ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 512.552

М.Ф. НАСРУТДИНОВ

СТАБИЛЬНАЯ КОНЕЧНОСТЬ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

Ассоциативное кольцо с единицей R называется стабильно конечным, если любая обратимая справа квадратная матрица над R является обратимой. Например, стабильно конечны коммутативные кольца и тела.

В статье доказывается стабильная конечность некоторых классов групповых колец. В частности, показано, что групповые кольца нильпотентных групп над телами являются стабильно конечными.

Отметим в связи с этим одну из гипотез, высказанных И. Капланским в 1970 г. для групповых колец. *Пусть $k[G]$ — групповая алгебра группы G над полем k. Тогда всякий обратимый справа элемент кольца $k[G]$ обратим слева.*

И. Капланским было доказано, что гипотеза верна для групповых алгебр над полем нулевой характеристики. Упрощенное доказательство, полученное Пассманом, можно найти в обзоре [1]. Доказательство основывается на понятии предельного перехода. Для полей простой характеристики вопрос до сих пор остается открытым.

В статье используется техника, разработанная для изучения проективности конечно порожденных правых плоских модулей. Следуя [2], будем называть кольцо (правым) S-кольцом, если над ним проективен любой конечно порожденный правый плоский модуль. В класс S-колец входят, например, артиновы справа кольца и нетеровы слева кольца. Отметим, что пока не известно, совпадают ли классы правых и левых S-колец. В дальнейшем под S-кольцом будем понимать правое S-кольцо. Любое правое S-кольцо является стабильно конечным.

В статье доказано, что групповое кольцо упорядоченной группы над телом является S-кольцом и установлены некоторые следствия из этого факта. Показано, что данная техника неприменима к разрешимым группам.

Перейдем к изложению результатов. В статье рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и унитарные модули над ними. Для кольца R будем обозначать через $\mathrm{M}_n(R)$ кольцо матриц порядка n над кольцом R, через $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R. Напомним, что кольцо называется полулокальным, если $R/J(R)$ артиново.

Теорема 1 ([3], теорема 4). *Пусть R — кольцо. Следующие условия для кольца R эквивалентны*:

(1) *всякий n-порожденный плоский правый R-модуль проективен*;

(2) *стабилизируется всякая возрастающая последовательность правых $\mathrm{M}_n(R)$-идеалов вида*

$$A_1\mathrm{M}_n(R) \subseteq A_2\mathrm{M}_n(R) \subseteq \cdots \subseteq A_m\mathrm{M}_n(R) \subseteq \cdots ,$$

где $A_m \in \mathrm{M}_n(R)$ $(m = 1, 2, \dots)$ — последовательность матриц, удовлетворяющая условиям $A_m = A_{m+1}A_m$ $(m = 1, 2, \dots)$.

Условие (2) *эквивалентно следующему условию* ([4], лемма 3):

(2′) *для всякой последовательности матриц $A_m \in \mathrm{M}_n(R)$ $(m = 1, 2, \dots)$, удовлетворяющей условиям $A_m = A_{m+1}A_m$ $(m = 1, 2, \dots)$, существует такое m_0, что для всех $m, m' > m_0$ выполнено $A_m = A_{m'}A_m$.*

Из условия $(2')$ видно, что любое подкольцо S-кольца тоже будет S-кольцом. Так как тела являются правыми S-кольцами, то S-кольцами будут и кольца, вложимые в тела.

Любое правое S-кольцо является стабильно конечным. Действительно, пусть R — S-кольцо, n — положительное целое число, $x, y \in \mathrm{M}_n(R)$ и $xy = 1$. Тогда yx — идемпотентная матрица и последовательность $a_m = 1 - y^m x^m$ удовлетворяет соотношениям $a_m = a_{m+1} a_m$ $(m = 1, 2, \dots)$. Если для некоторого m имеет место $a_{m+1} = a_m a_{m+1}$, то $1 - y^{m+1} x^{m+1} = 1 - y^m x^m$. Итак, $y^{m+1} x^{m+1} = y^m x^m$, умножая слева на x^m и справа на y^m, получим $yx = 1$.

Перейдем теперь к групповым кольцам. Напомним, что группа G называется линейно упорядоченной, если все элементы группы сравнимы и, если $x \leq y$, то $axb \leq ayb$ для всех элементов $a, b, x, y \in G$. Ключевым для дальнейшего изложения является

Теорема 2 ([5]). *Пусть k — поле, G — линейно упорядоченная группа. Групповая алгебра $k[G]$ вкладывается в алгебру с делением.*

Та же самая конструкция вложения в тело, приведенная в статье [5] и называемая теперь конструкцией Мальцева–Неймана, позволяет доказать результат о вложении группового кольца $k[G]$ линейно упорядоченной группы G над телом k ([6], с. 528, следствие 8.7.6).

Известно, что упорядочиваемы локально свободные группы, нильпотентные группы без кручения, в частности, абелевы группы без кручения.

Свойство кольца быть S-кольцом наследуется подкольцами. При некоторых предположениях можно поднять свойство быть S-кольцом с подкольца на все кольцо. Справедливо следующее

Предложение 1 ([7], предложение 1.2). *Пусть R' и R — кольца и $\varphi : R' \to R$ — кольцевой гомоморфизм, сохраняющий единицу и кольцо R, рассматриваемое как правый R'-модуль, является конечно порожденным плоским R'-модулем. Тогда если R' является S-кольцом, то и R является S-кольцом.*

Если H — подгруппа конечного индекса группы G, то групповое кольцо $R[G]$ группы G над кольцом R является конечно порожденным свободным $R[H]$-модулем. Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Пусть H — подгруппа конечного индекса группы G. Групповое кольцо $R[G]$ группы G над кольцом R является S-кольцом, тогда и только тогда, когда $R[H]$ — S-кольцо.*

Говорят, что группа почти обладает некоторым свойством, если она обладает нормальной подгруппой конечного индекса, которая удовлетворяет этому свойству.

Теорема 3. *Пусть $R = T[G]$ — групповое кольцо группы G над телом T. Если в G существует линейно упорядочиваемая подгруппа конечного индекса, то R является S-кольцом.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа конечного индекса группы G. Согласно предыдущей лемме достаточно доказать, что $T[H]$ — S-кольцо. Так как $T[H]$ вкладывается в тело, то утверждение доказано.

Предложение 2. *Пусть T — тело, $R = \mathrm{M}_n(T)$ — кольцо матриц n-го порядка над телом T. Если в G существует линейно упорядочиваемая подгруппа конечного индекса, то $R[G]$ является S-кольцом.*

Доказательство. Отметим, что $\mathrm{M}_n(T)[G] = \mathrm{M}_n(T[G])$. Так как кольцо $n \times n$-матриц над S-кольцом является S-кольцом, то предложение доказано.

Кольцо R называется полупримарным, если радикал Джекобсона $J(R)$ нильпотентен и $R/J(R)$ артиново кольцо, т. е. $R/J(R)$ является прямой суммой колец матриц над телами.

Теорема 4. *Пусть G — группа, R — полупримарное кольцо. Если в G существует линейно упорядочиваемая подгруппа конечного индекса, то $R[G]$ является S-кольцом.*

Доказательство. По лемме 1 без ограничения общности можем считать, что G — линейно упорядочиваемая группа.

Достаточно доказать, что кольцо $R[G]/J(R)G \cong R/J(R)[G]$ является S-кольцом. Действительно, идеал $I = J(R)G$ нильпотентен. Поэтому ввиду следствия 5.3 [2], если кольцо $R[G]/I$ является S-кольцом, то $R[G]$ — S-кольцо.

Пусть $R/J(R) = \sum\limits_{i=1}^{m} \oplus \mathrm{M}_{n_i}(T^i)$, где T^i — тела. Так как $\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} \oplus \mathrm{M}_{n_i}(T^i)\Big)[G] = \sum\limits_{i=1}^{m} \oplus \mathrm{M}_{n_i}(T^i)[G]$, то утверждение следует из предложения 2.

Следствие 1. Пусть R — полупримарное кольцо. Если G — конечно-порожденная почти нильпотентная группа (т. е. в G существует нильпотентная подгруппа конечного индекса), то RG является S-кольцом.

Доказательство. Подгруппа конечного индекса конечно порожденной группы конечно порождена. Поэтому можем считать, что G — конечно порожденная нильпотентная группа.

Группа G конечно порождена и нильпотентна, поэтому она почти вся без кручения ([8], с. 158, теорема 17.2.2), т. е. в G существует нормальная подгруппа конечного индекса H без кручения.

Так как нильпотентная группа без кручения упорядочиваема ([9], с. 32, следствие 4), то $R[H]$ является S-кольцом. $\square$

Следствие 2. Пусть G — нильпотентная группа, R — полупримарное кольцо. Тогда групповое кольцо $R[G]$ является стабильно конечным.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, n)$ — $n \times n$-матрицы над кольцом $R[G]$ и $AB = 1$. Рассмотрим подгруппу H, порожденную носителями элементов a_{ij} и b_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$. Подгруппа H конечно порождена и нильпотентна. Поэтому $R[H]$ является S-кольцом, следовательно, $BA = 1$.

Замечание. Если в группе существует бесконечная строго возрастающая цепочка конечных подгрупп, порядки которых обратимы в поле k, то групповая алгебра $k[G]$ не является S-кольцом.

Действительно, пусть $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_m \subset \cdots$ — такая последовательность подгрупп. Тогда элементы $a_m = \Big(1 - 1/|H_m| \sum\limits_{h \in H_m} h\Big)$ удовлетворяют соотношениям $a_m = a_{m+1}a_m$ и порождают бесконечную строго возрастающую последовательность правых идеалов

$$a_1 k[G] \subset a_2 k[G] \subset \cdots \subset a_m k[G] \subset \cdots$$

Следующий пример показывает, что существует конечно порожденная разрешимая группа G, такая, что групповая алгебра $k[G]$ над полем нулевой характеристики не является S-кольцом.

Пример. Пусть G — прямое сплетение $G \cong \mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{Z}$ группы порядка 2 и бесконечной циклической группы ([8], с. 72, определение), k — поле нулевой характеристики. Тогда групповая алгебра $k[G]$ не является S-кольцом.

Доказательство. Пусть $A = \langle a \rangle$ — бесконечная циклическая группа, $B = \langle b \mid b^2 = 1 \rangle$ — группа порядка 2. Группа $G = B \wr A$ устроена следующим образом. Элементы группы $a^k * f$, где $a^k \in A$, а $f \in \mathrm{fun}(A, B) = \prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} B_{a^i} = \{f : A \to B \mid \text{п. вс. } f(a^k) = 1\}$ — группа функций $A \to B$ с конечными носителями, $(f * a^l)(a^k) = f a^l * (a^l a^k)$.

Ясно, что $\mathrm{fun}(A, B)$ — нормальная абелева подгруппа в G и $G/\mathrm{fun}(A, B) \cong A$. Группа G порождается a и f_b, где $f_b(a^k) = 1$ при $k \neq 1$, и $f_b(a) = b$. Таким образом, G — разрешимая конечно порожденная группа степени 2.

Рассмотрим подгруппы H_i, состоящие из функций $f : A \to B$, $f(a^k) = 1$ при $k < 1$ и $k > i$. Тогда последовательность подгрупп H_i — это бесконечная строго возрастающая цепочка конечных 2-подгрупп, порядки которых обратимы в поле k. Поэтому групповая алгебра $k[G]$ не является S-кольцом.

Литература

1. Залесский А.Е., Михалев А.В. *Групповые кольца* // Итоги науки и техники. Сер. "Современные проблемы математики". Т. 2. – М.: ВИНИТИ. – 1979. – С. 5–118.
2. Puninski G., Rothmaler Ph. *When every finitely generated flat modules projective* // J. Algebra. – 2004.– V. 277. – P. 542–558.
3. Сахаев И.И. *О проективности конечно порожденных плоских модулей* // Сиб. матем. журн. – 1965. – Т. 6. – С. 564–573.
4. Сахаев И.И. *О конечной порожденности проективных модулей над кольцами с полиномиальными тождествами* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 65–75.
5. Мальцев А.И. *О включении групповых алгебр в алгебры с делением* // ДАН СССР – 1948. – Т. 60. – № 9. – С. 1499–1501.
6. Cohn P.M. *Free rings and their relations.* – 2nd ed. – London: Academic Press – 1985. – V. 19, L. M. S. Monographs – 590 p.
7. Jondrup S. *On Finitely generated flat modules* // Math. Scand. – 1970. – V. 26. – P. 233–240.
8. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. *Основы теории групп.* – М.: Наука, 1982. – 288 с.
9. Кокорин А.И., Копытов В.М. *Линейно упорядоченные группы.* – М.: Наука, 1972. – 200 с.

Казанский государственный университет

Поступила 20.04.2006