ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.518

А.Д. НАХМАН

КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДВОЙНЫХ СУММ ФУРЬЕ–ЛЕЖАНДРА

Пусть $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ — система ортогональных с весом

$$\rho^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1,$$

на отрезке $[-1,1]$ стандартизированных многочленов Якоби и $\{\widehat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ — соответствующая ортонормированная система ([1], с. 268–273), $n = 0, 1, \dots$ Известно, что свойства сходимости и суммируемости разложений Фурье по системе многочленов Якоби (и, в частности, многочленов Лежандра $p_n(x)$, соответствующих случаю $\alpha = \beta = 0$) во внутренних точках отрезка $[-1,1]$, аналогичны соответствующим свойствам разложений по тригонометрической системе ([2], с. 254; [3], [4]). Иначе обстоит дело в концевых точках. Так в точке $x = 1$ методы суммирования (C, γ) рядов Фурье-Лежандра непрерывных функций нерегулярны, вообще говоря, при $\gamma \leq 1/2$ (при $\gamma > 1/2$ они остаются регулярными); о соответствующем результате Гронуолла и его обобщениях см. в ([2], сс. 254, 257), а также [5].

В данной работе устанавливается, в частности, что при переходе к двойным рядам Фурье–Лежандра свойство регулярности (C, γ)-методов не сохраняется даже при $\gamma = 1$.

Пусть $f(x,y)$ — непрерывная на $Q = [-1,1]^2$ функция и

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f, 1, 1), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

— последовательность средних арифметических (другая терминология: средние $(C,1)$ или средние Фейера) прингсхеймовских частных сумм

$$S_k(f,x,y) = \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{k} \left(\int\!\!\int_Q f(t,z) \widehat{p}_\mu(t) \widehat{p}_\nu(z)\, dt\, dz \right) \widehat{p}_\mu(x) \widehat{p}_\nu(y)$$

ее двойного ряда Фурье–Лежандра.

Средние типа (1) в случае тригонометрических рядов Фурье впервые исследовались Марцинкевичем, их важность отмечена в [6].

Существование непрерывной функции $f(x,y)$, для которой ряд Фурье–Лежандра не суммируем в точке $(1,1)$ методом $(C,1)$ подобно одномерному случаю ([2], сс. 27, 266), будет следовать из неограниченности (при $n \to \infty$) констант Лебега $L_n(1,1)$, являющихся значениями (в точке $(1,1)$) функций Лебега

$$L_n(x,y) = \frac{1}{n+1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\mu=0}^{k} \widehat{p}_\mu(x) \widehat{p}_\mu(t) \right) \left(\sum_{\nu=0}^{k} \widehat{p}_\nu(y) \widehat{p}_\nu(z) \right) \right| dt\, dz. \tag{2}$$

Теорема. *При $n \to \infty$ имеет место порядковое соотношение*

$$L_n(1,1) \asymp \ln^2 n.$$

Доказательство. Пусть $n = 1, 2, \dots,$

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(t,z) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k^{(\alpha,\beta)}(1,t)D_k^{(\alpha,\beta)}(1,z), \tag{3}$$

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(t,z) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k^{(\alpha,\beta)}(t,z); \tag{4}$$

здесь

$$D_k^{(\alpha,\beta)}(x,t) = \sum_{\mu=0}^{k} \widehat{p}_\mu^{(\alpha,\beta)}(x)\widehat{p}_\mu^{(\alpha,\beta)}(t) \tag{5}$$

— ядро Дирихле, для которого справедливы соотношения

$$D_k^{(\alpha,\beta)}(x,t) = a_k^{(\alpha,\beta)}\frac{\widehat{p}_{k+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\widehat{p}_k^{(\alpha,\beta)}(t) - \widehat{p}_k^{(\alpha,\beta)}(x)\widehat{p}_{k+1}^{(\alpha,\beta)}(t)}{x-t}, \tag{6}$$

$|a_k^{(\alpha,\beta)}| \le c_1$ ([2], с. 56; напр., $a_k^{(1,0)} = (2n+3)^{-1}\sqrt{(n+1)(n+2)}$; [1], с. 273),

$$D_k^{(0,0)}(1,t) = \frac{\widehat{p}_k^{(1,0)}(1)\widehat{p}_k^{(1,0)}(t)}{k+1} \tag{7}$$

(см. [2], с. 83, где соответствующая формула записана в терминах стандартизированных многочленов). Отметим, что постоянные c_j здесь и в дальнейшем абсолютные и различные, вообще говоря, в различных формулах,

$$\widehat{p}_k^{(1,0)}(1) = (k+1)\sqrt{(k+1)/2} \tag{8}$$

([1], с. 288). Из соотношений (3), (7), (8) с помощью преобразования Абеля получаем

$$K_n(t,z) = K_n^{(0,0)}(t,z) = \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\widehat{p}_k^{(1,0)}(t)\widehat{p}_k^{(1,0)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{D_n^{(1,0)}(t,z) - \frac{n}{n+1}F_{n-1}^{(1,0)}(t,z)\right\}. \tag{9}$$

Дальнейшее доказательство разобьем на три этапа.

1^0. Установим соотношение

$$L_n(1,1) \le c_2 \ln^2(n+1), \quad n = 1, 2, \dots \tag{10}$$

Согласно равенствам (4) и (9) оно будет вытекать из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$d_n \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|D_n^{(1,0)}(t,z)|dt\,dz \le c_3\ln^2(n+1), \quad n = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Доказательство. Из результатов работы [7] следует, что

$$\int_{-1}^{1}|D_n^{(1,0)}(t,z)|(1-z)dz \le c_4(\ln(n+1) + \sqrt{n+1}\{|p_n^{(1,0)}(t)| + |p_{n+1}^{(1,0)}(t)|\}),$$

а поэтому согласно порядковому соотношению

$$\int_0^1 (1-x)^\mu |p_k^{(\alpha,\beta)}(x)|dx \asymp E_k, \tag{12}$$

где $E_k = k^{\alpha-2\mu-2}$ при $2\mu < \alpha - 3/2$, $E_k = k^{-1/2}\ln k$ при $2\mu = \alpha - 3/2$, $E_k = k^{-1/2}$ при $2\mu > \alpha - 3/2$ ([2], с. 180), имеет место оценка

$$\Omega_n = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |D_n^{(1,0)}(t,z)|(1-z)dt\,dz \le c_5 \ln(n+1).$$

Интеграл d_n в (11) представим в виде

$$d_n = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1} + \int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} = d_n^{(1)} + d_n^{(2)} + d_n^{(3)} \tag{13}$$

и, замечая, что $1 \le 1 - z \le 2$ при $z \in [-1, 0]$, получаем

$$d_n^{(1)} \le \Omega_n \le c_6 \ln(n+1).$$

Подобным образом

$$d_n^{(2)} \le c_7 \ln(n+1).$$

Поэтому (см. (11) и (13)) остается доказать, что $d_n^{(3)} \le c_8 \ln^2(n+1)$. В дальнейших рассуждениях удобно перейти по формуле ([1], с. 273)

$$\widehat{p}_n^{(\alpha,0)}(x) = \sqrt{\frac{2n+\alpha+1}{2^{\alpha+1}}}\,p_n^{(\alpha,0)}(x) \tag{14}$$

к стандартизированным многочленам и сделать замену переменных $t = \cos\theta$, $z = \cos\phi$. Тогда

$$d_n^{(3)} = \int_0^{\pi/2} \sin\phi\,d\phi \int_0^{\pi/2} |D_n^{(1,0)}(\cos\theta,\cos\phi)|\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\phi} + \int_0^{\pi/2}\int_{\phi}^{\pi/2},$$

причем достаточно оценить первый интеграл (оценка второго аналогична). Далее

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\phi} \le \int_0^{2/(n+1)}\int_0^{2/(n+1)} + \int_{2/(n+1)}^{\pi/2}\int_{\phi-1/(n+1)}^{\phi} + \int_{2/(n+1)}^{\pi/2}\int_0^{\phi-1/(n+1)} = \overline{d}_n + \widetilde{d}_n + \dot{d}_n \tag{15}$$

и, используя оценки ([2], с. 176–177; [1], с. 299)

$$|p_k^{(\alpha,\beta)}(x)| \le c_9(k+1)^{\alpha}, \quad |p_k^{(\alpha,\beta)}(x)| \le \frac{c_{10}}{\sqrt{k+1}(1-x)^{\alpha/2+1/4}} \quad (0 \le x \le 1), \tag{16}$$

получаем (см. (5) и (14))

$$\begin{aligned}\overline{d}_n + \widetilde{d}_n \le c_{11}\Big\{ &\int_0^{2/(n+1)} \phi\,d\phi \int_0^{2/(n+1)} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{3/2}(k+1)^{3/2}\theta\,d\theta + \\ &+ \int_{2/(n+1)}^{\pi/2} \phi\,d\phi \int_{\phi-1/(n+1)}^{\phi} \sum_{k=0}^{n} \Big(\sin^2\frac{\phi}{2}\Big)^{-3/4}\Big(\sin^2\frac{\theta}{2}\Big)^{-3/4}\theta\,d\theta\Big\} \le \\ &\le c_{12}\Big\{1 + (n+1)\int_{2/(n+1)}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{\phi}}\int_{\phi-1/(n+1)}^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{\phi}}\Big\} \le c_{13}\ln(n+1).\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь использовано неравенство $\theta \ge \phi - 1/(n+1) \ge \phi/2$ во внутреннем интеграле во втором слагаемом.

Для оценки $\dot{d}_n$ потребуется представление ([2], с. 83, см. также [7])

$$\begin{aligned} &p_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)p_n^{(\alpha,\beta)}(z) - p_n^{(\alpha,\beta)}(t)p_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(z) = \\ &\quad = \Big(1 + \frac{\alpha+\beta}{2n+2}\Big)((1-z)p_n^{(\alpha+1,\beta)}(z)p_n^{(\alpha,\beta)}(t) - (1-t)p_n^{(\alpha+1,\beta)}(t)p_n^{(\alpha,\beta)}(z)).\end{aligned}$$

С его помощью, переходя в (6) к стандартизированным многочленам с $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (см. (14)), запишем (6) в виде

$$D_n^{(1,0)}(t,z) = \frac{n+2}{4(t-z)}((1-z)p_n^{(2,0)}(z)p_n^{(1,0)}(t) - (1-t)p_n^{(2,0)}(t)p_n^{(1,0)}(z)), \tag{18}$$

откуда

$$|D_n^{(1,0)}(\cos\theta, \cos\phi)| \le c_{14}\sqrt{n+1}(\phi-\theta)^{-1}(\phi+\theta)^{-1}(\phi^{-1/2}|p_n^{(1,0)}(\cos\theta)| + \theta^2\phi^{-3/2}|p_n^{(2,0)}(\cos\theta)|).$$

Замечая, что в оцениваемом интеграле $\phi \ge \theta$, будем иметь

$$\dot{d}_n \le c_{15}\sqrt{n+1}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_{\theta+1/(n+1)}^{\pi/2}(|p_n^{(1,0)}(\cos\theta)| + \theta|p_n^{(2,0)}(\cos\theta)|)\frac{\sin\phi\,d\phi}{\sqrt{\phi}\,\phi(\phi-\theta)} \le$$

$$\le c_{16}\sqrt{n+1}\,\ln(n+1)\int_0^{\pi/2}\theta^{-1/2}(|p_n^{(1,0)}(\cos\theta)| + \theta|p_n^{(2,0)}(\cos\theta)|)\sin\theta\,d\theta \le c_{17}\ln^2(n+1).$$

Последняя оценка справедлива в силу соотношения (12), если заметить, что $\theta = \arccos t \asymp \sqrt{1-t}$. Полученное неравенство для $\dot{d}_n$ вместе с (17) приводит (см. (15)) к оценке $d_n^{(3)} \le c_{18}\ln^2(n+1)$, которая и требовалась для завершения доказательства леммы 1.

2^0. **Лемма 2.** *Имеет место оценка*

$$\int_{-1/2}^{1}\int_{-1/2}^{1}|D_n^{(1,0)}(t,z)|dt\,dz \ge c_{19}\ln^2 n, \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Доказательство. При доказательстве этого утверждения воспользуемся результатами и методами [7]. Во-первых, числитель дроби в (6) для $D_n^{(1,0)}(t,z)$ запишем в виде [7]

$$h_n\{(1-t^2)p_{n-1}^{(2,1)}(t)p_n^{(1,0)}(z) - (1-z^2)p_{n-1}^{(2,1)}(z)p_n^{(1,0)}(t) + 2(z-t)p_n^{(1,0)}(z)p_n^{(1,0)}(t)\}, \tag{20}$$

где $h_n = -\frac{2n+3}{4(n+1)}$. Далее воспользуемся асимптотическим равенством ([2], с. 205; [7])

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \left[\sqrt{n\pi}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}\right]^{-1}\left\{\cos\left(\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2}\theta - \frac{2\alpha+1}{4}\pi\right) + \frac{O(1)}{n\sin\theta}\right\},$$

$1/n \le \theta \le \pi - 1/n$ для первых двух слагаемых в выражении (20). Выделяя в них главные члены, при $0 \le \phi \le \pi/2$ будем иметь

$$I_n(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}|D_n^{(1,0)}(\cos\theta,\cos\phi)|\sin\theta\,d\theta \ge$$

$$\ge c_{20}\sqrt{n}\left\{\int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}\left|2\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sin\theta\cdot p_n^{(1,0)}(\cos\phi)\cdot\sin(\theta(n+1)-3\pi/4) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin^2\phi\cdot p_{n-1}^{(2,1)}(\cos\phi)\cos\left(\theta(n+1)-\frac{3\pi}{4}\right)\right|\frac{\theta\,d\theta}{(\theta-\phi)(\theta+\phi)\theta^{3/2}}\right\} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}|p_n^{(1,0)}(\cos\phi)|\int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}\frac{\theta^3 d\theta}{(\theta-\phi)(\theta+\phi)\theta^{7/2}} +\right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}\sin^2\phi\cdot|p_{n-1}^{(2,1)}(\cos\phi)|\int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}\frac{\theta\,d\theta}{(\theta-\phi)(\theta+\phi)\theta^{5/2}} +$$

$$\left. + n|p_n^{(1,0)}(\cos\phi)|\int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}|p_n^{(1,0)}(\cos\theta)|\sin\theta\,d\theta\right). \tag{21}$$

Заменим в “главном члене” правой части (21) под знаком интеграла множитель $\sin\theta$ в первом слагаемом на $\sin\phi$. Погрешность, не превосходящую

$$c_{21}\sqrt{n}\int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}|\sin\theta-\sin\phi|\,|p_n^{(1,0)}(\cos\phi)|\frac{d\theta}{(\theta-\phi)(\theta+\phi)\theta^{1/2}},$$

включим в член $O(\dots)$. Тогда весь этот член согласно (12) не превзойдет выражения

$$c_{22}\Big\{\sqrt{n}\,\phi^{-1/2}|p_n^{(1,0)}(\cos\phi)|+\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\phi^{-3/2}|p_n^{(1,0)}(\cos\phi)|+\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\phi^{-1/2}|p_{n-1}^{(2,1)}(\cos\phi)|\Big\}, \tag{22}$$

и последующее интегрирование по отрезку $[o,\pi/2]$ блока (22) с множителем $\sin\phi$ приведет (см. (12)) к оценке интеграла через

$$\{\sqrt{n}\,n^{-1/2}\ln n+\frac{\ln n}{\sqrt{n}}n^{1+3/2-2}+\frac{\ln n}{\sqrt{n}}n^{2+1/2-2}\}\le c_{23}\ln n. \tag{23}$$

С другой стороны, “главный член” в (21) не меньше, чем

$$C_n(\phi)\phi^{-1/2}\int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}|\cos((n+1)\theta+\gamma)|\frac{d\theta}{(\theta-\phi)\theta^{3/2}}\ge$$
$$\ge c_{24}C_n(\phi)\phi^{-1/2}\int_{\phi+1/n}^{2\pi/3}[1+\cos((2n+2)\theta+2\gamma)]\frac{d\theta}{(\theta-\phi)\theta^{3/2}},$$

и, если применить вторую теорему о среднем к интегралу второго слагаемого, ограничившись рассмотрением $\phi\in[\arccos(1-1/n),\pi/2]$, то последнее выражение будет иметь оценку снизу через

$$C_n(\phi)\Big\{\phi^{-1/2}\int_{\phi+1/n}^{4\phi/3}\frac{d\theta}{(\theta-\phi)\theta^{3/2}}+O(\phi^{-2})\Big\}\ge c_{25}C_n(\phi)\phi^{-2}\ln n\phi. \tag{24}$$

Здесь [7] при $\phi\in[\arccos(1-1/n),\pi/2]$

$$C_n(\phi)=\sqrt{n\phi\sin^2\phi\Big\{\sin^2\phi(p_{n-1}^{(2,1)}(\cos\phi))^2+\frac{4n}{n-1}(p_n^{(1,0)}(\cos\phi))^2\Big\}}\ge c_{26}>0,$$

а

$$\gamma=\arg\Big\{\sin\phi\,p_{n-1}^{(2,1)}(\cos\phi)+2i\sqrt{\frac{n}{n-1}}p_n^{(1,0)}(\cos\phi)\Big\}.$$

Теперь в силу оценок (21)–(24)

$$\int_{\arccos(1-1/n)}^{\pi/2}I_n(\phi)\sin\phi\,d\phi\ge c_{27}\int_0^{1-1/n}\frac{\ln n\sqrt{1-x}}{1-x}dx+O(\ln n)\ge c_{28}\ln^2 n\quad(n\to\infty),$$

откуда и следует утверждение (19) леммы 2.

3^0. Последнее вспомогательное утверждение состоит в следующем.

Лемма 3. *Имеет место оценка*

$$f_n\overset{\text{def}}{=}\int_{-1/2}^{1}\int_{-1/2}^{1}|F_n^{(1,0)}(t,z)|dt\,dz\le c_{29}\ln(n+2),\quad n=0,1,\dots$$

Доказательство удобно проводить в терминах ортонормированных многочленов. Поскольку предстоят громоздкие выкладки, условимся в следующих обозначениях:

$$\rho_n(t) = \widehat{p}_n^{(1,0)}(t), \quad \Upsilon_n(t) = \widehat{p}_n^{(2,0)}(t), \quad \widetilde{\Upsilon}_n(t) = \widehat{p}_n^{(3,0)}(t);$$

в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, аргументы функций будем опускать. Потребуются соотношения

$$|\rho_n - \rho_{n+1}| = O(1-t)|\Upsilon_n| + O(\tfrac{1}{n})|\rho_{n+1}|, \tag{25}$$

$$|\Upsilon_n - \Upsilon_{n+1}| = O(1-t)|\widetilde{\Upsilon}_n| + O(\tfrac{1}{n})|\Upsilon_{n+1}|, \tag{26}$$

которые легко следуют из формулы ([2], с. 83)

$$(n+\alpha+1)p_n^{(\alpha,\beta)}(t) - (n+1)p_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t) = (1-t)(n+(\alpha+\beta)/2+1)p_n^{(\alpha+1,\beta)}(t),$$

если в ней (при $\beta = 0$) перейти к ортонормированным многочленам (см. (14)).

Прежде, чем получать оценки f_n, выражение (6) ядра Дирихле запишем в виде (см. (18) и (14))

$$D_k^{(1,0)}(t,z) = \tau_k \frac{(1-z)\Upsilon_k(z)\rho_k(t) - (1-t)\Upsilon_k(t)\rho_k(z)}{t-z}, \tag{27}$$

где

$$\tau_k = \frac{k+2}{\sqrt{(k+1)(2k+3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{k+1}\Big)\Big).$$

Пусть $H_n^+(\theta,\phi)$ — характеристическая функция того подмножества (принадлежащего квадрату $[0, 2\pi/3]^2$), на котором $F_n^{(1,0)}(\cos\theta, \cos\phi) \geq 0$, а $H_n^-(\theta,\phi)$ — характеристическая функция множества-дополнения (до квадрата), так что $|F_n^{(1,0)}| = H_n^+ F_n^{(1,0)} - H_n^- F_n^{(1,0)}$. Достаточно, очевидно, оценить

$$\grave{f}_n = \int_0^{2\pi/3}\int_0^{2\pi/3} H_n^+(\theta,\phi) F_n^{(1,0)}(\cos\theta,\cos\phi)\sin\phi\sin\theta\,d\phi\,d\theta \tag{28}$$

(оценка в случае интеграла с H_n^- аналогична). Далее, пусть $\chi_k(\phi,\theta)$ и $\widetilde{\chi}_k(\phi,\theta)$ — характеристические функции подмножества

$$G_k = \Big\{\frac{2}{k+1} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3},\ 0 \leq \theta \leq \phi - \frac{1}{k+1}\Big\} \bigcup \Big\{\frac{2}{k+1} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3},\ 0 \leq \phi \leq \theta - \frac{1}{k+1}\Big\}$$

и его дополнения $\overline{G}_k$ (до квадрата $[0, 2\pi/3]^2$). Тогда

$$D_k^{(1,0)} = \chi_k D_k^{(1,0)} + \widetilde{\chi}_k D_k^{(1,0)},$$

и следовательно, интеграл (28) согласно (4) приобретает вид

$$\grave{f}_n = \int_0^{2\pi/3}\int_0^{2\pi/3} H_n^+(\theta,\phi)\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\chi_k(\phi,\theta)D_k^{(1,0)}(\cos\theta,\cos\phi)\sin\phi\,\sin\theta\,d\phi\,d\theta +$$
$$+ O\Big(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k}\int\int_{\overline{G}_k}|\rho_\nu(\cos\phi)\rho_\nu(\cos\theta)|\sin\phi\,\sin\theta\,d\phi\,d\theta\Big). \tag{29}$$

Слагаемое $O(\dots)$ в (29) согласно (16) и (14) не превосходит

$$\frac{c_{30}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Big(\int_0^{2/(k+1)}\phi\,d\phi\int_0^{2/(k+1)}(k+1)^2\theta\,d\theta + \int_{2/(k+1)}^{2\pi/3}\phi\,d\phi\int_{\phi-1/(k+1)}^{\phi+1/(k+1)}\phi^{-3/2}\theta^{-3/2}\theta\,d\theta\Big) \leq$$
$$\leq \frac{c_{31}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Big[\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{\ln(k+1)}{k+1}\Big] \leq c_{32}\ln(n+2).$$

Поэтому в (29) достаточно оценить первое слагаемое, которое с помощью (27), выделяя и в τ_k главный член, запишем в виде

$$\widetilde{f}_n = \frac{2}{(n+1)\sqrt{2}} \int_0^{2\pi/3} \int_0^{2\pi/3} \frac{H_n^+(\theta,\phi)}{\cos\theta - \cos\phi} \sum_{k=0}^{n} \chi_k(\phi,\theta) \Big\{ \sin^2\frac{\phi}{2} \Upsilon_k(\cos\phi)\rho_k(\cos\theta) - $$
$$- \sin^2\frac{\theta}{2} \Upsilon_k(\cos\theta)\rho_k(\cos\phi) \Big\} \sin\phi \sin\theta \, d\phi \, d\theta +$$
$$+ O\Big(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{2\pi/3} \int_0^{2\pi/3} \frac{1}{k+1} |D_k^{(1,0)}(\cos\theta,\cos\phi)| \sin\phi \sin\theta \, d\phi \, d\theta \Big). \quad (30)$$

В последнем равенстве остаточный член $O(\dots)$ не превосходит (см. (11))

$$\frac{c_{33}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^2(k+2)}{k+1} \le c_{34},$$

и доказательство леммы 3 сводится к получению оценки

$$\overline{f}_n = \frac{1}{n+1} \int_0^{2\pi/3} \int_0^{2\pi/3} \left| \frac{\sin^2\frac{\phi}{2} \sin\phi \sin\theta}{\cos\theta - \cos\phi} H_n^+(\theta,\phi) \sum_{k=0}^{n} \chi_k(\phi,\theta) \Upsilon_k(\cos\phi)\rho_k(\cos\theta) \right| d\phi \, d\theta \le$$
$$\le c_{35} \ln(n+2), \quad (31)$$

поскольку $\chi_k(\phi,\theta) = \chi_k(\theta,\phi)$, а значит, в "главной части" (30) интеграл от модуля оставшегося члена оценивается аналогично.

С помощью рекуррентного соотношения ([1], с. 273–274)

$$x\widehat{p}_n^{(\alpha,0)}(x) = \lambda_n^{(\alpha)} \widehat{p}_{n+1}^{(\alpha,0)}(x) + \gamma_n^{(\alpha)} \widehat{p}_n^{(\alpha,0)}(x) + \lambda_{n-1}^{(\alpha)} \widehat{p}_{n-1}^{(\alpha,0)}(x),$$

где

$$\lambda_n^{(\alpha)} = 2\sqrt{\frac{(n+1)^2(n+1+\alpha)^2}{(2n+1+\alpha)(2n+2+\alpha)^2(2n+3+\alpha)}}, \quad (32)$$
$$\gamma_n^{(\alpha)} = -\frac{\alpha^2}{(2n+2+\alpha)(2n+\alpha)}, \quad \widehat{p}_{-1}^{(\alpha,0)}(x) = 0,$$

произведем преобразования

$$(z-t)\sum_{k=0}^{n} \chi_k \Upsilon_k(z)\rho_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \chi_k z \Upsilon_k \rho_k - \sum_{k=0}^{n} \chi_k t \rho_k \Upsilon_k = \sum_{k=0}^{n} (\chi_k \lambda_k^{(2)} \Upsilon_{k+1}\rho_k - \chi_k \lambda_{k-1}^{(1)} \Upsilon_k \rho_{k-1}) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} (\chi_k \lambda_{k-1}^{(2)} \Upsilon_{k-1}\rho_k - \chi_k \lambda_k^{(1)} \Upsilon_k \rho_{k+1}) + \sum_{k=0}^{n} (\gamma_k^{(2)} - \gamma_k^{(1)}) \chi_k \Upsilon_k \rho_k.$$

В первой сумме член $\chi_k \lambda_{k-1}^{(1)} \Upsilon_k \rho_{k-1}$ заменим на $\chi_{k-1} \lambda_{k-1}^{(2)} \Upsilon_k \rho_{k-1}$, а во второй $\chi_k \lambda_{k-1}^{(2)} \Upsilon_{k-1} \rho_k$ — на $\chi_{k-1} \lambda_{k-1}^{(1)} \Upsilon_{k-1} \rho_k$. Вычисляя тогда "скорректированные" суммы, принимая во внимание погрешность от произведенной замены и соотношение (32), в силу которого

$$\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)} = O\Big(\frac{1}{(k+1)^2}\Big), \quad \lambda_k^{(1)} - \lambda_{k+1}^{(1)} = O\Big(\frac{1}{(k+1)^2}\Big),$$

имеем

$$(z-t)\sum_{k=0}^{n}\chi_k\Upsilon_k(z)\rho_k(t)=\chi_n(\lambda_n^{(2)}\Upsilon_{n+1}\rho_n-\lambda_n^{(1)}\Upsilon_n\rho_{n+1})+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\{(\chi_{k-1}\lambda_{k-1}^{(2)}-\chi_k\lambda_{k-1}^{(1)})\Upsilon_k\rho_{k-1}+(\chi_k\lambda_{k-1}^{(2)}-\chi_{k-1}\lambda_{k-1}^{(1)})\Upsilon_{k-1}\rho_k\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\chi_k O(\tfrac{1}{k^2})|\Upsilon_k\rho_k|=\chi_n\lambda_n^{(1)}(\Upsilon_{n+1}\rho_n-\Upsilon_n\rho_{n+1})+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(\chi_k-\chi_{k-1})\lambda_{k-1}^{(1)}[\Upsilon_{k-1}\rho_k-\Upsilon_k\rho_{k-1}]+\sum_{k=0}^{n}\chi_k\Upsilon_k^*\rho_k^*O\left(\frac{1}{(k+1)^2}\right). \quad (33)$$

Здесь

$$p_k^*(x)=\sum_{\nu=k-1}^{k+1}|\widehat{p}_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)|,$$

так что, например, Υ_k^* соответствует случаю $\alpha=2$, $\beta=0$.

Наконец, с помощью соотношений

$$\Upsilon_{k-1}\rho_k-\Upsilon_k\rho_{k-1}=(\Upsilon_{k-1}-\Upsilon_k)\rho_k+\Upsilon_k(\rho_k-\rho_{k-1})$$

и (25), (26) из равенства (33) получаем оценку

$$|z-t|\left|\sum_{k=0}^{n}\chi_k\Upsilon_k(z)\rho_k(t)\right|\le c_{36}\Big\{\chi_n[(1-z)\widetilde{\Upsilon}_n^*(z)\rho_n^*(t)+(1-t)\Upsilon_n^*(z)\widetilde{\Upsilon}_n^*(t)]+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}|\chi_k-\chi_{k-1}|\Big([(1-z)\widetilde{\Upsilon}_k^*(z)\rho_k^*(t)+(1-t)\Upsilon_k^*(z)\Upsilon_k^*(t)]+$$

$$+\frac{1}{k+1}[\Upsilon_k^*(z)\rho_k^*(t)+\Upsilon_k^*(t)\rho_k^*(z)]\Big)+\sum_{k=0}^{n}\chi_k[\Upsilon_k^*(z)\rho_k^*(t)+\Upsilon_k^*(t)\rho_k^*(z)]\frac{1}{(k+1)^2}+$$

$$+\frac{1}{n}[\Upsilon_n^*(z)\rho_n^*(t)+\Upsilon_n^*(t)\rho_n^*(z)]\Big\}, \quad (34)$$

которой мы и воспользуемся при доказательстве (31). Согласно (34) имеем

$$\overline{f}_n\le c_{37}\sum_{m=1}^{5}\overline{f}_n^{(m)}, \quad (35)$$

где (с обозначениями $u(\phi,\theta)=\phi^3\theta(\theta-\phi)^{-2}(\theta+\phi)^{-2}$, $\phi_1=\cos\phi$, $\theta_1=\cos\theta$)

$$\overline{f}_n^{(m)}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{2\pi/3}\int_0^{2\pi/3}\mathcal{F}_{m,k}(\phi,\theta)d\phi\,d\theta,$$

при этом

$$\mathcal{F}_{1,k}(\phi,\theta)=\mathcal{F}_{1,n}(\phi,\theta)=\frac{1}{n+1}\chi_n u(\phi,\theta)(\phi^2\widetilde{\Upsilon}_n^*(\phi_1)\rho_n^*(\theta_1)+\theta^2\Upsilon_n^*(\phi_1)\Upsilon_n^*(\theta_1)),$$

$$\mathcal{F}_{2,k}(\phi,\theta)=|\chi_k-\chi_{k-1}|u(\phi,\theta)(\phi^2\widetilde{\Upsilon}_k^*(\phi_1)\rho_k^*(\theta_1)+\theta^2\Upsilon_k^*(\phi_1)\Upsilon_k^*(\theta_1)),$$

$$\mathcal{F}_{3,k}(\phi,\theta)=\frac{1}{k+1}|\chi_k-\chi_{k-1}|u(\phi,\theta)(\Upsilon_k^*(\phi_1)\rho_k^*(\theta_1)+\Upsilon_k^*(\theta_1)\rho_k^*(\phi_1)),$$

$$\mathcal{F}_{4,k}(\phi,\theta)=\frac{1}{(k+1)^2}\chi_k u(\phi,\theta)(\Upsilon_k^*(\phi_1)\rho_k^*(\theta_1)+\Upsilon_k^*(\theta_1)\rho_k^*(\phi_1)),$$

$$\mathcal{F}_{5,k}(\phi,\theta)=\mathcal{F}_{5,n}(\phi,\theta)=\frac{1}{(n+1)^2}\chi_n u(\phi,\theta)(\Upsilon_n^*(\phi_1)\rho_n^*(\theta_1)+\Upsilon_n^*(\theta_1)\rho_n^*(\phi_1)).$$

Пользуясь соотношениями (16) и (12), имеем

$$\overline{f}_n^{(1)} \le \frac{c_{38}}{n+1}\Bigg[\int_0^{2\pi/3} d\phi \int_{\phi+1/(n+1)}^{2\pi/3}\Big(\phi^5\widetilde{\Upsilon}_n^*(\phi_1)\frac{\theta}{(\theta-\phi)^2\theta\phi}\,\frac{1}{\theta^{3/2}}+\phi^3\Upsilon_n^*(\phi_1)\frac{\theta^3}{(\theta-\phi)^2\theta^2}\frac{1}{\phi^{5/2}}\Big)d\theta +$$
$$+\int_0^{2\pi/3} d\theta \int_{\theta+1/(n+1)}^{2\pi/3}\Big(\theta\rho_n^*(\theta_1)\frac{\phi^5}{(\theta-\phi)^2\phi^2}\,\frac{1}{\phi^{7/2}}+\theta^3\Upsilon_n^*(\theta_1)\frac{\phi^3}{(\theta-\phi)^2\phi^2}\frac{1}{\phi^{5/2}}\Big)d\phi\Bigg] \le$$
$$\le c_{39}\Bigg[\int_0^{2\pi/3}(\phi^{5/2}\widetilde{\Upsilon}_n^*(\phi_1)+\phi^{3/2}\Upsilon_n^*(\phi_1))d\phi+\int_0^{2\pi/3}(\theta^{1/2}\rho_n^*(\theta_1)+\theta^{3/2}\Upsilon_n^*(\theta_1))d\theta\Bigg] \le c_{40}\ln(n+2). \tag{36}$$

Здесь использовано то, что во внутренних интегралах первых двух слагаемых $\theta \ge \phi$, а

$$\int_{\phi+1/(n+1)}^{2\pi/3}\frac{d\theta}{(\theta-\phi)^2}=O(n+1);$$

подобным образом обстоит дело и во втором двойном интеграле. При оценке $\overline{f}_n^{(2)}$ заметим, что наличие множителя $|\chi_k-\chi_{k-1}|$ в подинтегральном выражении позволяет мажорировать $\int\limits_0^{2\pi/3}\int\limits_0^{2\pi/3}$ суммой

$$\int_0^{2\pi/3}\int_{\phi+1/(k+2)}^{\phi+1/(k+1)}+\int_0^{2\pi/3}\int_{\theta+1/(k+2)}^{\theta+1/(k+1)}$$

и, если учесть, что

$$\int_{\phi+1/(k+2)}^{\phi+1/(k+1)}\frac{d\theta}{(\theta-\phi)^2}=O(1),$$

то в точности, как и в случае $\overline{f}_n^{(1)}$, получим

$$\overline{f}_n^{(2)} \le \frac{c_{41}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\ln(k+2) \le c_{42}\ln(n+2). \tag{37}$$

Аналогично получаем

$$\overline{f}_n^{(3)} \le c_{43}. \tag{38}$$

Далее, подобно случаю (36) имеем

$$\overline{f}_n^{(4)} \le \frac{c_{44}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2(k+1)}{(k+1)^2}\Bigg[\int_0^{2\pi/3}\phi^{1/2}\Upsilon_k^*(\phi_1)d\phi+\int_0^{2\pi/3}\theta^{-1/2}\rho_k^*(\theta_1)d\theta\Bigg] \le$$
$$\le \frac{c_{45}}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{k+1} \le c_{46}. \tag{39}$$

Аналогично,

$$\overline{f}_n^{(5)} \le c_{47}. \tag{40}$$

Теперь, соединяя оценки (36)–(40), в силу соотношения (35) приходим к утверждению (31), т. е. лемма 3 доказана.

4^0. В силу утверждений леммы 2, леммы 3 и равенства (9) имеем

$$L_n \ge c_{48}\ln^2 n, \quad n\to\infty,$$

что в сочетании с оценкой (10) позволяет заключить справедливость теоремы.

5^0. **Следствие.** Имеет место равенство

$$L_n(-1,1)=L_n(1,-1)=L_n(-1,-1)=L_n(1,1),$$

так что каждая из этих величин при $n \to \infty$ растет со скоростью порядка $\ln^2 n$.

Доказательство. Во-первых, отметим справедливость соотношений

$$D_k^{(0,0)}(-1,t) = \frac{\widehat{p}_k^{(0,1)}(-1)\widehat{p}_k^{(0,1)}(t)}{k+1}$$

(этот аналог формулы (7) вытекает из рассуждений [2], с.83) и $\widehat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n \widehat{p}_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$ ([1], с. 283), в силу которых и равенств (2) и (8) имеем

$$L_n(-1,1) = \frac{1}{n+1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{2}(-1)^k\widehat{p}_k^{(0,1)}(t)\widehat{p}_k^{(1,0)}(z)\right|dt\,dz =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=0}^{n}(k+1)\widehat{p}_k^{(1,0)}(t)\widehat{p}_k^{(1,0)}(z)\right|dt\,dz = L_n(1,1).$$

Точно так же доказывается, что $L_n(1,-1)$ и $L_n(-1,-1)$ равны $L_n(1,1)$. Остается воспользоваться результатом теоремы .

Литература

1. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 415 с.
2. Сегё Г. *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
3. Осиленкер Б.П. *О сходимости и суммируемости разложений Фурье по ортонормированным полиномам, ассоциированным с разностными операторами второго порядка* // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т.15. – № 4. – С. 892–908.
4. Осиленкер Б.П. *О линейных процессах приближения функций многих переменных* // Исслед. по теор. функций многих веществ. переменных. – Ярославль, 1978. – № 2. – С. 176–195.
5. Кальней С.Г. *Равномерная ограниченность многочленов по полиномам Якоби в метрике L* // ДАН СССР. – 1975. – Т. 222. – № 5. – С. 1024–1027.
6. Жижиашвили Л.В. *Обобщение одной теоремы Марцинкевича* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 82. – № 5. – С. 1112–1122.
7. Агаханов С.А., Натансон Г.И. *Функция Лебега для сумм Фурье–Якоби* // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем. – 1968. – № 1. – С. 11–18.

Тамбовский государственный технический университет

Поступила 27.01.1997