ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 517.51

Т.В. ЕРШОВА

АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ МОДИФИКАЦИЙ ОПЕРАТОРОВ, ПОДОБНЫХ МНОГОЧЛЕНАМ БЕРНШТЕЙНА

В данной статье, написанной на материале депонированной работы [1], модификации В.С. Виденского и Т.П. Пендиной применяются к линейным операторам, которые имеют центральные моменты, сходные с центральными моментами многочленов Бернштейна. Установлены асимптотики для центральных моментов модификаций этих операторов, а также доказаны теоремы типа теорем Вороновской–Бернштейна, имеющие локальный характер.

1. Как известно ([2], с. 52), модификации В.С. Виденского и Т.П. Пендиной операторов L_n, $n \in N$, заданных в пространстве $C[0,1]$, определяются следующими рекуррентными формулами:

$$
\begin{aligned}
&L_{n1} f = L_n f, \\
&L_{n\nu} f = L_n f - \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{S_i(L_n)}{i!} L_{n,\nu-i} f^{(i)}, \quad \nu \ge 2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Предполагаем, что $L_n 1 = 1$ и оператор $L_{n\nu}$ действует в пространстве $C^{(\nu-1)}[0,1]$. Функции $S_i(L_n, x) = L_n((t-x)^i, x)$, $i = 0, 1, \dots$, называются центральными моментами порядка i оператора L_n. Аналогично определяются центральные моменты модификаций $L_{n\nu}$. Полагая $f(t) = (t-x)^\nu$, из (1) получаем

$$
S_\nu(L_{n\nu}) = S_\nu(L_n) - \sum_{i=1}^{\nu-1} C_\nu^i S_i(L_n) S_{\nu-i}(L_{n,\nu-i}) \tag{2}
$$

или

$$
\frac{S_\nu(L_{n\nu})}{\nu!} = \frac{S_\nu(L_n)}{\nu!} - \sum_{i=1}^{\nu-1} \frac{S_i(L_n)}{i!} \frac{S_{\nu-i}(L_{n,\nu-i})}{(\nu-i)!}. \tag{3}
$$

Напомним, что для центральных моментов четных порядков линейных положительных операторов (л. п. о.) имеет место неравенство [3]

$$
S_{2p} S_{2q} \le S_{2(p+q)}, \quad p, q \in N. \tag{4}
$$

Условимся считать, что утверждения леммы 1 имеют место в точке x из $[0,1]$, и для удобства записи символ x писать не будем.

Лемма 1. *Пусть* $\{L_n\}$ *— последовательность л. п. о.,* $S_{2k-1}(L_n) = O(S_{2k}(L_n))$, $k \ge 1$. *Тогда* $S_{2k-1}(L_{n,2k-1}) = O(S_{2k}(L_n))$ *и* $S_{2k}(L_{n,2k}) = O(S_{2k}(L_n))$.

Доказательство. Из (2) при $\nu = 2k-1$ и $\nu = 2k$ следует соответственно

$$S_{2k-1}(L_{n,2k-1}) = S_{2k-1}(L_n) - \sum_{i=1}^{2k-2} C_{2k-1}^i S_i(L_n) S_{2k-1-i}(L_{n,2k-1-i}), \tag{5}$$

$$S_{2k}(L_{n,2k}) = S_{2k}(L_n) - \sum_{i=1}^{2k-1} C_{2k}^i S_i(L_n) S_{2k-i}(L_{n,2k-i}). \tag{6}$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть $k = 1$. Тогда $S_1(L_{n1}) = S_1(L_n) = O(S_2(L_n))$. Для центрального момента $S_2(L_{n2})$ согласно (6) имеем $S_2(L_{n2}) = S_2(L_n) - 2S_1^2(L_n)$. Отсюда $S_2(L_{n2}) = S_2(L_n) - O(S_2(L_n))O(S_2(L_n)) = S_2(L_n) - O(S_2(L_n)) = O(S_2(L_n))$. Предположим, что лемма доказана для $k \le m$. Пусть $k = m+1$. Равенство (5) примет вид

$$S_{2m+1}(L_{n,2m+1}) = S_{2m+1}(L_n) - \sum_{i=1}^{2m} C_{2m+1}^i S_i(L_n) S_{2m+1-i}(L_{n,2m+1-i}). \tag{7}$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного i. Если $i = 2j$, то, в силу (4)

$$S_{2j}(L_n)S_{2m+1-2j}(L_{n,2m+1-2j}) = S_{2j}(L_n)O(S_{2m-2j+2}(L_n)) = O(S_{2j}(L_n)S_{2m-2j+2}(L_n)) = O(S_{2m+2}(L_n)).$$

Если $i = 2j-1$, то с учетом (4)

$$\begin{aligned} S_{2j-1}(L_n)S_{2m-2j+2}(L_{n,2m-2j+2}) &= O(S_{2j}(L_n))S_{2m-2j+2}(L_{n,2m-2j+2}) = \\ &= O(S_{2j}(L_n))O(S_{2m-2j+2}(L_n)) = O(S_{2m+2}(L_n)). \end{aligned}$$

Таким образом, из (7) следует $S_{2m+1}(L_{n,2m+1}) = O(S_{2m+2}(L_n))$. Запишем равенство (6) при $k = m+1$:

$$S_{2m+2}(L_{n,2m+2}) = S_{2m+2}(L_n) - \sum_{i=1}^{2m+1} C_{2m+2}^i S_i(L_n) S_{2m+2-i}(L_{n,2m+2-i}). \tag{8}$$

Если $i = 2j$, то

$$S_{2j}(L_n)S_{2m+2-2j}(L_{n,2m+2-2j}) = S_{2j}(L_n)O(S_{2m+2-2j}(L_n)) = O(S_{2m+2}(L_n)).$$

Для нечетного $i = 2j-1$ имеем

$$S_{2j-1}(L_n)S_{2m-2j+3}(L_{n,2m-2j+3}) = O(S_{2j}(L_n)S_{2m-2j+4}(L_n)) = O(S_{2m+4}(L_n)).$$

Следовательно, из (8) получаем $S_{2m+2}(L_{n,2m+2}) = O(S_{2m+2}(L_n))$. $\square$

Замечание 1. Отметим, что в сумме из правой части равенства (6) слагаемые с нечетным индексом i имеют, вообще говоря, порядок малости выше, чем слагаемые с четным индексом i.

Замечание 2. Условиям леммы удовлетворяют многочлены Бернштейна, Канторовича [2] и многие другие полиномиальные операторы [4].

2. Рассмотрим частные суммы σ_i ряда Маклорена функции $y = e^x$ при $x = a$, где a — произвольное число: $\sigma_i = \sum\limits_{k=0}^{i} \frac{a^k}{k!}$. Будем считать, что $\sigma_i = 0$, если $i < 0$.

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\sum_{j=0}^{2i-1} (-1)^j \sigma_j \sigma_{2i-1-j} = 0, \quad i \ge 1, \tag{9}$$

$$\sum_{j=0}^{2i} (-1)^j \sigma_j \sigma_{2i-j} = 1, \quad i \ge 0. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим суммы из правых частей равенств (9) и (10) через A и B. Тогда

$$A = \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\sigma_j\sigma_{2i-1-j} + \sum_{k=i}^{2i-1}(-1)^k\sigma_k\sigma_{2i-1-k}\ (k = 2i-1-j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\sigma_j\sigma_{2i-1-j} - \sum_{j=i-1}^{0}(-1)^j\sigma_{2i-1-j}\sigma_j = 0.$$

В [5] доказано равенство $\sum\limits_{j=0}^{2i}(-1)^j(\sigma_j - \sigma_{j-2})\sigma_{2i-j} = 0$, что равносильно $\sum\limits_{j=0}^{2i}(-1)^j\sigma_j\sigma_{2i-j} = \sum\limits_{j=0}^{2i-2}(-1)^j\sigma_j\sigma_{2i-2-j}$. Следовательно, $B = \sum\limits_{j=0}^{0}(-1)^j\sigma_j\sigma_{-j} = \sigma_0^2 = 1$. $\square$

В лемме 3 установим асимптотику для центральных моментов порядка $2m$ модификаций $L_{n,2m}$ операторов L_n, центральные моменты которых удовлетворяют некоторым условиям.

Лемма 3. *Пусть $\{L_n\}$ — последовательность л. п. о.; $S_{2k-1}(L_n,x) = O(S_{2k}(L_n,x))$;*

$$\frac{S_{2k}(L_n,x)}{(2k)!} = \sum_{i=0}^{k} A_i\sigma_{k-i}g^k(n)\varphi^k(x) + o(g^k(n)), \tag{11}$$

$A_i \in \mathbb{R}$, $A_0 = 1$, $k \geq 1$, $g(n)$ и $\varphi(x)$ — функции, причем $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = 0$. Тогда

$$\frac{S_{2k}(L_{n,2k},x)}{(2k)!} = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\sigma_{k-i}g^k(n)\varphi^k(x) + o(g^k(n)), \tag{12}$$

$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = A_1\alpha_0$, $\alpha_2 = A_1\alpha_1 - A_2\alpha_0 - 1$, $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j\alpha_{i-j}$, $i \geq 3$.

Доказательство. Применим индукцию по k. В силу условий леммы и формулы (3) при $\nu = 2$ соотношение (12) имеет место при $k = 1$. Предположим, что для $k \leq m-1$ соотношение (12) выполняется. Как и в лемме 1, рассмотрим отдельно четные и нечетные слагаемые из суммы в правой части (3) для $\nu = 2m$. Полагая $i = 2j$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, и применяя (11) и предположение индукции, для соответствующего слагаемого имеем

$$\frac{S_{2j}(L_n,x)}{(2j)!}\frac{S_{2m-2j}(L_{n,2m-2j},x)}{(2m-2j)!} = (-1)^{m-j+1}\sum_{i=0}^{j}A_i\sigma_{j-i}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\sigma_{m-j-k}g^m(n)\varphi^m(x) + o(g^m(n)).$$

Для нечетных $i = 2j-1$ получим

$$S_{2j-1}(L_n,x)S_{2m-2j+1}(L_{n,2m-2j+1},x) = O(S_{2j}S_{2m-2j+2}) = O(g^{m+1}(n)) = o(g^m(n)).$$

Следовательно, после очевидных преобразований соотношения (3) при $\nu = 2m$ приходим к задаче доказательства равенства

$$\sum \equiv \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\sum_{i=0}^{j}A_i\sigma_{j-i}\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\sigma_{m-j-k} = 0. \tag{13}$$

Изменив в сумме (13) порядок суммирования, получим

$$\sum = \sum_{k=0}^{m}\alpha_k\sum_{i=0}^{m}A_i\sum_{j=i}^{m}(-1)^j\sigma_{j-i}\sigma_{m-k-j}.$$

Внутренняя сумма после перехода к переменной суммирования $t = j - i$ будет равна

$$(-1)^i \sum_{t=0}^{m-i} (-1)^t \sigma_t \sigma_{m-i-k-t} = (-1)^i \sum_{t=0}^{m-i-k} (-1)^t \sigma_t \sigma_{m-i-k-t},$$

т. к. $\sigma_p = 0$ при $-k \le p \le -1$. Применяя лемму 2, получим $\sum = \sum_{i,k=0}^{m}{}' (-1)^i A_i \alpha_k$, где $'$ означает, что суммирование производится по i и k, для которых $m - i - k$ четно и неотрицательно. Покажем, что для любого m сумма $\sum$ равна нулю. Действительно, если $m = 1$, то $\sum = A_0\alpha_1 - A_1\alpha_0 = 0$. Если $m = 2$, то $\sum = A_0\alpha_0 + A_0\alpha_2 - A_1\alpha_1 + A_2\alpha_0 = 1 + \alpha_2 - A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0$. Для $m \ge 3$ имеем

$$\sum = \sum_{i,k=0}^{m}{}' (-1)^i A_i \alpha_k = \sum_{i,k=0}^{m-2}{}' (-1)^i A_i \alpha_k + \sum_{i+k=m} (-1)^i A_i \alpha_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i A_i \alpha_{m-i} = 0. \quad \square$$

Замечание 3. Из леммы 3 следуют результаты предыдущих работ автора. Для многочленов Бернштейна и Канторовича имеет место равенство [4], [6] $\frac{S_{2k}(L_n,x)}{(2k)!} = \frac{x^k(1-x)^k}{2^k k! n^k} + o(\frac{1}{n^k})$. Соотношение (12) вида $\frac{S_{2k}(L_{n,2k},x)}{(2k)!} = (-1)^{k+1} \frac{x^k(1-x)^k}{2^k k! n^k} + o(\frac{1}{n^k})$ доказано в [7]. Многочлены U_n, введенные в ([8], с. 48), удовлетворяют условию (11): $\frac{S_{2k}(U_n,x)}{(2k)!} = (\frac{1}{2^k k!} + \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!}) \frac{x^k(1-x)^k}{n^k}$. Для них соотношение $\frac{S_{2k}(U_{n,2k},x)}{(2k)!} = (-1)^{k+1} \sigma_k \frac{x^k(1-x)^k}{n^k}$ доказано в [5]. В случае этих трех операторов лемма 3 имеет место в интервале $(0, 1)$ с числом $a = 1/2$.

Лемма 4. *Пусть $\{L_n\}$ — последовательность л. п. о., удовлетворяющих условиям* (11) *и*

$$\frac{S_{2k-1}(L_n,x)}{(2k-1)!} = \sum_{i=1}^{k} B_i \sigma_{k-i} g^k(n) \varphi^k(x) h(x) + o(g^k(n)), \tag{14}$$

$B_i \in \mathbb{R}$, $k \ge 1$, $h(x)$ — функция. Тогда

$$\frac{S_{2k-1}(L_{n,2k-1},x)}{(2k-1)!} = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k} \beta_i \sigma_{k-i} g^k(n) \varphi^k(x) h(x) + o(g^k(n)), \tag{15}$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} A_j \beta_{i-j} + \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j+1} B_j \alpha_{i-j}.$$

Доказательство. Применим индукцию по k. При $k = 1$ (15) совпадает с (14), т. к. $\beta_1 = B_1$. Пусть для $k \le m - 1$ имеет место соотношение (15). Рассмотрим $k = m$. Положим в формуле (3) $\nu = 2m - 1$. Тогда

$$\frac{S_{2m-1}(L_{n,2m-1})}{(2m-1)!} = \frac{S_{2m-1}(L_n)}{(2m-1)!} - \sum_{i=1}^{2m-2} \frac{S_i(L_n)}{i!} \frac{S_{2m-1-i}(L_{n,2m-1-i})}{(2m-1-i)!}. \tag{16}$$

Полагая $i = 2j$ и $i = 2j - 1$, получим $j = 1, \ldots, m - 1$. Выполним преобразования равенства (16), используя (11), (12), (14) и предположение индукции. Остается установить тождество

$$\sum_1 + \sum_2 \equiv \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \sum_{p=0}^{j} A_p \sigma_{j-p} \sum_{t=1}^{m-j} \beta_t \sigma_{m-j-t} + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \sum_{l=1}^{j} B_l \sigma_{j-l} \sum_{s=0}^{m-j} \alpha_s \sigma_{m-j-s} = 0.$$

Слагаемые, стоящие в скобках первой суммы

$$\sum_1 = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \Big(\sum_{p=0}^{j} \sum_{t=1}^{m-j} A_p \beta_t \sigma_{j-p} \sigma_{m-j-t} \Big),$$

объединим в группы в соответствии со значением $q = p + t$. Замечая, что $p + t = 1, \dots, m$, имеем

$$\sum_1 = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=0}^{q-1} A_p \beta_{q-p} \sigma_{j-p} \sigma_{m-j-q+p} = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=0}^{q-1} A_p \beta_{q-p} \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j \sigma_{j-p} \sigma_{m-j-q+p}.$$

Для вычисления последней внутренней суммы $\sum\limits_3$ используем лемму 2. Прежде всего заметим, что $\sum\limits_3 = \sum\limits_{j=p}^{m-q+p} (-1)^j \sigma_{j-p} \sigma_{m-j-q+p}$. Полагая $t = j - p$, получим $\sum\limits_3 = (-1)^p \sum\limits_{t=0}^{m-q} (-1)^t \sigma_t \sigma_{m-q-t}$, и $\sum\limits_3$ согласно лемме 2 отлична от нуля при условии, что m и q одинаковой четности. В этом случае $\sum\limits_3 = (-1)^p$. Таким образом,

$$\sum_1 = {\sum_{q=1}^{m}}' \sum_{p=0}^{q-1} (-1)^p A_p \beta_{q-p},$$

где $'$ означает, что суммирование производится по тем q, четность которых совпадает с четностью m. Аналогично устанавливаем, что

$$\sum_2 = {\sum_{q=1}^{m}}' \sum_{l=1}^{q} (-1)^l B_l \alpha_{q-l}.$$

Здесь $'$ также означает суммирование по q, имеющим одинаковую четность с m. Следовательно,

$$\sum_1 + \sum_2 = {\sum_{q=1}^{m}}' \left(\sum_{p=0}^{q-1} (-1)^p A_p \beta_{q-p} + \sum_{l=1}^{q} (-1)^l B_l \alpha_{q-l} \right). \tag{17}$$

Согласно определению β_i сумма в скобках, стоящая в правой части (17), равна нулю. □

Замечание 4. Лемма 4 для многочленов Бернштейна доказана в [9], для многочленов Канторовича — в [10] при любом x из $(0, 1)$.

Определение. Операторы L_n, удовлетворяющие условиям (11) и (14) на $(0, 1)$, назовем операторами, подобными многочленам Бернштейна.

3. Лемма 5. *Пусть последовательность л. п. о. $\{L_n\}$ удовлетворяет условию* (11). *Тогда*

$$S^*_{2k-1}(L_n, x) \asymp g^{k-\frac{1}{2}}(n). \tag{18}$$

Доказательство. Будем использовать неравенство Гёльдера для л. п. о.

$$L_n(uv) \le (L_n u^p)^{\frac{1}{p}} (L_n v^q)^{\frac{1}{q}}, \tag{19}$$

где функции u, v неотрицательны, $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Из этого неравенства легко получить следующие неравенства:

$$S^*_{2k-1}(L_n) \le \sqrt{S_{2k-2}(L_n) S_{2k}(L_n)}, \tag{20}$$

$$S^3_{2k-2}(L_n) \le (S^*_{2k-1}(L_n))^2 S_{2k-4}(L_n). \tag{21}$$

В первом случае в (19) надо положить $p = q = 2$, $u(t) = |t - x|^{k-1}$, $v(t) = |t - x|^k$, во втором положим $p = 3/2$, $q = 3$, $u(t) = |t - x|^{2/3(2k-1)}$, $v(t) = |t - x|^{\frac{2k-4}{3}}$. В силу (11) из (20) и (21) следуют неравенства

$$S^*_{2k-1}(L_n, x) \le C_1 g^{k-\frac{1}{2}}(n) \quad \text{и} \quad S^*_{2k-1}(L_n, x) \ge C_2 g^{k-\frac{1}{2}}(n),$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные, не зависящие от n. □

Лемма 6. *Пусть для центральных моментов л. п. о.* L_n *выполняется условие* (11) *и функция* $f \in C^{(\nu-1)}[0,1]$ *дифференцируема в точке* x $\nu + l$ $(\nu \geq 1,\ l \geq -1)$ *раз. Тогда*

$$L_{n\nu}(f,x) = f(x) + \sum_{i=\nu}^{\nu+l} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} S_i(L_{n\nu},x) + o(g^{\frac{\nu+l}{2}}(n)). \tag{22}$$

Сумму из правой части (22) *при* $l = -1$ *считаем отсутствующей.*

Доказательство. В силу (11) и (18) выполняется $S_i^*(L_n,x) \asymp g^{i/2}(n)$, что позволяет применить теорему 2 из [11] к функции f и модификациям $L_{n\nu}$. Таким образом, имеем

$$L_{n\nu}(f,x) = f(x) + \sum_{i=\nu}^{\nu+l} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} S_i(L_{n\nu},x) + o(S_{\nu+l}^*(L_n)).$$

В последнем слагаемом осуществляем соответствующую замену. □

Следующие две теоремы являются асимптотическими теоремами Вороновской–Бернштейна для исследуемых в данной статье модификаций линейных операторов $L_{n,2m}$ и $L_{n,2m-1}$.

Теорема 1. *Пусть для последовательности л. п. о.* $\{L_n\}$ *выполнены условия леммы* 3 *и функция* $f \in C^{(2m-1)}[0,1]$, $m \geq 1$, *в точке* x *дифференцируема* $2m$ *раз. Тогда*

$$L_{n,2m}(f,x) = f(x) + f^{(2m)}(x)(-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \sigma_{m-i} g^m(n) \varphi^m(x) + o(g^m(n)).$$

Доказательство. В соотношении (22) положим $\nu = 2m$, $l = 0$, а затем применим (12). □

Теорема 2. *Пусть для последовательности л. п. о.* $\{L_n\}$ *выполнены условия леммы* 4, *функция* $f \in C^{(2m-2)}[0,1]$, $m \geq 1$, *в точке* x *дифференцируема* $2m$ *раз. Тогда*

$$L_{n,2m-1}(f,x) = f(x) + f^{(2m-1)}(x)(-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{m} \beta_i \sigma_{m-i} g^m(n) \varphi^m(x) h(x) +$$
$$+ f^{(2m)}(x)(-1)^{m+1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \sigma_{m-i} g^m(n) \varphi^m(x) + o(g^m(n)).$$

Доказательство. Требуемое соотношение следует из (22) при $\nu = 2m - 1$, $l = 1$ и (12), (15) при $k = m$. □

Литература

1. Ершова Т.В. *Асимптотики для центральных моментов модификаций операторов, подобных многочленам Бернштейна.* – Челяб. гос. пед. ун-т. – Челябинск, 2000. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ 03.05.00, № 1277-В00.
2. Виденский В.С. *Многочлены Бернштейна.* – Л.: Изд-во Ленингр. гос. пед. ин-та, 1990. – 63 с.
3. Ершова Т.В. *Об итерациях линейных положительных операторов.* – Челяб. гос. пед. ун-т. – Челябинск, 1999. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 10.03.99, № 786-В99.
4. Волков Ю.И. *О некоторых линейных положительных операторах* // Матем. заметки. – 1978. – Т. 237. – № 5. – С. 659–669.
5. Ершова Т.В. *О модификациях многочленов, подобных многочленам Бернштейна* // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3. – 1996. – № 1. – С. 49–54.
6. Бернштейн С.Н. *Добавление к статье Е.В. Вороновской "Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н. Бернштейна".* – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – С. 155–158.
7. Ершова Т.В. *О некоторых свойствах модификаций многочленов Бернштейна* // Функциональный анализ. – Ульяновск, 1993. – № 34. – С. 15–26.

8. Виденский В.С. *Линейные положительные операторы конечного ранга.* – Л.: Изд-во Ленингр. гос. пед. ун-та, 1985. – 68 с.
9. Ершова Т.В. *Асимптотическая теорема Вороновской–Бернштейна для модификаций многочленов Бернштейна* // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3. – 1994. – № 1. – С. 43–48.
10. Ершова Т.В. *Предельные соотношения модификаций многочленов Канторовича.* – Челяб. гос. пед. ун-т. – Челябинск, 1996. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.10.96, № 3146-В96.
11. Ершова Т.В. *О приближении непрерывных функций модификациями линейных положительных операторов* // Прим. функционального анализа в теории приближений. – Тверь, 1997. – С. 73–79.

Челябинский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 10.05.2001
окончательный вариант 07.04.2003