ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.984

В.В. ДУБРОВСКИЙ, А.И. СЕДОВ

ОЦЕНКА РАЗНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ГЕГЕНБАУЭРА ПО НОРМЕ L_q

Ниже L_q — комплексное пространство с нормой $\|f\|_{L_q} = \Big(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^q \omega(x)dx\Big)^{1/q}$, $1 \le q < \infty$, $\omega(x) = (1-x^2)^{\gamma-1/2}$ — вес ($0<\gamma<1$), $L_\infty = L_\infty[-1,1]$ — вещественное пространство измеримых, ограниченных в существенном функций, $D = D[-1,1]$ — пространство абсолютно непрерывных на $[-1,1]$ функций.

Рассмотрим действующий в L_2 оператор T

$$Ty = -(1-x^2)y'' + (2\gamma+1)xy'.$$

Его собственным числам $\lambda_n = n(n+2\gamma)$ соответствуют ортонормированные в L_2 собственные функции $v_n(x) = h_n^{-1/2} C_n^\gamma(x)$, где $h_n = \frac{\sqrt{\pi}(2\gamma)_n \Gamma(\gamma+1/2)}{(n+\gamma)n!\Gamma(\gamma)}$, $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$, $C_n^\gamma(x)$ — многочлены Гегенбауэра ([1], с. 176), $n=\overline{1,\infty}$. Использованы обозначения справочника [1]. Так как v_n ($n=\overline{1,\infty}$) полны в L_2 ([1], с. 160), то можно показать, что T — самосопряженный оператор.

Пусть $P: L_2 \to L_2$ — оператор умножения на функцию p ($p \in L_\infty$). Обозначим собственные значения оператора $T+P$ через μ_n, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через u_n — соответствующие им ортонормированные собственные функции.

Поскольку резольвенты $R_\lambda(T)$ и $R_\lambda(T+P)$ операторов T и $T+P$ являются интегральными операторами ([2], с. 219), то, обозначая их ядра через $K_T(x,y,\lambda)$ и $K_{T+P}(x,y,\lambda)$ соответственно, можем доказать утверждение.

Теорема 1. *Положим*

$$\alpha_j(n,x,y) = \frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{T_n} ([K_T \circ P]^j \circ K_T)(x,y,\lambda)d\lambda \quad (j=\overline{1,t}), \tag{1}$$

$$\varphi_t(n,x,y) = \frac{(-1)^{t+1}}{2\pi i}\int_{T_n} ([K_T \circ P]^{t+1} \circ K_{T+P})(x,y,\lambda)d\lambda \quad (t \ge 0),$$

$$(K \circ P \circ Q)(x,y,\lambda) = \int_{-1}^{1} K(x,z,\lambda)p(z)Q(z,y,\lambda)\omega(z)dz,$$

где T_n — замкнутый регулярный контур, охватывающий только собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ и отстоящий от них на расстоянии не менее чем n.

Если $p \in L_\infty$, то

$$\sum_{j=1}^n u_j(x)\overline{u_j(y)} = \sum_{j=1}^n v_j(x)\overline{v_j(y)} + \sum_{j=1}^t \alpha_j(n,x,y) + \varphi_t(n,x,y), \tag{2}$$

$$\Big\| \sum_{j=1}^n u_j(x)\overline{u_j(y)} - \sum_{j=1}^n v_j(x)\overline{v_j(y)} - \alpha_1(n,x,y)\Big\|_{L_q} = O\Big(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\Big), \quad 1 \le q \le 2. \tag{3}$$

Первый из авторов поддержан грантом 192d общеобразовательного фонда Сороса.

Для доказательства потребуются три леммы.

Лемма 1. *Если* $\lambda \in \gamma_n = \left\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda = \frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}\right\}$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i-\lambda|} = O(\frac{\ln n}{n})$.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i-\lambda|} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i-\operatorname{Re}\lambda|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda-\lambda_i} + \frac{1}{n+\frac{2\gamma+1}{2}} + \sum_{i=n+2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i-\operatorname{Re}\lambda} \le$$
$$\le \int_0^n \frac{dx}{\operatorname{Re}\lambda - x^2-2\gamma x} + \frac{1}{n+\frac{2\gamma+1}{2}} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2\gamma x-\operatorname{Re}\lambda} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \quad \square$$

Пусть $\Pi_n = \{\lambda \mid \lambda = \frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2} + (\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}+n)e^{i\varphi},\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi\}$.

Лемма 2. *Если* $\lambda \in \Pi_n$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i-\lambda|} = O(\frac{1}{n^{1/2}})$.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i-\lambda|} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+\lambda_i} + \frac{1}{\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}+n} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2\gamma x-\operatorname{Re}\lambda} = O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right).$$

Лемма 3. *Имеют место асимптотические равенства*

$$v_n(\cos\alpha) = \frac{O(1)\cos[(n+\gamma)\alpha-\gamma\pi/2]}{(\sin\alpha)^{\gamma}}, \quad 0<\alpha<\pi; \tag{4}$$
$$\|v_n\|_{L_q} = O(1), \quad 1 \le q \le 2,$$

где $O(1)$ *— константа, не зависящая от* n.

Доказательство. Для многочленов Гегенбауэра известна ([1], с. 198) равномерная по n и α асимптотика

$$C_n^{\gamma}(\cos\alpha) = \frac{\Gamma(2\gamma+n)}{(\gamma)_{n+1}} \frac{O(1)\cos[(n+\gamma)\alpha-\gamma\pi/2]}{(\sin\alpha)^{\gamma}}, \quad 0<\alpha<\pi.$$

Тогда (4) следует из того, что

$$h_n^{-1/2}\frac{\Gamma(2\gamma+n)}{(\gamma)_{n+1}}O(1) = \left[\frac{(n+\gamma)n!\Gamma(2\gamma+n)}{[\Gamma(\gamma+n+1)]^2}\right]^{1/2} O(1) = \left[\frac{n}{n+\gamma}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+2\gamma/k}{(1+2\gamma/k)^2}\right]^{1/2} O(1) = O(1).$$

Отсюда

$$\|v_n\|_{L_q} = \left(\int_0^{\pi} |v_n(\cos\alpha)|^q (\sin\alpha)^{2\gamma} d\alpha\right)^{1/q} = O(1), \quad 1 \le q \le 2.$$

Доказательство теоремы 1. Выберем в качестве T_n контур, состоящий из отрезка $\gamma(n) = \{\lambda \mid \lambda = \frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2} + ri,\ -\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2} - n \le r \le \frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}+n\}$ и полуокружности Π_n. Такой контур удовлетворяет условию теоремы. А поскольку $\lambda \notin \sigma(T) \cup \sigma(T+P)$, то, используя тождество Гильберта $R_\lambda(T+P) - R_\lambda(T) = -R_\lambda(T)PR_\lambda(T+P)$, получим равенство

$$R_\lambda(T+P) = \sum_{l=0}^{t}(-1)^l [R_\lambda(T)P]^l R_\lambda(T) + (-1)^{t+1}[R_\lambda(T)P]^{t+1}R_\lambda(T+P). \tag{5}$$

Далее, если не указано противное, интегрирование ведется от -1 до 1. Имеем

$$[R_\lambda(T)P]^l R_\lambda(T)v(x) = [R_\lambda(T)P]^{(l-1)} R_\lambda(T) \int p(x) K_T(x,y,\lambda) v(y)\omega(y)dy =$$

$$= [R_\lambda(T)P]^{(l-1)} \int \Big(\int K_T(x,y_1,\lambda) p(y_1) K_T(y_1,y,\lambda)\omega(y_1)dy_1 \Big) v(y)\omega(y)dy = \dots =$$

$$= \int \Big(\int \dots \int K_T(x,y_1,\lambda) p(y_1) K_T(y_1,y_2,\lambda) \dots p(y_l) \cdot$$

$$\cdot K_T(y_l,y,\lambda)\omega(y_1)\dots\omega(y_l)dy_1\dots dy_l \Big) v(y)\omega(y)dy =$$

$$\int \Big(\int \dots \int K_T(x,y_1,\lambda) \dots p(y_{l-1}) (K_T \circ P \circ K_T)(y_{l-1},y,\lambda)\omega(y_1)\dots\omega(y_{l-1})dy_1\dots dy_{l-1} \Big) v(y)\omega(y)dy =$$

$$= \dots = \int ([K_T \circ P]^l \circ K_T)(x,y,\lambda) v(y)\omega(y)dy.$$

Используя полученное выражение для $[R_\lambda(T)P]^l R_\lambda(T)v(x)$ при переходе от операторов в равенстве (5) к их ядрам, будем иметь

$$K_{T+P}(x,y,\lambda) = K_T(x,y,\lambda) + \sum_{l=1}^{t} (-1)^l ([K_T \circ P]^l \circ K_T)(x,y,\lambda) +$$
$$+ (-1)^{t+1} ([K_T \circ P]^{t+1} \circ K_{T+P})(x,y,\lambda). \quad (6)$$

Можно показать, что в любой компактной части комплексной плоскости, не содержащей точек спектра операторов T и $T+P$, имеют место разложения

$$K_T(x,y,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\overline{v_k(y)}}{\lambda_k - \lambda}, \quad K_{T+P}(x,y,\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j(x)\overline{u_j(y)}}{\mu_j - \lambda}.$$

Подставляя их в левую часть равенства (6) и интегрируя по контуру T_n, получим (2).

Докажем (3). Используя разложение для преобразования правой части равенства (6), имеем

$$([K_T \circ P]^l \circ K_T)(x,y,\lambda) = \int \dots \int K_T(x,y_1,\lambda) p(y_1) \dots p(y_l) K_T(y_l,y,\lambda)\omega(y_1)\dots\omega(y_l)dy_1\dots dy_l =$$

$$= \int \dots \int \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\overline{v_k(y_1)}}{\lambda_k - \lambda} p(y_1) K_T(y_1,y_2,\lambda) \dots K_T(y_{l-1},y_l,\lambda) p(y_l) \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j(y_l)\overline{v_j(y)}}{\lambda_j - \lambda} \omega(y_1)\dots\omega(y_l)dy_1\dots dy_l =$$

$$= \dots = \sum_{k,j} \frac{v_k(x) \int \overline{v_k(y_1)} p(y_1) [R_\lambda(T)P]^{l-1} v_j(y_1)\omega(y_1)dy_1 \overline{v_j(y)}}{(\lambda_k - \lambda)(\lambda_j - \lambda)} =$$

$$= \sum_{k,j} \frac{v_k(x) (P[R_\lambda(T)P]^{l-1} v_j, v_k) \overline{v_j(y)}}{(\lambda_k - \lambda)(\lambda_j - \lambda)}. \quad (7)$$

Подставим найденное выражение вместо $([K_T \circ P]^l \circ K_T)(x,y,\lambda)$ в (6). Получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j(x)\overline{u_j(y)}}{\mu_j - \lambda} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\overline{v_k(y)}}{\lambda_k - \lambda} = \sum_{l=1}^{t} (-1)^l \sum_{k,j} \frac{v_k(x)(P[R_\lambda(T)P]^{l-1} v_j, v_k)\overline{v_j(y)}}{(\lambda_k - \lambda)(\lambda_j - \lambda)} +$$

$$(-1)^{t+1} \sum_{k,j} \frac{v_k(x)(P[R_\lambda(T)P]^t u_j, v_k)\overline{u_j(y)}}{(\lambda_k - \lambda)(\mu_j - \lambda)}.$$

Далее, используя обобщенное неравенство Минковского ([3], с. 178), из (1) и (7) найдем

$$\|\alpha_l(n,x,y)\|_{L_q} = \left\| \frac{(-1)^l}{2\pi i} \int_{T_n} \sum_{k,j} \frac{v_k(x)(P[R_\lambda(T)P]^{l-1}v_j, v_k)\overline{v_j(y)}}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_j)} d\lambda \right\|_{L_q} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int\!\!\int \left| \int_{T_n} \sum_{k,j} \frac{v_k(x)(P[R_\lambda(T)P]^{l-1}v_j, v_k)\overline{v_j(y)}}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_j)} d\lambda \right|^q \omega(x)\omega(y)dx\,dy \right]^{1/q} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \sum_{k,j} \left[\int\!\!\int \left(\int_{T_n} \left| \frac{v_k(x)(P[R_\lambda(T)P]^{l-1}v_j, v_k)\overline{v_j(y)}}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_j)} \right| d\lambda \right)^q \omega(x)dx\,\omega(y)dy \right]^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k,j} \|v_k\|_{L_q} \|v_j\|_{L_q} \left(\int_{T_n} \frac{|(P[R_\lambda(T)P]^{l-1}v_j, v_k)|}{|\lambda-\lambda_k|\,|\lambda-\lambda_j|} d\lambda \right)^{q\frac{1}{q}} =$$

$$= O(1) \int_{T_n} \sum_{k,j} \frac{|(P[R_\lambda(T)P]^{l-1}v_j, v_k)|}{|\lambda-\lambda_k|\,|\lambda-\lambda_j|} d\lambda = O(1) \int_{T_n} \sum_{k,j} \frac{\|P\|^l \|R_\lambda(T)\|^{l-1} \|v_j\|_{L_2} \|v_k\|_{L_2}}{|\lambda-\lambda_k|\,|\lambda-\lambda_j|} d\lambda =$$

$$= O(1)\|P\|^l \int_{T_n} \|R_\lambda(T)\|^{l-1} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda-\lambda_k|\,|\lambda-\lambda_j|} d\lambda = O(1)\|P\|^l \left(\int_{\Pi_n} + \int_{\gamma(n)} \right) \|R_\lambda(T)\|^{l-1} O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) d\lambda.$$

Здесь мы перешли от интеграла по контуру к криволинейному интегралу 1-го рода по кривой T_n. Продолжим преобразование, учитывая, что P — ограниченный оператор, $\|R_\lambda(T)\| \le 1/\rho(\lambda, \sigma(T))$ где $\rho(\lambda, \sigma(T))$ — расстояние от λ до спектра оператора T ([4], с. 367),

$$\|P\|^l O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) \left(\int_{\Pi_n} + \int_{\gamma(n)} \right) \|R_\lambda(T)\|^{l-1} d\lambda = O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) \left(\int_{\Pi_n} + \int_{\gamma(n)} \right) \frac{d\lambda}{n^{l-1}} =$$

$$= O\left(\frac{\ln n}{n^{3/2}}\right) \frac{(\pi+2)(n^2+2n+2n\gamma+\gamma+1/2)}{n^{l-1}} = O\left(\frac{\ln n}{n^{l-3/2}}\right).$$

Отсюда видно, что если $l \ge 2$, то $\|\alpha_l(n,x,y)\|_{L_q} \to 0$ при $n \to \infty$. Далее

$$\|\varphi_t(n,x,y)\|_{L_q} = \left\| \sum_{l=t+1}^{\infty} \alpha_l(n,x,y) \right\|_{L_q} \le \sum_{l=t+1}^{\infty} \|\alpha_l(n,x,y)\|_{L_q} = O(\ln n) \sum_{l=t+1}^{\infty} \frac{1}{n^{l-3/2}} = O\left(\frac{1}{n^{t-1/2}}\right).$$

Таким образом, если $t \ge 1$ (при этом $l \ge 2$), то $\|\varphi_t(n,x,y)\|_{L_q} \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь из (2) имеем

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} u_j(x)\overline{u_j(y)} - \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\overline{v_j(y)} - \alpha_1(n,x,y) \right\|_{L_q} \le \|\alpha_2(n,x,y)\|_{L_q} + \|\varphi_2(n,x,y)\|_{L_q} = O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right). \quad \square$$

Замечание. Аналогичная теорема была получена в работе [5] (с дискретным положительным псевдодифференциальным порядка m ($m > 1$) оператором T и требованием гладкости функции p).

Накладывая на p более жесткие условия, усилим вторую часть доказанного утверждения.

Теорема 2. *Если $p \in D$ и $p(-1) = p(1) = 0$, то*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} u_j(x)\overline{u_j(y)} - \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\overline{v_j(y)} \right\|_{L_q} = O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right), \quad 1 \le q \le 2.$$

Доказательство. Имеем

$$\left[\int\int |v_k(x)(Pv_j,v_k)\overline{v_j(y)}|^q\omega(x)\omega(y)dxdy\right]^{1/q} \le |(Pv_j,v_k)|\,\|v_k\|_{L_q}\|v_j\|_{L_q} = O(1)|(Pv_j,v_k)| =$$

$$= O(1)\left|\left(\int_0^\varepsilon + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi\right)p(\cos\alpha)v_j(\cos\alpha)v_k(\cos\alpha)(\sin\alpha)^{2\gamma}d\alpha\right| +$$

$$+ O(1)\left|\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} p(\cos\alpha)v_j(\cos\alpha)v_k(\cos\alpha)(\sin\alpha)^{2\gamma}d\alpha\right| = I_1 + I_2.$$

Из оценки $(\sin\alpha)^\gamma|C_n^\gamma(\cos\alpha)| < \left(\frac{n}{2}\right)^{\gamma-1}[\Gamma(\gamma)]^{-1}$, $0 \le \alpha \le \pi$ ([1], с. 205) аналогично лемме 3 получим $|v_n(\cos\alpha)| = \frac{O(n^\gamma)}{(\sin\alpha)^\gamma}$. Отсюда

$$I_1 = \left|O(k^\gamma j^\gamma)\left(\int_0^\varepsilon + \int_{\pi-\varepsilon}^\pi\right)p(\cos\alpha)d\alpha\right| = O(k^\gamma j^\gamma\varepsilon^2) = O((k+j)^{-2}).$$

Здесь $p(\cos\alpha)$ вблизи $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ ведет себя как $\sin\alpha$ и взято $\varepsilon = (kj)^{-\gamma/2}(k+j)^{-1}$.

Далее, используя асимптотику (4), найдем

$$I_2 = O(1)\left|\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} p(\cos\alpha)\cos[(j+\gamma)\alpha - \gamma\pi/2]\cos[(k+\gamma)\alpha - \gamma\pi/2]d\alpha\right| =$$

$$= O(1)\left|\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} p(\cos\alpha)\cos[(k+j+2\gamma)\alpha - \gamma\pi]d\alpha + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} p(\cos\alpha)\cos[(k-j)\alpha]d\alpha\right| =$$

$$= \frac{O(1)}{k+j+2\gamma} + \frac{O(1)}{k+j+2\gamma}\left|\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} p'(\cos\alpha)\sin[(k+j+2\gamma)\alpha - \gamma\pi]d\alpha\right| +$$

$$+ \frac{O(1)}{|k-j|} + \frac{O(1)}{|k-j|}\left|\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} p'(\cos\alpha)\sin[(k-j)\alpha]d\alpha\right| = \frac{O(1)}{|k-j|}.$$

Так как условие теоремы 1 выполняется, то достаточно оценить $\|\alpha_1(n,x,y)\|_{L_q}$. Из (1) и (7), обозначая $v_k(x)(Pv_j,v_k)\overline{v_j(y)}$ через q_{kj}, имеем

$$\|\alpha_1(n,x,y)\|_{L_q} = \left[\int\int\left|\frac{-1}{2\pi i}\int_{T_n}\sum_{k,j}\frac{q_{kj}}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_j)}d\lambda\right|^q\omega(x)\omega(y)dx\,dy\right]^{1/q} =$$

$$= \left[\int\int\left|\left[\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n + \sum_{k=n+1}^\infty\sum_{j=1}^n + \sum_{k=1}^n\sum_{j=n+1}^\infty + \sum_{k=n+1}^\infty\sum_{j=n+1}^\infty\right]\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\left[\frac{q_{kj}}{2\pi i}\int_{T_n}\frac{d\lambda}{(\lambda-\lambda_k)(\lambda-\lambda_j)}\right]\right|^q\omega(x)\omega(y)dx\,dy\right]^{1/q} =$$

$$= \left[\int\int\left|\left[\sum_{k=n+1}^\infty\sum_{j=1}^n\frac{q_{kj}}{\lambda_j-\lambda_k} + \sum_{k=1}^n\sum_{j=n+1}^\infty\frac{q_{kj}}{\lambda_k-\lambda_j}\right]\right|^q\omega(x)\omega(y)dx\,dy\right]^{1/q} \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^\infty\sum_{j=1}^n\frac{[\int\int|q_{kj}|^q\omega(x)\omega(y)dx\,dy]^{1/q} + [\int\int|q_{jk}|^q\omega(x)\omega(y)dx\,dy]^{1/q}}{\lambda_k-\lambda_j} = \sum_{k=n+1}^\infty\sum_{j=1}^n\frac{O(1)}{(k-j)(\lambda_k-\lambda_j)} =$$

$$= O(1)\sum_{k=n+1}^\infty\int_0^n\frac{dx}{(k-x)^2(k+x)} = O(1)\int_n^\infty\frac{\ln x\,dx}{x^2} + \frac{O(1)n}{(n+1)^2} + O(1)n\int_{n+1}^\infty\frac{dx}{x^2(x-n)} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Таким образом,

$$\left\|\sum_{j=1}^n u_j(x)\overline{u_j(y)} - \sum_{j=1}^n v_j(x)\overline{v_j(y)}\right\|_{L_q} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) + O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right) = O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right). \quad \square$$

Следствие. Если $p \in D$ и $p(-1) = p(1) = 0$, то

$$\left|\sum_{j=1}^{n}[\mu_j - \lambda_j - (Pv_j, v_j)]\right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right).$$

Доказательство. Поскольку по теореме 1 из [6] имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}(Pu_j, u_j) \le \sum_{j=1}^{n} \mu_j - \lambda_j \le \sum_{j=1}^{n}(Pv_j, v_j),$$

то

$$\left|\sum_{j=1}^{n}[\mu_j - \lambda_j - (Pv_j, v_j)]\right| \le \left|\sum_{j=1}^{n}[(Pu_j, u_j) - (Pv_j, v_j)]\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n}\left[\int p(x)u_j(x)\overline{u_j(x)}\omega(x)dx - \int p(x)v_j(x)\overline{v_j(x)}\omega(x)dx\right]\right| \le$$

$$\le \max_{x\in[-1,1]}|p(x)|\left\|\sum_{j=1}^{n}u_j(x)\overline{u_j(x)} - \sum_{j=1}^{n}v_j(x)\overline{v_j(x)}\right\|_{L_1} = O\left(\frac{\ln n}{n^{1/2}}\right).$$

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. – 2-е изд. – М.: Наука, 1974. – 295 с.
2. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
3. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. *Неравенства.* – М.: Ин. лит., 1948. – 456 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Спектральная теория.* – М.: Мир, 1966. – 1063 с.
5. Дубровский В.В., Печенцов А.С. *К асимптотике спектральной функции самосопряженных псевдодифференциальных операторов* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 5. – С. 852–858.
6. Гасымов М.Г. *О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 150. – № 6. – С. 1202–1205.

Магнитогорский государственный
педагогический институт

Поступила
14.07.1997