Известия вузов. Математика
2016, №12, с. 96–100

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное Н.К. Замовым

М.Х. ФАЙЗРАХМАНОВ

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИМЫЕ НУМЕРАЦИИ КОНЕЧНЫХ КЛАССОВ СЕМЕЙСТВ ТОТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. В работе вводится понятие вычислимой нумерации класса семейств. Найден критерий существования универсальной вычислимой нумерации конечного класса вычислимых семейств всюду определенных функций. В частности, установлено существование конечного вычислимого класса семейств тотальных функций без универсальных вычислимых нумераций.

Ключевые слова: вычислимая нумерация, универсальная нумерация, класс семейств, арифметическая нумерация.

УДК: 510.54 : 510.57

Введение. В настоящее время имеется большое число работ, посвященных обобщенно вычислимым нумерациям. К ним относятся фундаментальная в этом направлении статья С. Гончарова и А. Сорби [1], статьи, посвященные исследованиям арифметических нумераций (например, [2]–[4]), а также недавняя статья С.А. Бадаева и С.С. Гончарова [5], в которой обобщенно вычислимые нумерации рассматриваются с позиций равномерной перечислимости семейств относительно произвольного оракула. Данная статья имеет целью обобщение понятия вычислимой нумерации до вычислимости счетных классов семейств. Это связано с понятием вычислимых нумераций частичных функционалов конечных типов, введенных в работе [6]. Рассматриваются вопросы, в основном касающиеся универсальных вычислимых нумераций. Как известно [6], в классическом случае любое конечное семейство вычислимо перечислимых (в. п.) множеств имеет универсальную вычислимую нумерацию. Основной целью данной работы является поиск критерия существования универсальных нумераций конечных вычислимых классов семейств всюду определенных функций, а также поиск класса, не имеющего универсальных вычислимых нумераций.

Необходимые сведения по теории нумераций можно найти в монографии Ю.Л. Ершова [6]. Так *нумерацией* непустого множества X называется произвольное сюрьективное отображение $\nu : \mathbb{N} \to X$. Если ν — нумерация X, а μ — нумерация $Y \subseteq X$, то говорим, что μ *сводится* к ν ($\mu \leqslant \nu$), если существует такая вычислимая функция f, что $\mu = \nu \circ f$. Пишем $\nu \equiv \mu$, если $\mu \leqslant \nu$ и $\nu \leqslant \mu$. *Сочленением* нумераций ν_0 и ν_1 называется нумерация $\nu_0 \oplus \nu_1(2x+i) = \nu_i(x)$, где $i = 0, 1$. Пусть $\mathcal{F}$ – счетное семейство подмножеств $\mathbb{N}$. Нумерация

Поступила 28.04.2016

Благодарности. Работа выполнена за счет финансовых средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету на выполнение госзадания, проект №1.2045.2014, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №15-31-20607.

ν семейства $\mathcal{F}$ называется *вычислимой*, если множество $G_\nu = \{\langle x, y\rangle : y \in \nu x\}$ в. п. При этом ν называется *универсальной*, если к ней сводится любая вычислимая нумерация $\mathcal{F}$. Множество вычислимых нумераций семейства $\mathcal{F}$, факторизованное по отношению $\equiv$, образует верхнюю полурешетку относительно операции $[\nu] \vee [\mu] = [\nu \oplus \nu]$. Данная полурешетка называется *полурешеткой Роджерса* семейства $\mathcal{F}$ и обозначается как $\mathcal{L}^0(\mathcal{F})$.

В работах [7]–[9] были введены понятия n-семейств и их перечислений. Так 0-*семейством* называется произвольное подмножество $\mathbb{N}$, а $(n+1)$-*семейством* — множество, элементами которого являются m-семейства, $m \leqslant n$. В частности, классы семейств являются 2-семействами. С использованием понятия перечисления n-семейств естественным образом вводится понятие их вычислимой нумерации. Ввиду того, что в данной работе изучаются лишь классы семейств, ограничимся случаем 2-семейств, элементами которых являются 1-семейства. Пусть $\mathcal{F}$ – класс семейств и ν – его нумерация.

Определение. Нумерация ν называется *вычислимой*, если существует такая частично вычислимая функция f, что для всех x

$$\nu x = \{W_{f(x,y)} : f(x,y)\downarrow \ \& \ y \in \mathbb{N}\}.$$

Если элементами класса $\mathcal{F}$ являются семейства тотальных функций, в определении $W_{f(x,y)}$ можно заменить на $\varphi_{f(x,y)}$. Как и в случае 1-семейств, множество всех вычислимых нумераций заданного класса $\mathcal{F}$, факторизованное по отношению $\equiv$, образует верхнюю полурешетку относительно операции сочленения, которую будем обозначать через $\mathcal{L}^0_1(\mathcal{F})$ и также называть *полурешеткой Роджерса* класса семейств $\mathcal{F}$. Нетрудно видеть, что для каждого вычислимого семейства $\mathcal{A}$ можно найти класс семейств тотальных функций $\mathcal{F}$, полурешетка Роджерса которого изоморфна $\mathcal{L}^0(\mathcal{A})$. Действительно, для каждого $X \in A$ достаточно рассмотреть семейство

$$\mathcal{F}_X = \{f : f(0) \in X \ \& \ \forall x > 0 \ [f(x) = 0]\}$$

и положить $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_X : X \in \mathcal{A}\}$.

Основные результаты. Пусть $\mathcal{A}$ — Σ^0_2-вычислимое семейство, и $\mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ — полурешетка Роджерса его Σ^0_2-вычислимых нумераций. Как и в случае вычислимых семейств, $\mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ изоморфна полурешетке Роджерса класса семейств тотальных функций.

Предложение 1. *Существует вычислимый класс семейств тотальных функций $\mathcal{F}$ такой, что $\mathcal{L}^0_1(\mathcal{F}) \cong \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$.*

Схема доказательства. Для каждого $X \in \mathcal{A}$ рассмотрим семейство функций

$$\mathcal{F}_X = \{f : \exists n \ \forall m \geqslant n \ [f(m) = 0]\} \cup \{f : f(0) \in X \ \& \ \exists n \ \forall m \geqslant n \ [f(m) = 1]\}.$$

Положим $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_X : X \in \mathcal{A}\}$. Покажем, что соответствие $\nu \mapsto \widehat{\nu}$, где $\widehat{\nu}x = \mathcal{F}_{\nu x}$, индуцирует изоморфизм из $\mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ на $\mathcal{L}^0_1(\mathcal{F})$. Легко видеть, что для произвольных Σ^0_2-вычислимых нумераций μ, ν семейства $\mathcal{A}$

$$\mu \leqslant \nu \Leftrightarrow \widehat{\mu} \leqslant \widehat{\nu}.$$

Покажем, что для каждой Σ^0_2-вычислимой нумерации ν семейства $\mathcal{A}$ $\widehat{\nu}$ является вычислимой нумерацией класса $\mathcal{F}$. Фиксируем такую вычислимую функцию g, что для всех x, y

$$\langle x, y\rangle \in G_\nu \Leftrightarrow \liminf_s g(s, x, y) = 1.$$

Пусть $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — равномерно вычислимая последовательность всех функций с конечным носителем, $\{h^z_k\}_{z,k\in\mathbb{N}}$ — равномерно вычислимая последовательность функций, удовлетворяющих условиям

$$h^z_k(0) = z, \ \exists n \ \forall m \geqslant n \ [h^z_k(m) = 1].$$

Определим вычислимую функцию f, полагая

$$\varphi_{f(x,y)}(i) = \begin{cases} f_k(i), & \text{если } y = 2k; \\ h_k^z(i), & \text{если } y = 2\langle k,z,s\rangle + 1 \text{ и } \forall v\ [s \leqslant v \leqslant i \Rightarrow g(v,x,z) = 1]; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По определению f имеем

$$\widehat{\nu}x = \{\varphi_{f(x,y)} : y \in \mathbb{N}\}$$

для всех x. Пусть теперь μ — произвольная вычислимая нумерация класса $\mathcal{F}$. Выберем вычислимую функцию h такую, что

$$\mu x = \{\varphi_{h(x,y)} : y \in \mathbb{N}\}$$

для всех x. Тогда для Σ^0_2-вычислимой нумерации ν семейства $\mathcal{A}$, определенной равенством

$$\nu x = \{y : \exists z\ \exists n\ \forall m \geqslant n\ [\varphi_{h(x,z)}(0) = y\ \&\ \varphi_{h(x,z)}(m) = 1]\},$$

справедливо $\mu = \widehat{\nu}$.

В условии предложения 1 все семейства класса $\mathcal{F}$, рассматриваемые как подмножества бэровского пространства, имеют равные замыкания. Для конечных классов $\mathcal{F}$ справедливо также и обратное утверждение: если замыкания всех семейств заданного класса $\mathcal{F}$ равны, то $\mathcal{L}^0_1(\mathcal{F})$ изоморфна полурешетке Роджерса некоторого конечного семейства Σ^0_2-множеств. Более того, справедливо

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{F}$ — конечный класс вычислимых семейств тотальных функций, замыкания которых совпадают, и $\mathcal{A}$ — конечное семейство Σ^0_2-множеств. Если $(\mathcal{F}, \subseteq) \cong (\mathcal{A}, \subseteq)$, то $\mathcal{L}^0_1(\mathcal{F}) \cong \mathcal{L}^1(\mathcal{A})$.*

Схема доказательства. Будем считать, что $\emptyset \notin \mathcal{F}$, так как в противном случае предложение тривиально. Пусть

$$\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\},\ \mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$$

и $A_i \subseteq A_j$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$. Фиксируем такой набор конечных множеств $F_0, F_1, \ldots, F_n$, что для всех $i, j \leqslant n$

1) $F_i \subseteq A_i$,
2) $F_i \subseteq A_j \Rightarrow A_i \subseteq A_j$,
3) $A_i \subseteq A_j \Rightarrow F_i \subseteq F_j$.

Так как каждое из семейств $\mathcal{F}_i$, $i \leqslant n$, вычислимо, можно фиксировать равномерно вычислимую по i, j последовательность функций f_{ij} такую, что

$$\mathcal{F}_i = \{f_{ij} : j \in \mathbb{N}\}.$$

Покажем, что соответствие $\nu \mapsto \widehat{\nu}$, где $\nu x = A_i \Leftrightarrow \widehat{\nu}x = \mathcal{F}_i$, индуцирует изоморфизм из $\mathcal{L}^1(\mathcal{A})$ на $\mathcal{L}^0_1(\mathcal{F})$. По определению $\mu \leqslant \nu \Leftrightarrow \widehat{\mu} \leqslant \widehat{\nu}$. Сперва докажем, что каждая из нумераций $\widehat{\nu}$ вычислима. Поскольку Σ^0_2-индекс множества νx может быть найден равномерно по x, существует вычислимая функция $h : \mathbb{N}^2 \to \{0, \ldots, n\}$ такая, что $\nu x = A_i$ тогда и только тогда, когда

a) $\exists^\infty s\, [h(x,s) = i]$,
b) $\exists s \forall t \geqslant s\, [h(x,s) = i\, \&\, F_i \subseteq F_{h(x,t)}]$.

Определим вычислимую функцию f, для которой

$$\widehat{\nu}x = \{\varphi_{f(x,y)} : y \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть $d(x,t,s) = 1 + t + \max\{v < s : 0 < v \mathbin{\&} F_{h(x,t+v)} \nsubseteq F_{h(x,t+v+1)}\}$ (считаем $\max\emptyset = 0$). Положим

$$\varphi_{f(x,\langle y,t\rangle)}(s) = \begin{cases} f_{h(x,t)y}(s), & \text{если } \forall v \leqslant s\ [F_{h(x,t)} \subseteq F_{h(x,t+v)}]; \\ f_{h(x,d(x,t,s))z}(s) & \text{в противном случае, где} \\ & z = \min\{u : \forall v < s\ [\varphi_{f(x,\langle y,t\rangle)}(v) = f_{h(x,d(x,t,s))u}(v)]\}. \end{cases}$$

Поскольку замыкания всех семейств $\mathcal{F}$ равны, такое z всегда существует.

Пусть теперь μ — произвольная вычислимая нумерация класса $\mathcal{F}$ и f — вычислимая функция, для которой $\mu x = \{\varphi_{f(x,y)} : y \in \mathbb{N}\}$. Фиксируем набор конечных семейств функций $\mathcal{H}_i$, $i \leqslant n$, удовлетворяющих условиям 1)–3) с заменой F_i на $\mathcal{H}_i$ и A_i на $\mathcal{F}_i$. Рассмотрим нумерацию ν семейства $\mathcal{A}$, определенную условием

$$\nu x = A_i \Leftrightarrow \mu x = \mathcal{F}_i.$$

Покажем, что ν является Σ^0_2-вычислимой. Действительно,

$$y \in \nu x \Leftrightarrow \exists i\,[y \in A_i \mathbin{\&} A_i \subseteq \nu x],$$

$$A_i \subseteq \nu x \Leftrightarrow \mathcal{F}_i \subseteq \mu x \Leftrightarrow \mathcal{H}_i \subseteq \mu x \Leftrightarrow \exists k\ \exists y_0, \ldots, y_k\ [\mathcal{H}_i = \{\varphi_{f(x,y_j)} : j \leqslant k\}].$$

Таким образом, ν Σ^0_2-вычислима и $\mu = \widehat{\nu}$.

Используя критерий существования универсальных арифметических нумераций конечных семейств, найденный в работе [3], и предложение 2, получим соответствующий критерий для конечных классов вычислимых семейств тотальных функций $\mathcal{F}$, имеющих равные замыкания. Именно, $\mathcal{F}$ обладает универсальной вычислимой нумерацией тогда и только тогда, когда он содержит наименьшее по включению семейство. Пусть теперь $\mathcal{F}$ — произвольный конечный класс вычислимых семейств тотальных функций.

Теорема. *$\mathcal{F}$ обладает универсальной вычислимой нумерацией тогда и только тогда, когда каждый его подкласс, состоящий из всех семейств с равным замыканием, имеет наименьшее по включению семейство.*

Приведем схему доказательства теоремы. Пусть

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}^0_0, \ldots, \mathcal{F}^0_{N_0}; \mathcal{F}^1_0, \ldots, \mathcal{F}^1_{N_1}; \ldots; \mathcal{F}^k_0, \ldots, \mathcal{F}^k_{N_k}\},$$

$\overline{\mathcal{F}}^i_0 \neq \overline{\mathcal{F}}^j_0$ при $i < j \leqslant k$, $\overline{\mathcal{F}}^i_j = \overline{\mathcal{F}}^i_l$ при $i \leqslant k$ и $j, l \leqslant N_i$. Используя предложение 2 и упомянутый критерий из [3], покажем, что $\mathcal{F}$ имеет универсальную нумерацию тогда и только тогда, когда каждый из классов $\{\mathcal{F}^i_0, \ldots, \mathcal{F}^i_{N_i}\}$, $i \leqslant k$, имеет универсальную нумерацию. Пусть каждый из классов $\mathcal{C}_i = \{\mathcal{F}^i_0, \ldots, \mathcal{F}^i_{N_i}\}$ имеет универсальную нумерацию μ_i. Будем считать, что $\mathcal{F}^i_0$ — наименьшее по включению семейство $\mathcal{C}_i$. Фиксируем набор $F_0, \ldots, F_k$ конечных подмножеств $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, удовлетворяющих для всех $i, j \leqslant k$ условиям

i) $\forall \sigma \in F_i\ \big[[\sigma] \cap \mathcal{F}^i_0 \neq \varnothing\big]$,

ii) $\forall \sigma \in F_i\ \big[[\sigma] \cap \mathcal{F}^j_0 \neq \varnothing\big] \Rightarrow \overline{\mathcal{F}}^i_0 \subseteq \overline{\mathcal{F}}^j_0$,

iii) $\overline{\mathcal{F}}^i_0 \subseteq \overline{\mathcal{F}}^j_0 \Rightarrow F_i \subseteq F_j$,

где через $[\sigma]$ обозначается базовая окрестность в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, порожденная строкой σ. Пусть $\{\alpha_e\}_{e \in \mathbb{N}}$ — равномерное перечисление вычислимых нумераций всех классов семейств. Для каждого $i \leqslant k$ рассмотрим в. п. множество

$$M_i = \{x : \forall \sigma \in F_i\ \big[[\sigma] \cap \alpha_e x \neq \varnothing\big] \text{ или } \alpha_e x \text{ не является семейством тотальных функций}\}.$$

Фиксируем вычислимое перечисление $\{x^i_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ множества M_i и определим нумерацию α^i_e класса $\mathcal{C}_i$ такую, что $\alpha^i_e n = \mathcal{F}^i_m$, $m \leqslant N_i$, если $\alpha_e x^i_n = \mathcal{F}^i_m$. Теперь равномерно по набору чисел $e, z_0, \ldots, z_k$ можно определить нумерацию ν класса $\mathcal{F}$, при этом $\alpha_e \leqslant \nu$, если $\alpha_e^i = \mu_i\varphi_{z_i}$ для всех $i \leqslant k$. Искомая универсальная нумерация является сочленением всех таких нумераций ν.

Обратно, пусть $\mathcal{F}$ обладает универсальной вычислимой нумерацией μ. Для каждого $i \leqslant k$ рассмотрим множество

$$K_i = \{x : \forall\sigma \in F_i \ \big[[\sigma] \cap \mu x \neq \varnothing\big]\}.$$

Фиксируем вычислимое перечисление $\{x_j^i\}_{j\in\mathbb{N}}$ множества K_i и положим $\nu^i n$ равным μx_n^i, если $\mu x_n^i \in \mathcal{C}_i$, и $\mathcal{F}_0^i$ в противном случае. Поскольку μ является универсальной нумерацией $\mathcal{F}$, ν^i является универсальной для $\mathcal{C}_i$.

Литература

[1] Гончаров С.С., Сорби А. *Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса*, Алгебра и логика, **36** (6), 621–641 (1997).

[2] Подзоров С.Ю. *Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций*, Алгебра и логика, **42** (2), 211–226 (2003).

[3] Badaev S.A., Goncharov S.S., Sorbi A. *Completeness and universality of arithmetical numberings*, in: S.B. Cooper, S.S. Goncharov (Eds.), Comp. and models (Kluwer Academic/Plenum Publ., New York, 2003), 11–44.

[4] Бадаев С.А., Гончаров С.С., Сорби А. *Об элементарных теориях полурешеток Роджерса*, Алгебра и логика, **44** (3), 261–268 (2005).

[5] Бадаев С.А., Гончаров С.С. *Обобщенно вычислимые универсальные нумерации*, Алгебра и логика, **53** (5), 555–569 (2014).

[6] Ершов Ю.Л. *Теория нумераций* (Наука, М., 1977).

[7] Калимуллин И.Ш., Файзрахманов М.Х. *Иерархия классов семейств и n-низкие степени*, Алгебра и логика, **54** (4), 536–541 (2015).

[8] Faizrahmanov M., Kalimullin I. *The enumeration spectrum hierarchy of n-families*, Math. Log. Quat., 2016 (принята к печати).

[9] Faizrahmanov M., Kalimullin I. *The enumeration spectrum hierarchy of α-families and Low$_\alpha$ degrees*, J. Univ. Comp. Sci., 2016 (отправлена в печать).

М.Х. Файзрахманов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com

M.Kh. Faizrakhmanov

Universal computable enumerations of finite classes of families of total functions

Abstract. In the paper we introduce the notion of a computable enumeration of a class of families. We prove a criteria for the existence of uiversal computable enumerations of finite classes of computable families of total functions. In particular, we show that there is a finite computable class of families of total functions without universal computable enumerations.

Keywords: computable enumeration, universal enumeration, class of families, arithmetical enumeration.

M.Kh. Faizrakhmanov

Kazan (Volga Region) Federal University
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com