ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, Н.Г. ШМЕЛЁВА

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

В ([1], с. 69) для области $G \subset \mathrm{R}^2$, звездной относительно начала координат, получена формула

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt, \tag{1}$$

связывающая все регулярные дважды (непрерывно дифференцируемые) в G решения уравнения Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{2}$$

где λ — числовой параметр с гармоническими в G функциями $u_0(x,y)$.

В [2] показано, что имеет место аналог формулы (1) для телеграфного уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda u = 0 \tag{3}$$

и для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с числовым параметром

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0. \tag{4}$$

Там же получена теорема единственности решения задачи Трикоми для уравнения (4) при $\lambda < 0$ и указана идея сведе́ния этой задачи к задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.

В данной работе проверена справедливость интегрального представления решений уравнения (4) с комплексным параметром λ и доказана его обратимость. Для комплексных λ получена теорема единственности решения задачи Трикоми и доказана теорема существования решения задачи Трикоми для уравнения (4) при более слабых ограничениях на граничные данные. Также указаны приложения интегрального представления решений уравнения (4) при решении задачи Франкля и обобщенной задачи Трикоми для этого уравнения.

1. Рассмотрим уравнение (4) в области D, ограниченной ляпуновской кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A{=}(0,0)$ и $B{=}(1,0)$ и характеристиками $AC(x+y=0)$ и $CB(x-y=1)$ уравнения (4) при $y<0$. Пусть область $D_+ = D \cap \{y>0\}$, $D_- = D \cap \{y<0\}$ и D_+ является звездной относительно начала координат.

Лемма 1. *Если функция $u_0(x,y)$ является регулярным в D_- решением уравнения струны*

$$u_{0xx} - u_{0yy} = 0, \tag{5}$$

то функция вида

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}]dt \tag{6}$$

является регулярным в D_- решением телеграфного уравнения (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-97901.

Доказательство. В целях удобства проверки формулы (6) положим $u_0(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, где $\varphi, \psi \in C^2$, и перейдем в характеристические координаты $\xi = x+y$ и $\eta = x-y$. Тогда получим

$$u(x,y) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right) = v(\xi,\eta) =$$

$$= \varphi(\xi) - \int_0^\xi \varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda\eta(\xi-s)}]ds + \psi(\eta) - \int_0^\eta \psi(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda\xi(\eta-t)}]dt.$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{\lambda}{4}\varphi(\xi) - \int_0^\xi \varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}J_0[\sqrt{\lambda\eta(\xi-s)}]ds - \frac{\lambda}{4}\psi(\eta) - \int_0^\eta \psi(t)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}J_0[\sqrt{\lambda\xi(\eta-t)}]dt =$$

$$= -\frac{\lambda}{4}\varphi(\xi) + \frac{\lambda}{4}\int_0^\xi \varphi(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda\eta(\xi-s)}]ds - \frac{\lambda}{4}\psi(\eta) + \frac{\lambda}{4}\int_0^\eta \psi(t)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda\xi(\eta-t)}]dt = -\frac{\lambda}{4}v. \quad \square$$

Под регулярным в D решением уравнения (4) будем понимать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям $u(x,y) \in C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$, $Lu(x,y) \equiv 0$ в $D_+ \cup D_-$.

Теорема 1 ([2]). *Если функция $u_0(x,y)$ в области D является регулярным решением уравнения*

$$u_{0xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{0yy} = 0, \tag{7}$$

то

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2 + \operatorname{sgn} y \cdot y^2)(1-t)}]dt \tag{8}$$

является в области D регулярным решением уравнения (4).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично [2] с использованием леммы 1 и результатов работы [1]. Отметим, что данная теорема доказана в [2] при условии $u(0,0) = 0$.

Заметим, что уравнение (8) однозначно обратимо относительно функции $u_0(x,y)$ в классе функций $C(\overline{D})$. Действительно, равенство (8) перепишем в виде

$$\widetilde{u}(r) = \widetilde{u}_0(r) - \int_0^r \widetilde{u}_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda r(r-s)}]ds, \tag{8_1}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 \operatorname{sgn} y, \quad u(x,y) = u\left(\frac{x}{r}r, \frac{y}{r}r\right) = \widetilde{u}(r), \quad u_0\left(\frac{x}{r}s, \frac{y}{r}s\right) = \widetilde{u}_0(s).$$

Тогда в силу результатов [1], [3] решением уравнения (8_1) является функция вида

$$\widetilde{u}_0(r) = \widetilde{u}(r) + \int_0^r \widetilde{u}(s)\frac{r}{s}\frac{\partial}{\partial r}I_0[\sqrt{\lambda s(r-s)}]ds, \tag{8_2}$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя.

Если функции $\widetilde{u}_0(r)$ и $\widetilde{u}(r)$ непрерывны в $\overline{D}$, то равенства (8_1) и (8_2) являются формулами взаимного обращения [3].

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Если функции $u_0(x,y)$ и $u(x,y)$ непрерывны в $\overline{D}$ и являются соответственно регулярными в D решениями уравнений* (7) *и* (4), *то между ними существует взаимнооднозначное соответствие, которое устанавливается по формулам* (8_1) *и* (8_2).

Рассмотрим в области D задачу Трикоми для уравнения (4).

Задача T. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{9}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{10}$$

$$u(x,y)\big|_\Gamma = u(x(s), y(s)) = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \tag{11}$$

$x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, s — длина дуги, отсчитываемая от точки B, l — длина кривой Γ;

$$u(x,y)\big|_{AC} = u(x, -x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2, \tag{12}$$

где $\varphi(l) = \psi(0)$, $\varphi(s)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Интегральное представление (8) позволяет свести решение задачи Трикоми для уравнения (4) в области D с краевыми данными $u = \varphi$ на Γ и $u = \psi$ на AC к решению задачи Трикоми для уравнения (7) в области D с краевыми условиями $u_0 = \varphi_0$ на Γ и $u_0 = \psi_0$ на AC.

Действительно, прежде всего заметим, что $u(x, y) = u_0(x, y)$ на $AC(x + y = 0)$, поэтому $\psi_0(x) = \psi(x)$. Для нахождения функции $\varphi_0(s)$ в области D_+ функцию $u_0(x, y)$ определим как решение задачи Хольмгрена для уравнения Лапласа с граничными условиями

$$u_0(x,y)\big|_\Gamma = u_0(x(s), y(s)) = \varphi_0(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$
$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \nu_0(x), \quad 0 < x < 1.$$

Методом Грина решение этой задачи выписывается в явном виде ([4], гл. 4; [5])

$$u_0(x,y) = \int_0^1 \nu_0(\xi) G(\xi, 0; x, y) d\xi + \int_0^l \varphi_0(s) \frac{\partial G(\xi(s), \eta(s); x, y)}{\partial N} ds, \tag{13}$$

где $G(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина задачи Хольмгрена, а функция $\nu_0(x)$ определяется соотношением

$$\nu_0(x) = F(x) + \int_0^1 F(t) R(t, x) dt, \tag{14}$$

где $R(t, x)$ — резольвента известного ядра интегрального уравнения типа Фредгольма,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \varphi_0(s) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial N} G[\xi(s), \eta(s); x, 0] ds - \frac{1}{2} \psi_0'\left(\frac{x}{2}\right). \tag{15}$$

Как видим, функция $\nu_0(x)$ определяется через функции $\varphi_0(s)$ и $\psi_0(x)$. Но функция $\psi_0(x)$ известна и равна $\psi(x)$.

Подставляя (15) в (14), а последнее — в (13), получим

$$u_0(x,y) = \int_\Gamma \varphi_0(s) K(s; x, y) ds + f(x,y), \tag{16}$$

$$K(s;x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 G(\theta, 0; x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial N} G[\xi(s), \eta(s); \theta, 0] d\theta +$$
$$+ \int_0^1 G(\theta, 0; x, y) \int_0^1 R(t, \theta) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial N} G[\xi(s), \eta(s); t, 0] dt\, d\theta,$$
$$f(x,y) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \psi_0'\left(\frac{\theta}{2}\right) G(\theta, 0; x, y) d\theta - \frac{1}{4\pi} \int_0^1 G(\theta, 0; x, y) \int_0^1 \psi_0'\left(\frac{t}{2}\right) R\, dt\, d\theta.$$

Функцию $u_0(x,y)$, заданную формулой (16), подставим в интегральное слагаемое формулы (8). Тогда имеем

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^l \varphi_0(s) \int_0^1 K(s;xt,yt) \frac{\partial}{\partial t} J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt\,ds - \\ - \int_0^1 f(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t} J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt. \quad (17)$$

Переходя в (17) к пределу при $(x,y) \to (x(s),y(s)) \in \Gamma$, получим интегральное уравнение относительно функции

$$\varphi_0(s) - \int_0^l \varphi_0(\tau) H(\tau,s)d\tau = g(s), \quad (18)$$

где

$$H(\tau,s) = \int_0^1 K(\tau; x(s)t, y(s)t)\frac{\partial}{\partial t} J_0[\sqrt{\lambda[x^2(s)+y^2(s)](1-t)}]dt,$$
$$g(s) = \varphi(s) + \int_0^1 f[x(s)t,y(s)t]\frac{\partial}{\partial t} J_0[\sqrt{\lambda[x^2(s)+y^2(s)](1-t)}]dt.$$

Если функция $\varphi(s)$ непрерывна на $[0,l]$ и в достаточно малой окрестности точек $s=0$ и $s=l$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha \in [\frac{1}{2},1]$, $\psi(x) \in C^1[0,\frac{1}{2}] \cap C^2(0,\frac{1}{2})$, $\psi''(x) \in L_2[0,1]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=0$, то (18) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Разрешимость его вытекает из теоремы 2 и следующих утверждений единственности решения задачи Трикоми для уравнения (4).

Теорема 3. *Если существует решение задачи* (9)–(12) *для уравнения* (4), *то оно единственно при всех комплексных* λ, *удовлетворяющих условиям*

$$|\operatorname{Im}\lambda| < \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{t_2-t_1}\right)^2 + \sqrt{2}\operatorname{Re}\lambda \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\lambda < 0; \quad (19)$$

$$|\operatorname{Im}\lambda| < \sqrt{2}\,\frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{t_2-t_1}\right)^2 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0, \quad (20)$$

где $t_2 = \max\limits_{\overline{D}} 2y$, $t_1 = \min\limits_{\overline{D}} 2y$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} u(x,y) = u_1$, $\operatorname{Im} u(x,y) = u_2$, $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda$. Тогда задача (9)–(12) равносильна задаче Трикоми для системы

$$U_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot U_{yy} + CU = 0,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}\lambda & \operatorname{Im}\lambda \\ -\operatorname{Im}\lambda & -\operatorname{Re}\lambda \end{pmatrix}, \quad U = (u_1,u_2).$$

Теперь, применяя принцип максимума модуля решений систем уравнений смешанного типа [6], получим условия (19) и (20) относительно параметра λ. При выполнении условий (19), (20) и $u=0$ на AC следует, что $\max\limits_{\overline{D}}|U|$ достигается на кривой Γ. Отсюда уже следует единственность решения задачи (9)–(12) для уравнения (4). Более полное доказательство этой теоремы приведено в ([7], гл. 3, § 5). □

Теорема 4. *Если существует решение задачи* (9)–(12) *для уравнения* (4), *то оно единственно при всех комплексных* λ, *удовлетворяющих условию*

$$|\lambda| < 2\alpha_0 - \operatorname{Re}\lambda, \quad \alpha_0 = \frac{4}{9\operatorname{mes} D_+}. \quad (21)$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Если* $u(x,y)=0$ *на* AC, $a=|\mu_2|$, *то для любого регулярного в области* D *решения уравнения* (4) *имеет место равенство*

$$\operatorname{Re}\int_0^1 \overline{u}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} e^{-2ax}dx \geq 0, \tag{22}$$

где $\mu^2=\lambda$, $\mu=\mu_1+i\mu_2$.

Доказательство. Предварительно для уравнения (4) в области D_- построим решение задачи Дарбу с краевыми условиями $u(x,0)=\tau(x)$, $0\leq x\leq 1$, $u(x,-x)=0$, $0\leq x\leq \frac{1}{2}$, $\tau(0)=0$.

Решение этой задачи построено [8] в явном виде

$$u(x,y)=\tau(x+y)+y\sqrt{\lambda}\int_0^{x+y}\frac{J_1\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)}\tau(t)}{\sqrt{(x+y-t)(x-y-t)}}dt, \tag{23}$$

где $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода, $\sqrt{\lambda}>0$ при $\lambda>0$. Используя (23), вычислим

$$u_y(x,0-0)=\nu(x)=\tau'(x)+\mu\int_0^x \tau(t)\frac{J_1[\mu(x-t)]}{(x-t)}dt. \tag{24}$$

Продолжив функцию $\tau(x)=0$ при $x\geq 1$, равенству (24) придадим несколько иной вид. Воспользовавшись формулой преобразования Лапласа свертки ([9], с. 504) для

$$\int_0^x \mu\tau(x)\frac{J_1[\mu(x-t)]}{x-t}dt,$$

получим

$$\nu(x)=\tau'(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(\sqrt{p^2+\mu^2}-p)\overline{\tau}(p)\exp(px)dp, \tag{25}$$

где $\operatorname{Re}p\geq|\operatorname{Im}\mu|$, $a\geq|\operatorname{Im}\mu|$, $\tau(x)=\tau_1(x)+i\tau_2(x)$, $\overline{\tau}(x)=\tau_1(x)-i\tau_2(x)$. Тогда аналогично ([10], с. 15) на основании равенства (25) рассмотрим интеграл

$$I=\int_0^1\overline{\tau}(x)\nu(x)e^{-2ax}dx=\int_0^1\overline{\tau}(x)\tau'(x)e^{-2ax}dx+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\overline{\tau}(x)\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(\sqrt{p^2+\mu^2}-p)\overline{\tau}(p)e^{px}dp\,e^{-2ax}dx=I_1+I_2. \tag{26}$$

В силу того, что $\tau(0)=\tau(1)=0$,

$$I_1=-\int_0^1\overline{\tau}'(x)\tau(x)e^{-2ax}dx+2a\int_0^1|\tau(x)|^2e^{-2ax}dx. \tag{27}$$

Из этого равенства следует

$$\operatorname{Re}I_1=a\int_0^1|\tau(x)|^2e^{-2ax}dx.$$

Используя равенство Парсеваля для преобразования Лапласа и тот факт, что $\tau(x)=0$ при $x\geq 1$, последний интеграл перепишем в виде

$$\operatorname{Re}I_1=a\int_0^\infty|\tau(x)|^2e^{-2ax}dx=\frac{a}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}|\overline{\tau}(p)|^2dp. \tag{28}$$

Далее, снова на основании равенства Парсеваля для преобразования Лапласа интеграл I_2 преобразуем к виду

$$I_2=\int_0^\infty\overline{\tau}(x)\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}(\sqrt{p^2+\mu^2}-p)\widetilde{\tau}(p)e^{px}dp\,e^{-2ax}dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}|\overline{\tau}|^2(\sqrt{p^2+\mu^2}-p)dp. \tag{29}$$

Подставляя (27) и (29) в равенство (26), с учетом (28) получим

$$\operatorname{Re} I = \operatorname{Re} I_1 + \operatorname{Re} I_2 = \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}|\overline{\tau}(p)|^2(\sqrt{p^2+\mu^2}-p+a)dp =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}|\overline{\tau}(p)|^2\operatorname{Re}(\sqrt{p^2+\mu^2}-p+a)dp.$$

Отсюда $\operatorname{Re} I \geq 0$, если $\operatorname{Re}(\sqrt{p^2+\mu^2}-p+a) \geq 0$. Последнее выражение имеет место тогда, когда $\operatorname{Re}\sqrt{p^2+\mu^2} \geq 0$, а это возможно при $a = |\mu_2|$. $\square$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4. В области D_+ рассмотрим уравнение (4) и введем вспомогательную функцию $u = v\exp ax$. Тогда уравнение (4) при $y > 0$ преобразуется к виду

$$Mv = v_{xx} + v_{yy} + 2av_x + (a^2+\lambda)v = 0.$$

Рассмотрим в области D_+ тождество $\overline{v}Mv = 0$. Интегрируя его и применяя формулу Грина, получим

$$\int_{D_+}\overline{v}Mv\,dx\,dy = \int_{\partial D_+}(-\overline{v}v_y dx + \overline{v}v_x dy) - \int_{D_+}(\overline{v}_x v_x + \overline{v}_y v_y)dx\,dy +$$
$$+ 2a\int_{D_+}\overline{v}v_x dx\,dy + (a^2+\lambda)\int_{D_+}|v|^2 dx\,dy = 0.$$

Отсюда с учетом граничного условия $v\big|_\Gamma = 0$ имеем

$$-\int_{AB}\overline{v}v_{y|y=0}dx - \int_{D_+}|\nabla v|^2 dx\,dy + 2a\int_{D_+}\overline{v}v_x dx\,dy + (a^2+\lambda)\int_{D_+}|v|^2 dx\,dy = 0.$$

У полученного равенства выделим реальную часть

$$\operatorname{Re}\int_{AB}\overline{v}v_{y|y=0}dx + \int_{D_+}|\nabla v|^2 dxdy - 2a\operatorname{Re}\int_{D_+}\overline{v}v_x dx\,dy - \operatorname{Re}(a^2+\lambda)\int_{D_+}|v|^2 dx\,dy = 0. \quad (30)$$

Поскольку

$$2\operatorname{Re}\int_{D_+}\overline{v}v_x dx\,dy = \int_{D_+}\frac{\partial}{\partial x}|v|^2 dx\,dy = \int_{\partial D_+}|v|^2 dy = \int_{AB}|v|^2 dy = 0,$$

то равенство (30) примет вид

$$\int_{D_+}|\nabla v|^2 dx\,dy - \operatorname{Re}(a^2+\lambda)\int_{D_+}|v|^2 dx\,dy + \operatorname{Re}\int_{AB}\overline{v}v_{y|y=0}dx = 0. \quad (31)$$

Если $\operatorname{Re}(a^2+\lambda) \leq 0$, то из равенства (31) на основании леммы 2 следует, что $|\nabla v| \equiv 0$ в D_+, поэтому $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_+$. Тогда в силу единственности решения задачи Коши или Дарбу для уравнения (4) при $y < 0$ вытекает $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_-$.

Если $\operatorname{Re}(a^2+\lambda) \geq 0$, то из равенства (31) получим

$$\int_{D_+}|\nabla v|^2 dx\,dy \leq (a^2 + \operatorname{Re}\lambda)\int_{D_+}|v|^2 dx\,dy. \quad (32)$$

С другой стороны, в силу аналога неравенства Пуанкаре–Фридрихса ([11], с. 307; [12], с. 71)

$$\int_{D_+}|v|^2 dx\,dy \leq \frac{9}{4}\operatorname{mes} D_+\int_{D_+}|\nabla v|^2 dx\,dy. \quad (33)$$

Тогда из (32) и (33) будем иметь

$$\int_{D_+}|\nabla v|^2 dx\,dy \leq (a^2 + \operatorname{Re}\lambda)\frac{9}{4}\operatorname{mes} D_+\int_{D_+}|\nabla v|^2 dx\,dy.$$

Отсюда $v(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}_+$ при выполнении условия (21). Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Заметим, что теоремы 3 и 4 верны без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Г. Из доказанных теорем 1–4 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Если функция $\varphi(s)$ непрерывна на $[0,l]$ и в достаточно малой окрестности точек $s=0$ и $s=l$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha\in[1/2,1]$, $\psi(x)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)$, $\psi''(x)\in L_2[0,1/2]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=\psi(0)=0$ и коэффициент λ удовлетворяет условиям теоремы* 3 *или* 4, *то существует единственное решение задачи* (9)–(12).

Формулу (8) можно использовать и при решении задачи Геллерстедта для уравнения (4) с граничными данными при $y<0$ на кусках характеристик $x\pm y=0$ для уравнения (4) и задачи Трикоми с двумя линиями изменения типа для уравнения

$$\operatorname{sgn} x\cdot u_{xx}+\operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}+\lambda u=0.$$

2. Рассмотрим уравнение (4) в области H, ограниченной отрезком AA_1 оси $x=0$, $|y|<1$, характеристикой $A'B$ уравнения (4), $A'=(0,-1)$, $B=(1,0)$ и кривой Г из класса Ляпунова с концами в точках B и $A=(0,1)$, лежащей в первой четверти. Пусть $H_0=H\cap\{y>0\}$, $H_1=H\cap\{-x<y<0,x>0\}$, $H_2=H\cap\{y<-x\}$, $O=(0,0)$, $P=({}^1/_2,-{}^1/_2)$, l — длина кривой Г.

Задача Франкля. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y)\in C(\overline{H})\cap C^1(H\cup OA\cup OA'\setminus OP)\cap C^2(H_0\cup H_1\cup H_2); \tag{34}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in H_0\cup H_1\cup H_2; \tag{35}$$

$$u(x,y)\big|_{\Gamma}=u(x(s),y(s))=\varphi(s),\quad 0\le s\le l; \tag{36}$$

$$u(0,y)-u(0,-y)=f(y),\quad 0\le y\le 1; \tag{37}$$

$$u_x(0,y)=0,\quad 0<|y|<1, \tag{38}$$

где $\varphi(s)$ и $f(y)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Лемма 3. *Если функция $u_0(x,y)$ является регулярным в области H решением уравнения* (7), *то функция*

$$u(x,y)=\begin{cases}u_0(x,y)-\int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2+y^2)(1-t)}]dt, & (x,y)\in H_0;\\ u_0(x,y)-\int\limits_0^1 u_0(xt,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda|x^2-y^2|(1-t)}]dt, & (x,y)\in H_1\cup H_2,\end{cases} \tag{39}$$

является регулярным в H решением уравнения (4).

Справедливость этой леммы следует из леммы 1 и теоремы 1.

Формула (39) позволяет свести решение задачи (34)–(38) для уравнения (4) в области H с краевыми условиями $u=\varphi$ на Г и $u(0,y)-u(0,-y)=f(y)$, $0\le y\le 1$, к решению задачи Франкля для уравнения (7) в области H с краевыми условиями $u_0=\varphi_0$ на Г и $u_0(0,y)-u_0(0,-y)=f_0(y)$, $0\le y\le 1$.

Действительно, пусть $u_0(x,y)$ — решение задачи Франкля для уравнения (7) с отмеченными выше граничными условиями. Тогда из формулы (39) имеем

$$u(0,y)=u_0(0,y)-\int_0^1 u_0(0,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[y\sqrt{\lambda(1-t)}]dt,\qquad y\ge 0;$$

$$u(0,y)=u_0(0,y)-\int_0^1 u_0(0,yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[-y\sqrt{\lambda(1-t)}]dt,\quad y\le 0,$$

или

$$u(0,-y)=u_0(0,-y)-\int_0^1 u_0(0,-yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[y\sqrt{\lambda(1-t)}]dt,\quad y\ge 0.$$

Отсюда с учетом условия (37) получим

$$f(y)=u(0,y)-u(0,-y)=u_0(0,y)-u_0(0,-y)-$$
$$-\int_0^1[u_0(0,yt)-u_0(0,-yt)]\frac{\partial}{\partial t}J_0[y\sqrt{\lambda(1-t)}]dt=$$
$$=f_0(y)-\int_0^1 f_0(yt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[y\sqrt{\lambda(1-t)}]dt=f_0(y)-\int_0^y f_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda y(y-s)}]ds.$$

Обращая последнее интегральное уравнение по теореме 1 [3], найдем функцию

$$f_0(y)=f(y)+\int_0^y f(s)\frac{y}{s}\frac{\partial}{\partial y}I_0[\sqrt{\lambda s(y-s)}]ds,$$

которая имеет ту же гладкость, что и функция $f(y)$.

Для нахождения функции $\varphi_0(s)$ поступим так. В области H_0 выпишем методом Грина решение $u_0(x,y)$ задачи Хольмгрена для уравнения Лапласа аналогично тому, как было показано в п. 1, и подставим его в интегральный член формулы (39) при $y>0$. Затем, переходя к пределу при $(x,y)\to(x(s),y(s))\in\Gamma$, получим интегральное уравнение относительно $\varphi_0(s)$, к которому при известных условиях на функции $\varphi(s)$ и $f(y)$ ([4], с. 340; [13], гл. 8) применима теория Фредгольма.

3. Рассмотрим телеграфное уравнение (3) в области D_-^k, ограниченной отрезками AB $(y=0)$, AC $(y=-kx,\ 0<k\le 1)$ и CB $(x-y=1)$, и поставим задачи Дарбу.

Задача D_1. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y)\in C(\overline{D}_-^k)\cap C^2(D_-^k); \tag{40}$$

$$u_{xx}-u_{yy}+\lambda u\equiv 0,\quad (x,y)\in D_-^k; \tag{41}$$

$$u(x,y)\big|_{y=-kx}=\psi(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{1+k}; \tag{42}$$

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\tau(x),\quad 0\le x\le 1. \tag{43}$$

Задача D_2. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (40)–(42) и, кроме того,

$$u_y(x,0)=\nu(x),\quad 0<x<1,$$

где $\psi(x)$, $\tau(x)$, $\nu(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Обозначим через $u_0(x,y)$ решения задач D_1 и D_2 для уравнения (41) при $\lambda=0$ и через $\psi_0(x)$, $\tau_0(x)$, $\nu_0(x)$ — соответствующие граничные функции. Тогда справедлива

Лемма 4. *Если $\tau_0(x)\in C[0,1]\cap C^1[0,1)\cap C^2(0,1)$, $\psi_0(x)\in C[0,\frac{1}{1+k}]\cap C^1[0,\frac{1}{1+k})\cap C^2(0,\frac{1}{1+k})$, $\tau_0(0)=\psi_0(0)=0$, функции $\tau_0''(x\alpha^n)\alpha^n$ и $\psi_0''(x\alpha^n)\alpha^n$ ограничены по n при любом фиксированном x, то функция*

$$u_0(x,y)=\tau_0(x+y)-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\psi_0\left[(1+\alpha)\alpha^n\frac{x+y}{2}\right]-\right.$$
$$\left.-\psi_0\left[(1+\alpha)\alpha^n\frac{x-y}{2}\right]-\tau_0[\alpha^{n+1}(x+y)]+\tau_0[\alpha^{n+1}(x-y)]\right\}, \tag{44}$$

где $\alpha=(1-k)/(1+k)$, является решением задачи (40)–(43) при $\lambda=0$.

Если $\nu_0(x) \in C[0,1) \cap C^1(0,1) \cap L_1[0,1]$, функция $\nu_0'(x\alpha^n)\alpha^n$ ограничена по n при любом фиксированном x, а функция $\psi_0(x)$ удовлетворяет отмеченным выше условиям, то функция

$$u_0(x,y) = \int_0^{x+y} \nu_0(t)dt + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big\{\psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n\frac{x+y}{2}\Big] + \\ + \psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n\frac{x-y}{2}\Big] - \int_0^{(x+y)\alpha^{n+1}} \nu_0(t)dt - \int_0^{(x-y)\alpha^{n+1}} \nu_0(t)dt\Big\} \quad (45)$$

является решением задачи D_2 для уравнения струны.

Отметим, что формула (44) при $\psi_0(x) \equiv 0$ приведена в ([10], с. 53), и доказательство леммы проводится аналогично этой работе.

В силу формул (44) и (45) лемма 1 позволяет решение задач D_1 и D_2 для уравнения (3) свести к решению задач D_1 и D_2 для уравнения струны.

Действительно, пусть $u_0(x,y)$ — решение задачи D_1 в области D_-^k для уравнения струны (5). Тогда функция $u_0(x,y)$ выражается формулой (44). Подставляя $u_0(x,y)$ в интегральный член формулы (6), получим

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int_0^1 \Big\{\tau_0(xt+yt) - \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n t\frac{x+y}{2}\Big] - \\ - \psi_0\Big[(1+\alpha)\alpha^n t\frac{x-y}{2}\Big] - \tau_0[\alpha^{n+1}t(x+y)] + \tau_0[\alpha^{n+1}t(x-y)]\Big\}\Big\}\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)(1-t)}]dt. \quad (46)$$

Полагая в (46) $y = -kx$, будем иметь

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int_0^1 \psi_0(xt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda(1-k^2)x^2(1-t)}]dt$$

или

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int_0^x \psi_0(s)\frac{\partial}{\partial s}J_0[\sqrt{\lambda(1-k^2)x(x-s)}]ds. \quad (47)$$

Обращая интегральное уравнение (47) по теореме 1 [3], находим неизвестную функцию

$$\psi_0(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial t}I_0[\sqrt{\lambda(1-k^2)t(x-t)}]dt, \quad (48)$$

которая обладает той же гладкостью, что и функция $\psi(x)$.

Из формулы (46) при $y = 0$ получим интегральное уравнение относительно функции $\tau_0(x)$

$$\tau(x) = \tau_0(x) - \int_0^1 \tau_0(xt)\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda x^2(1-t)}]dt,$$

решением которого является функция

$$\tau_0(x) = \tau(x) + \int_0^x \tau(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}I_0[\sqrt{\lambda t(x-t)}]dt. \quad (49)$$

Итак, если функции $\psi(x)$ и $\tau(x)$ обладают отмеченными в лемме 4 свойствами функций $\psi_0(x)$ и $\tau_0(x)$, которые определены формулами (48) и (49), то $\psi_0(x)$ и $\tau_0(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4. Тогда формула (6), где $u_0(x,y)$ задана формулой (44), а функции $\psi_0(x)$ и $\tau_0(x)$ определены соответственно формулами (48) и (49), определяет решение задачи (40)–(43).

В случае задачи D_2 аналогично находится функция $\psi_0(x)$ по формуле (48), а $\nu_0(x)$ определяется как решение интегрального уравнения

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \int_0^1 \nu_0(xt)t\frac{\partial}{\partial t}J_0[\sqrt{\lambda x^2(1-t)}]dt,$$

к которому также применима теорема 1 [3].

Поэтому формула (6), в которой $u_0(x,y)$ определена формулой (45), $\psi_0(x)$ задана равенством (48), функция $\nu_0(x)$ находится по формуле

$$\nu_0(x) = \nu(x) + \int_0^x \nu(s)\frac{\partial}{\partial x} I_0[\sqrt{\lambda s(x-s)}]ds,$$

определяет решение задачи D_2 для телеграфного уравнения (3) в области D^k_-.

Отметим, что на основании этих результатов аналогично п. 1 можно свести обобщенную задачу Трикоми для уравнения (4) в области D, где область гиперболичности совпадает с D^k_-, с граничными условиями $u = \varphi$ на Γ и $u = \psi$ на $AC(y = -kx, 0 < k \leq 1)$ к обобщенной задаче Трикоми для уравнения (7) в той же области с краевыми условиями $u_0 = \varphi_0$ на Γ и $u_0 = \psi_0$ на AC.

Литература

1. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.–Л: Гостехиздат, 1948. – 296 с.
2. Жегалов В.И. *Об одном случае задачи Трикоми* // Тр. семин. по краев. задачам. – Изд-во Казанск. ун-та, 1966. – Вып. 3. – С. 28–36.
3. Сабитов К.Б. *Обращение некоторых интегральных уравнений Вольтерра* / /ДАН СССР. – 1990. – Т. 314. – № 2. – С. 300–303.
4. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981 – 448 с.
5. Кальменов Т.Ш. *О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 8. – С. 1718–1725.
6. Сабитов К.Б. *Экстремальные свойства модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 310 – № 1. – С. 33–36.
7. Сабитов К.Б. *Некоторые вопросы качественной и спектральной теории уравнений смешанного типа*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – М.: МГУ, 1991. – 313 с.
8. Сабитов К.Б. *Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 6. – С. 1023–1032.
9. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 736 с.
10. Моисеев Е.И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* – М.: МГУ, 1988. – 150 с.
11. Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* – Киев.: Наук. думка, 1965. – 798 с.
12. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 576 с.
13. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Высш. школа, 1985. – 304 с.

Стерлитамакский государственный
педагогический институт

Стерлитамакский филиал
Академии наук Республики Башкортостан

Поступила
23.10.2001