) имеем

$$\delta s'(s')^{-1} = ((s')^{-1}\delta s')^* = L\delta s s^{-1} L^{-1},$$

поэтому проверка выполнения предыдущего уравнения сводится к проверке выполнения соотношения

$$s'\eta^{-1} L_\xi g' s' = Ls\eta^{-1} L_\xi g s L^{-1}.$$

Это соотношение есть следствие соотношений

$$L_\xi g = A^T L\xi g' A, \quad L = (s')^{-1} A s.$$

Таким образом, (1) тождественно выполняется, а это означает, что производная Ли спинора есть спинор относительно произвольных преобразований реперов.

Ввиду важности теоремы о коммутативности операций дифференцирования Ли и частного дифференцирования в общей теории относительности для построения метрического тензора энергии-импульса проведем доказательство этой теоремы в частном случае спинорных полей, рассматриваемых в координатах.

Производная Ли частной производной спинора. Закон преобразования спиноров $\psi(x)$ при преобразовании координат $x' = x'(x)$ имеет вид $\psi'(x') = \Lambda(L)\psi$, $L = s^{-1}(g'(x'))\frac{\partial x'}{\partial x}s(g(x))$, поэтому закон преобразования для частной производной спинора записывается в виде

$$\partial_{\alpha'}\psi'(x') = \frac{\partial \Lambda}{\partial L}\partial_{\alpha'}L\psi(x) + \Lambda(L)\partial_\beta\psi(x)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}.$$

Если $x' = x + t\xi$, то $\widetilde{g}(x) \equiv g'(x - t\xi) = g(x) - tL_\xi g$, $\widetilde{\partial_\alpha g(x)} = \partial_\alpha - t\partial_\alpha L_\xi g$. Тогда $\widetilde{L}$, определяемое как

$$\widetilde{L} = s^{-1}(\widetilde{g}(x))\frac{\partial(x + t\xi)}{\partial x}s(g(x - t\xi)),$$

равно

$$\widetilde{L} = 1 + tL_\xi L, \quad L_\xi L = s^{-1}\left[\frac{\partial s}{\partial g}(L_\xi g - \partial_\xi g) + \frac{\partial \xi}{\partial x}s\right].$$

Производную Ли спинора можно записать в виде $L_\xi\psi = \partial_\xi\psi - \frac{1}{4}\gamma_T L_\xi L\gamma\psi$. Для $\widetilde{\partial_\alpha\psi(x)}$ имеем

$$\widetilde{\partial_\alpha\psi(x)} = \frac{1}{4}\gamma_T\widetilde{\partial_\alpha L}\gamma\psi(x - t\xi) + \left\{1 + \frac{t}{4}\left(L_\xi L\right)\gamma\right\}\partial_\beta\psi(x - t\xi)(\delta^\beta_\alpha - t\partial_\alpha\xi^\beta),$$

где

$$\widetilde{\partial_\alpha L} = \frac{\partial s^{-1}(\widetilde{g}(x))}{\partial g}\widetilde{\partial_\beta g}\left(1 + t\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)s(g(x - t\xi))(\delta^\beta_\alpha - t\partial_\alpha\xi^\beta) + ts^{-1}\partial_\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x}s +$$
$$+ s^{-1}(\widetilde{g}(x))\left(1 + t\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\partial_\beta s(x - t\xi)(\delta^\beta_\alpha - t\partial_\alpha\xi^\beta).$$

Так как

$$\frac{\partial s^{-1}(\widetilde{g}(x))}{\partial g}\widetilde{\partial_\alpha g(x)} = -s^{-1}(\widetilde{g}(x))\frac{\partial s(\widetilde{g}(x))}{\partial g}\widetilde{\partial_\alpha g(x)}s^{-1}(\widetilde{g}(x)) =$$
$$= -\left(s^{-1} + ts^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}L_\xi gs^{-1}\right)\left(\frac{\partial sS}{\partial g} - t\frac{\partial^2 s}{\partial g^2}L_\xi g\right)(\partial_\alpha g - t\partial_\alpha L_\xi g)\left(s^{-1} + ts^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}L_\xi gs^{-1}\right) =$$
$$= -s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha gs^{-1} + tP_1,$$

где

$$P_1 = s^{-1}\left\{-\frac{\partial s}{\partial g}L_\xi gs^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha g + \frac{\partial^2 s}{\partial g^2}L_\xi g\partial_\alpha g + \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha L_\xi g - \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha gs^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}L_\xi g\right\}s^{-1},$$

то для первого слагаемого в выражении для $\widetilde{\partial_\alpha L}$ имеем значения

$$-s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha g + t\left\{P_1 s + s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha gs^{-1}\left(\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\xi g - \frac{\partial \xi}{\partial x}s\right) + s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\beta g\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha}\right\}.$$

Третье слагаемое в выражении для $\widetilde{\partial_\alpha L}$ равно

$$\left(s^{-1} + ts^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}L_\xi gs^{-1}\right)\left(1 + t\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\beta g - \left[\frac{\partial^2 s}{\partial g^2}\partial_\beta g\partial_\xi g + \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\beta\partial_\xi g\right]\right)(\delta^\beta_\alpha - t\partial_\alpha\xi^\beta) =$$
$$= s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha g + ts^{-1}\left\{\frac{\partial s}{\partial g}L_\xi gs^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha g + \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha g - \frac{\partial^2 s}{\partial g^2}\partial_\alpha g\partial_\xi g - \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha\partial_\xi g - \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\beta g\partial_\alpha\xi^\beta\right\}.$$

Значит

$$\widetilde{\partial_\alpha L} = ts^{-1}\left\{\frac{\partial^2 s}{\partial g^2}(L_\xi g - \partial_\xi g)\partial_\alpha + \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha(L_\xi g - \partial_\xi g) - \frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha gL_\xi g + \partial_\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x}s + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial g}\partial_\alpha g\right\} = t\partial_\alpha L_\xi L,$$

поэтому

$$\widetilde{\partial_\alpha\psi} = \frac{t}{4}\gamma_T\partial_\alpha L_\xi L\gamma\psi(x) + \partial_\alpha\psi(x) + t\left(\frac{1}{4}\gamma_T L_\xi L\gamma\partial_\alpha\psi - \partial_\xi\partial_\alpha\psi - \partial_\beta\psi\partial_\alpha\xi^\beta\right),$$

откуда

$$L_\xi(\partial_\alpha\psi) = \partial_\alpha\partial_\xi\psi - \frac{1}{4}\partial_\alpha(\gamma_T L_\xi L\gamma\psi) = \partial_\alpha L_\xi\psi.$$

Доказана

Теорема 8. *Производная Ли частной производной от спинора равна частной производной от производной Ли спинора.*

6. Тензор энергии-импульса спинорных полей

В общей теории относительности функция Лагранжа свободного спинорного поля в римановом пространстве-времени имеет вид

$$\mathcal{L} = i(\overline{\psi}\gamma^a\nabla_a\psi - \nabla_a\overline{\psi}\gamma^a\psi)/2 - m\overline{\psi}\psi.$$

Так как при рассмотрении спиноров как в произвольных реперах, так и в координатах метрический тензор и гамма-матрицы теряют свой канонический вид, то при переходе к лагранжианам произвольной структуры в их аргументы нужно включать и метрический тензор, и матрицы Дирака. Значит, лагранжиан общего вида имеет вид

$$\mathcal{L}(\psi, \nabla_\alpha\psi, \overline{\psi}, \nabla_\alpha\overline{\psi}, \gamma_{g\alpha}, g_{\alpha\beta}).$$

Производная Ли спиноров в координатах обладает свойством: производная Ли от частной производной есть частная производная от производной Ли. Из этого свойства следует

Лемма 2. *Тензор $T^{\alpha\beta}$, определяемый с помощью вариационной производной по метрическому тензору от функции Лагранжа*

$$T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}},$$

есть сохраняющийся тензор.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{L}(\psi, \bigtriangledown_\alpha\psi, \overline{\psi}\bigtriangledown_\alpha\overline{\psi}, \gamma_{g\alpha}, g_{\alpha\beta})$ как функцию от $g_{\alpha\beta}$, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$, ψ, $\partial_\alpha\psi$. Тогда при предположении, что уравнения поля $\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi} = 0$ выполнены, имеем

$$\delta s = \int_\Omega \left(\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial g_{\alpha\beta}}L_\xi g_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\gamma g_{\alpha\beta}}L_\xi\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\psi}L_\xi\psi + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\alpha\psi}L_\xi\partial_\alpha\psi\right)d^4x =$$

$$= \int_\Omega \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}L_\xi g_{\alpha\beta}d^4x = \int_\Omega T^{\alpha\beta}\bigtriangledown_\beta\xi_\alpha\sqrt{-g}d^4x = \int_\Omega \bigtriangledown_\beta T^{\alpha\beta}\xi_\alpha\sqrt{-g}d^4x = 0.$$

Так как область Ω и векторное поле ξ^α произвольны, то $\bigtriangledown_\beta T^{\alpha\beta} = 0$. $\square$

Покажем, что тензор $T^{\alpha\beta}$ допускает представление Л. Розенфельда в виде суммы канонического тензора энергии-импульса и дивергенции тензора углового момента.

Нам понадобятся производные Ли аргументов ψ, $\nabla_\alpha\psi$, $\overline{\psi}$, $\nabla_\alpha\overline{\psi}$, $\gamma_{g\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$ функции Лагранжа $\mathcal{L}(\psi, \nabla_\alpha\psi, \overline{\psi}\ \nabla_\alpha\overline{\psi}, \gamma_{K\alpha}, g_{\alpha\beta})$. Полагая $P = s^{-1}\frac{\partial s}{\partial g}\big((\frac{\partial\xi}{\partial x})^T g + g\frac{\partial\xi}{\partial x}\big) + s^{-1}\frac{\partial\xi}{\partial x}s$, имеем

$$L_\xi\psi = \partial_\xi\psi - \frac{1}{4}\gamma_T P\gamma\psi, \quad L_\xi\overline{\psi} = \partial_\xi\overline{\psi} + \frac{1}{4}\overline{\psi}\gamma_T P\gamma,$$
$$L_\xi \nabla_\alpha \psi = \partial_\xi \nabla_\alpha \psi - \frac{1}{4}\gamma_T P\gamma \nabla_\alpha \psi + \partial_\alpha\xi^\beta \nabla_\beta \psi,$$
$$L_\xi \nabla_\alpha \overline{\psi} = \partial_\xi\partial \nabla_\alpha \overline{\psi} + \frac{1}{4} \nabla_\alpha \overline{\psi}\gamma_T P\gamma + \partial_\alpha\xi^\beta \nabla_\beta \overline{\psi},$$
$$L_\xi\gamma_{g\alpha} = \partial_\xi\gamma_{g\alpha} + \frac{1}{2}(s^{-1})^\beta_\alpha(P_{\beta\nu}\gamma^\nu - P^\mu_\beta\gamma_\mu) + \partial_\alpha\xi^\beta\gamma_{g\beta}.$$

В выкладках Л. Розенфельда важную роль играют коэффициенты при $\partial_\alpha\xi^\beta$ в выражениях для производной Ли некоторого объекта Q. Эти коэффициенты обозначим $C(Q)^\alpha_\beta$. Тогда

$$L_\xi Q = \partial_\xi Q + C(Q)^\alpha_\beta\partial_\alpha\xi^\beta.$$

Введем обозначения

$$s^{\mu|\alpha\beta}_\nu = \frac{\partial s^\mu_\nu}{\partial g_{\alpha\beta}}, \quad P^{\tau|\nu}_{\delta|\mu} = (s^{-1})^\tau_\mu s^\nu_\delta + 2(s^{-1})^\tau_\sigma s^{\sigma|\alpha\nu}_\delta g_{\alpha\mu}.$$

Тогда

$$C(\psi)^\nu_\mu = -\frac{1}{4}\gamma_\tau P^{\tau|\nu}_{\delta|\mu}\gamma^\delta\psi, \quad C(\overline{\psi})^\nu_\mu = \frac{1}{4}\overline{\psi}\gamma_\tau P^{\tau|\nu}_{\delta|\mu}\gamma^\delta,$$
$$C(\nabla_\alpha\psi)^\nu_\mu = \delta^\nu_\alpha \nabla_\mu \psi - \frac{1}{4}\gamma_\tau P^{\tau|\nu}_{\delta|\mu}\gamma^\delta \nabla_\alpha \psi,$$
$$C(\nabla_\alpha\overline{\psi})^\nu_\mu = \delta^\nu_\alpha \nabla_\mu \overline{\psi} + \frac{1}{4} \nabla_\alpha \overline{\psi}\gamma_\tau P^{\tau|\nu}_{\delta|\mu}\gamma^\delta,$$
$$C(\gamma_{g\alpha})^\nu_\mu = \frac{1}{2}(\eta_{4\delta\sigma}\gamma^\gamma - \delta^\gamma_\delta\gamma_\sigma)(s^{-1})^\delta_\alpha P^{\sigma|\nu}_{\gamma|\mu} + \delta^\nu_\alpha\gamma_{g\beta},$$
$$C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu = \delta^\nu_\beta g_{\alpha\mu} + \delta^\nu_\alpha g_{\beta\mu}.$$

Вычислим $L_\xi(\mathcal{L}\sqrt{-g})$:

$$\begin{aligned}
L_\xi(\mathcal{L}\sqrt{-g}) = {} & \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial g_{\alpha\beta}}L_\xi g_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\gamma g_{\alpha\beta}}L_\xi\partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\psi}L_\xi\psi + \\
& + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\gamma\psi}L_\xi\partial_\gamma\psi + L_\xi\overline{\psi}\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\overline{\psi}} + L_\xi\partial_\gamma\overline{\psi}\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\gamma\overline{\psi}} = \\
& = \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}L_\xi g_{\alpha\beta} + \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}L_\xi\psi + L_\xi\overline{\psi} + \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\overline{\psi}} + \\
& + \partial_\gamma\left(\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\gamma g_{\alpha\beta}}L_\xi g_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\gamma\psi}L_\xi\psi + L_\xi\overline{\psi}\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\gamma\overline{\psi}}\right) = \\
& = \left\{\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}\partial_\nu g_{\alpha\beta} + \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}\partial_\nu\psi + \partial_\nu\overline{\psi}\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi} - \right. \\
& \left. - \partial_\mu\left[\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\mu_\nu + \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}C(\psi)^\mu_\nu + C(\overline{\psi})^\mu_\nu\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}\right]\right\}\xi^\nu + \\
& + \partial_\sigma\left\{\left[\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\sigma_\mu + \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}C(\psi)^\sigma_\mu + C(\overline{\psi})^\sigma_\mu\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\overline{\psi}} + \right.\right. \\
& \left. + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}\partial_\mu g_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\psi}\partial_\mu\psi + \partial_\mu\overline{\psi}\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\overline{\psi}}\right]\xi^\mu +
\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu+\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\psi}C(\psi)^\nu_\mu+C(\overline{\psi})^\nu_\mu\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\overline{\psi}}\right]\partial_\nu\xi^\mu\Big\}.$$

Поэтому для $L_\xi(\mathcal{L}\sqrt{-g})-\partial_\alpha(\mathcal{L}\sqrt{-g}\xi^\alpha)$ существует представление

$$L_\xi(\mathcal{L}\sqrt{-g})+\partial_\alpha(\mathcal{L}\sqrt{-g}\xi^\alpha)=Y_\nu\xi^\nu+\partial_\sigma\big(Y^\sigma_\mu\xi^\mu+R^{\sigma\nu}{}_\mu\partial_\nu\xi^\mu\big),$$

где

$$\begin{aligned}
Y_\nu &= \frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}\partial_\nu g_{\alpha\beta}+\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}\partial_\nu\psi+\partial_\nu\overline{\psi}\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}-\\
&\quad-\partial_\mu\left[\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\mu_\nu+\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}C(\psi)^\mu_\nu+C(\overline{\psi})^\mu_\nu\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}\right],\\
Y^\sigma_\mu &= -\mathcal{L}\sqrt{-g}\delta^\sigma_\mu+\left[\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\sigma_\mu+\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\psi}C(\psi)^\sigma_\mu+\right.\\
&\quad\left.+C(\overline{\psi})^\sigma_\mu\frac{\delta(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\delta\overline{\psi}}+\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}\partial_\mu g_{\alpha\beta}+\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\psi}\partial_\mu\psi+\partial_\mu\overline{\psi}\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\overline{\psi}}\right],\\
R^{\sigma\nu}{}_\mu &= \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu+\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\psi}C(\psi)^\nu_\mu+C(\overline{\psi})^\nu_\mu\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\partial_\sigma\overline{\psi}}.
\end{aligned}$$

Равенство нулю интеграла $\int\limits_\Omega\big(L_\xi(\mathcal{L}\sqrt{-g})+\partial_\alpha(\mathcal{L}\sqrt{-g}\xi^\alpha)\big)d^4x$ должно иметь место для любой области Ω и для любого векторного поля ξ^α, поэтому должны удовлетворяться тождества

$$Y_\nu=0,\quad Y^\nu_\mu+\partial_\sigma R^{\sigma\nu}{}_\mu=0,\quad R^{\sigma\nu}{}_\mu+R^{\nu\sigma}{}_\mu=0.$$

В предположении, что уравнения поля $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi}=\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\overline{\psi}}=0$ удовлетворены, тождество $Y_\nu=0$ эквивалентно тождеству

$$\frac{\sqrt{-g}}{2}T^{\alpha\beta}\partial_\nu g_{\alpha\beta}-\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu_\nu)=0,$$

которое в свою очередь эквивалентно тождеству

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu=0.$$

Снова пришли к утверждению доказанной выше леммы о том, что *метрический тензор энергии-импульса есть сохраняющийся тензор.*

Вычислим $R^{\sigma\nu}{}_\mu$. Так как только $\nabla_\alpha\psi$ и $\nabla_\alpha\overline{\psi}$ зависят от частных производных $\partial_\tau g_{\alpha\beta}$ метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и частных производных производных $\partial_\alpha\psi$ и $\partial_\alpha\overline{\psi}$ спинорных полей ψ и $\overline{\psi}$, то

$$R^{\sigma\nu}{}_\mu=\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\nabla_\tau\psi}\frac{\partial\nabla_\tau\psi}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu+\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\nabla_\sigma\psi}C(\psi)^\nu_\mu+\frac{\partial\nabla_\tau\overline{\psi}}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\nabla_\tau\overline{\psi}}+C(\overline{\psi})^\nu_\mu\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial\nabla_\sigma\overline{\psi}}.$$

Так как $\nabla_\tau\psi=\partial_\tau\psi+\frac{1}{4}\gamma_T Q_\tau\gamma\psi$, $\nabla_\tau\overline{\psi}=\partial_\tau\overline{\psi}-\frac{1}{4}\overline{\psi}\gamma_T Q_\tau\gamma$, где $Q_\tau=s^{-1}\partial_\tau s+s^{-1}\Gamma_\tau s$, то для вычисления

$$\frac{\partial\nabla_\tau\psi}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}\frac{\partial\nabla_\tau\overline{\psi}}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu$$

нужно найти $\frac{\partial Q_\tau}{\partial\partial_\sigma g_{\alpha\beta}}$. Имеем

$$\frac{\partial\Gamma_{k\tau s}}{\partial\partial_i g_{jm}}=\frac{1}{4}\big(\delta^i_\tau(\delta^j_k\delta^m_s+\delta^m_k\delta^j_s)+\delta^i_k(\delta^j_\tau\delta^m_s+\delta^m_\tau\delta^j_s)-\delta^i_s(\delta^m_k\delta^j_\tau+\delta^j_k\delta^m_\tau)\big),$$

отсюда

$$\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{k\tau}}{\partial \partial_i g_{jm}} = \frac{1}{4}\big(\delta^i_\tau(\delta^j_k g^{m\rho} + \delta^m_k g^{j\rho}) + \delta^i_k(\delta^j_\tau g^{m\rho} + \delta^m_\tau g^{j\rho}) - g^{i\rho}(\delta^m_k \delta^j_\tau + \delta^j_k \delta^m_\tau)\big),$$

$$\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{k\tau}}{\partial \partial_i g_{jm}} C(g_{jm})^\nu_\mu = \frac{1}{2}\big(\delta^i_\tau\left[\delta^\nu_k \delta^\rho_\mu + g_{k\mu} g^{\nu\rho}\right] + \delta^i_k\left[\delta^\nu_\tau \delta^\rho_\mu + g_{\tau\mu} g^{\nu\rho}\right] - g^{i\rho}\left[\delta^\nu_\tau g_{k\mu} + \delta^\nu_k g_{\tau\mu}\right]\big),$$

$$\gamma_{K\rho}\frac{\partial \Gamma^{\rho}_{k\tau}}{\partial \partial_i g_{jm}} C(g_{jm})^\nu_\mu \gamma^k_K = \frac{1}{2}\{2\delta^i_\tau \delta^\nu_\mu + \delta^\nu_\tau\left[\gamma_{K\mu}\gamma^i_K - \gamma^i_K \gamma_{K\mu}\right] - g^{\tau\mu}\left[\gamma^\nu_K \gamma^i_K - \gamma^i_K \gamma^\nu_K\right]\}.$$

Обозначим $s^{\alpha\beta} = (s^{\mu|\alpha\beta}_\nu)$, тогда

$$\gamma_T \frac{\partial (s^{-1}\partial_\tau s)}{\partial \partial_i g_{jm}} C(g_{jm})^\nu_\mu \gamma = 2\delta^i_\tau \gamma_{gT} s^{\nu m} g_{m\mu}\gamma,$$

$$\frac{\partial \bigtriangledown_\tau \psi}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu = \frac{1}{4}\big(2\delta^\sigma_\tau \gamma_{gT} s^{\nu m} g_{m\mu}\gamma + \delta^\sigma_\tau \delta^\nu_\mu + \delta^\nu_\tau \sigma_{g\mu}{}^\sigma + g_{\tau\mu}\sigma^{\nu\sigma}_g\big)\psi,$$

где $\sigma_g{}^{\nu i} = \frac{1}{2}(\gamma^\nu_g \gamma^i_g - \gamma^i_g \gamma^\nu_g)$. Выражение $\gamma_\tau P^{\tau|\mu}_{\delta|\mu}\gamma^\delta$ в $\mathrm{C}(\psi)^\nu_\mu$ можно представить в виде

$$\gamma_\tau P^{\tau|\nu}_{\delta|\mu}\gamma^\delta = \gamma_{g\mu}\gamma^\nu_g + 2\gamma_g s^{\nu m} g_{m\mu}\gamma,$$

поэтому

$$\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\tau \psi}\frac{\partial \bigtriangledown_\tau \psi}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\sigma \psi} C(\psi)^\nu_\mu = \frac{1}{4}\big(\Phi^\sigma \sigma_K{}^\nu{}_\mu - \Phi^\nu \sigma_K{}^\sigma{}_\mu + \Phi_\mu \sigma_K{}^{\nu\mu}\big)\psi,$$

где

$$\Phi^\sigma = \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\sigma \psi}.$$

Аналогичным образом находим

$$\frac{\partial \bigtriangledown_\tau \overline{\psi}}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} C(g_{\alpha\beta})^\nu_\mu \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\tau \overline{\psi}} + C(\overline{\psi})^\nu_\mu \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\sigma \overline{\psi}} = \frac{1}{4}\overline{\psi}\big(\sigma^\sigma_{g\mu}\overline{\Phi}^\nu - \sigma^\nu_{g\mu}\overline{\Phi}^\sigma - \sigma_g{}^{\nu\sigma}\overline{\Phi}_\mu\big),$$

где

$$\overline{\Phi}^\sigma = \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\sigma \overline{\psi}}.$$

В итоге для $R^{\sigma\nu}{}_\mu$ получим представление

$$R^{\sigma\nu}{}_\mu = U^{\sigma\nu}{}_\mu + \overline{U}^{\sigma\nu}{}_\mu,$$

где

$$U^{\sigma\nu}{}_\mu = \frac{1}{4}\big(\Phi^\sigma \sigma^\nu_{g\mu} - \Phi^\nu \sigma^\sigma_{g\mu} + \Phi_\mu \sigma_g{}^{\nu\mu}\big)\psi,$$

$$\overline{U}^{\sigma\nu}{}_\mu = \frac{1}{4}\overline{\psi}\big(\sigma^\sigma_{g\mu}\overline{\Phi}^\nu - \sigma^\nu_{g\mu}\overline{\Phi}^\sigma - \sigma_g{}^{\nu\sigma}\overline{\Phi}_\mu\big).$$

Осталось найти представление для Y^σ_μ. Для этого уже надо вычислить следующее:

$$\frac{\partial \bigtriangledown_\tau \psi}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}}\partial_\mu g_{\alpha\beta} = 2\frac{\partial \bigtriangledown_\tau \psi}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}}\Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} = \frac{1}{2}\gamma_T \frac{\partial Q_\tau}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}}\Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\gamma\psi = \frac{1}{2}\gamma_T\left(s^{-1}\frac{\partial \partial_\tau s}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} + s^{-1}\frac{\partial \Gamma_\tau}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} s\right)\Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\gamma\psi.$$

Обратимся к вычислению

$$\gamma_T s^{-1}\frac{\partial \Gamma_\tau}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} s \Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\gamma\psi = \gamma_{g\rho}\frac{\partial \Gamma^\rho_{k\tau}}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} s\Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\gamma\psi =$$

$$= \frac{1}{4}\gamma_{g\rho}\{\delta^\sigma_\tau\left[\Gamma^\rho_{\mu k} + \Gamma^\nu_{\mu j} g^{j\rho} g_{\nu k}\right] + \delta^\sigma_k\left[\Gamma^\rho_{\mu\tau} + \Gamma^\nu_{\mu j} g_{\nu\tau} g^{j\rho}\right] - g^{\sigma\rho}\left[\Gamma^\nu_{\mu\tau} g_{\nu k} + \Gamma^\nu_{\mu k} g_{\nu\tau}\right]\}\gamma^k_g\psi.$$

Также находим

$$\gamma_T s^{-1} \frac{\partial \partial_\tau s}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} \Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \gamma \psi = \gamma_g s^{\alpha\beta} \delta^\sigma_\tau \Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \gamma \psi.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\tau \psi} \frac{\partial \bigtriangledown_\tau \psi}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\sigma \psi} \partial_\mu \psi =$$

$$= \Phi^\tau \Bigg(\frac{1}{8} \gamma_{g\rho} \{ \delta^\sigma_\tau [\Gamma^\rho_{\mu k} + \Gamma^\nu_{\mu j} g^{j\rho} g_{\nu k}] + \delta^\sigma_k [\Gamma^\rho_{\mu\tau} + \Gamma^\nu_{\mu j} g_{\nu\tau} g^{j\rho}] -$$

$$- g^{\sigma\rho} [\Gamma^\nu_{\mu\tau} g_{\nu k} + \Gamma^\nu_{\mu k} g_{\nu\tau}] \} \gamma^k_g \psi + \frac{1}{2} \gamma_{gT} s^{\alpha\beta} \delta^\sigma_\tau \Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \gamma \psi \Bigg) +$$

$$+ \Phi^\sigma \Bigg(\bigtriangledown_\mu \psi - \frac{1}{4} [2\gamma_{gT} s^{\alpha\beta} \delta^\sigma_\tau \Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \gamma \psi + \gamma_{gT} \Gamma_\mu \gamma_g] \psi \Bigg) = \Phi^\sigma \bigtriangledown_\mu \psi + Z^\sigma_\mu,$$

где

$$Z^\sigma_\mu = \frac{1}{8} \{ \Phi^\sigma (\gamma^j_g \Gamma^\nu_{\mu j} \gamma_{g\nu} - \gamma_{KT} \Gamma_\mu \gamma_g) +$$
$$+ \Phi^\tau \gamma_{g\rho} \gamma_{gT} (\Gamma^\rho_{\mu\tau} + \Gamma^\nu_{\mu j} g_{\nu\tau} g^{j\rho}) \gamma^\sigma_g - \Phi^\tau \gamma^\sigma_g (\Gamma^\nu_{\mu\tau} g_{\nu k} + \Gamma^\nu_{\mu j} g_{\nu\tau}) \gamma^k_g \} \psi.$$

Пусть $R^{\sigma\nu}{}_\mu / \sqrt{-g} = P^{\sigma\nu}{}_\mu$, где $P^{\sigma\nu}{}_\mu$ является тензором, тогда

$$\partial_\sigma R^{\sigma\nu}{}_\mu = \sqrt{-g} \bigtriangledown_\sigma P^{\sigma\nu}{}_\mu + \Gamma^\tau_{\sigma\mu} R^{\sigma\nu}{}_\tau.$$

Имеет место

$$Z^\nu_\mu + \Gamma^\tau_{\sigma\mu} U^{\sigma\nu}{}_\tau = 0.$$

Аналогичными вычислениями находим

$$\frac{\partial \bigtriangledown_\tau \overline{\psi}}{\partial \partial_\sigma g_{\alpha\beta}} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\tau \overline{\psi}} + \partial_\mu \overline{\psi} \frac{\partial(\mathcal{L}\sqrt{-g})}{\partial \bigtriangledown_\sigma \overline{\psi}} = \bigtriangledown_\mu \overline{\psi \Phi}^\sigma - \Gamma^\tau_{\sigma\mu} \overline{U}^{\sigma\nu}{}_\tau.$$

Для $Y^\nu_\mu + \partial_\sigma R^{\sigma\nu}{}_\mu$ получим

$$Y^\nu_\mu + \partial_\sigma R^{\sigma\nu}{}_\mu = -\mathcal{L}\sqrt{-g}\delta^\nu_\mu + \sqrt{-g} T^\nu_\mu + \Phi^\nu \bigtriangledown_\mu \psi + \bigtriangledown_\mu \overline{\psi \Phi}^\nu + \sqrt{-g} \bigtriangledown_\sigma P^{\sigma\nu}{}_\mu,$$

откуда

$$T^\nu_\mu = \mathcal{L}\delta^\nu_\mu - (\Phi^\nu \bigtriangledown_\mu \psi + \bigtriangledown_\mu \overline{\psi \Phi}^\nu)/\sqrt{-g} - \bigtriangledown_\sigma P^{\sigma\nu}{}_\mu.$$

Доказана

Теорема 9. *Пусть функция Лагранжа $\mathcal{L}(\psi, \bigtriangledown_\alpha \psi, \overline{\psi}, \bigtriangledown_\alpha \overline{\psi}, \gamma_{K\alpha}, g_{\alpha\beta})$ есть инвариант относительно произвольных преобразований координат и удовлетворены уравнения спинорного поля $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} = 0$. Тогда тензор $T^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}\sqrt{-g}}{\delta g_{\alpha\beta}}$ есть сохраняющийся тензор и допускает представление Л. Розенфельда в виде суммы канонического тензора энергии-импульса и дивергенции тензора углового момента.*

Автор выражает признательность М.А. Малахальцеву за обсуждение результатов работы и ценные критические замечания.

Литература

1. Cartan E. *Les groups projectifs qui ne laissent invariants aucune multiplicite plane* // Bull. Soc. Math. de France, 1913. – V. 41. – P. 53–96.
2. Van der Waerden B.L. *Spinoranalyse* // Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math. – Physik. Kl. – 1929. – P. 100–109.
3. Fock V.A., Ivanenko D.D. *Geometrie quantique lineare et deplacement parallele* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1929. – V. 188. – P.1470–1472.
4. Rosenfeld L. *Sur le tenseur d'impulsion-energy* // Mem. Acad. Roy. Belgique, 1940. – V. 18. – № 6. – P. 1–30.
5. Lichnerowicz A. *Spineurs harmoniques* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1963. – V. 253. – № 1. – P. 7–9.
6. Kosmann Y. *Dérivées de Lie des spineurs* // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1966. – V. 262 A. – P. 289–292.
7. Bourguignon J.-P., Gauduchon P. *Opérateurs de Dirac et variations de métriques* // Commun. Math. Phys. – 1992. – V. 144. – P. 581–599.
8. Билялов Р.Ф. *Законы сохранения для спинорных полей на римановых пространственно-временных многообразиях* // Теор. и матем. физика. – 1992. – Т. 90. – № 3. – С. 369–379.
9. Билялов Р.Ф. *Симметрический тензор энергии-импульса спинорных полей* // Теор. и матем. физика. – 1996. – Т. 108. – № 2. – С. 306–314.
10. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
11. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 495 с.
12. Ланкастер П. *Теория матриц.* Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1982. – 270 с.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 27.05.1998
окончательный вариант 24.09.2002