ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.548.9

В.Н. КУТРУНОВ, З.С. КУРЯТА

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В статье методами кватернионных функций с использованием интегральных тождеств построена система интегральных уравнений для восстановления векторного поля по его ротору и дивергенции.

Определение. Кватернионами называются числа $a_0+a_ie_i=a_0+a$, где e_i — мнимые единицы, a_0, a_i $(i=1,2,3)$ – действительные числа, a — мнимый кватернион [1]–[5]. Повторяющийся индекс означает суммирование.

Действия над кватернионами определяются через действия над мнимыми единицами. Если на мнимые единицы e_i смотреть как на орты декартового базиса, то основные операции между ними могут быть выражены через скалярные и векторные произведения

$$e_i^2=e_ie_i=-e_i\cdot e_i=-1,\quad e_ie_j=e_i\times e_j=e_{ijk}e_k,\quad i\neq j,$$

e_{ijk} — символы Леви-Чивита.

Эти соотношения позволяют интерпретировать операцию умножения кватернионов $z_1=a_0+a$, $z_2=b_0+b$ через скалярные и векторные произведения

$$z_1z_2=a_0b_0+a_0b+b_0a+a\times b-a\cdot b. \tag{1}$$

Здесь a_0, b_0 — действительные, a, b — мнимые части кватернионов z_1, z_2. В правой части (1) кватернионы рассматриваются как векторы. Произведение кватернионов некоммутативно, верен сочетательный закон. Кватернионы становятся функциями, если все их компоненты зависят от координат (x_1,x_2,x_3).

Обозначим через $\nabla=e_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ символический дифференциальный кватернионный оператор Гамильтона, $h=\nabla\frac{1}{|r|}$, $|r|=|x-y|$, $x,y\in V^{\pm}$, где V^+ — область трехмерного пространства, ограниченная поверхностью S, V^- — дополнение к области V^+, n — внешняя нормаль в точках поверхности S. В кватернионных записях радиус-векторы x, y и нормаль $n=n_ie_i$ имеют смысл мнимых кватернионов, а в векторных — смысл векторов.

Построим интегральные уравнения векторного поля по его ротору и дивергенции, используя утверждение из ([7], с. 178).

Теорема 1. *Пусть S — регулярная поверхность, ограничивающая объем V^+, и пусть в каждой точке V^+ определены ротор и дивергенция некоторого векторного поля q*

$$\nabla\times q=\Psi, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot q=-\Psi_0. \tag{3}$$

Тогда существует единственное решение системы (2), (3) *при условии, что на границе известна нормальная составляющая вектора q*

$$n\cdot q|_S=f, \tag{4}$$

и функции Ψ_0, Ψ, f удовлетворяют соотношениям

$$\nabla \cdot \Psi = 0, \quad \int_S f\, dS = -\int_{V^+} \Psi_0 dV. \tag{5}$$

Аналогичная теорема имеет место и для области V^- при дополнительном условии $\lim q(x) = 0$, $|x| \to \infty$.

Если ввести кватернион $P = \Psi_0 + \Psi$, то тогда система уравнений (2), (3) записывается в виде одного кватернионного равенства

$$\nabla q = P. \tag{6}$$

Здесь q — мнимый кватернион, т. е. равна нулю его действительная часть q_0. Предположим, что для кватерниона P выполнены условия (5), тогда на основании теоремы 1 существует единственный кватернион q, решающий уравнение (6) и удовлетворяющий граничному условию (4).

Доопределение на границе достигается решением интегральных уравнений [6]

$$q(y) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_S h n_x q(x) dS_x - \frac{1}{2\pi}\int_{V^\pm} h\nabla q(x) dV_x$$

или их векторного аналога

$$q_0 = \mp B q_0 \mp F q - \Phi_0, \quad q = \pm C q_0 \pm D q - \Phi, \tag{7}$$

где

$$B q_0 = \frac{1}{2\pi}\int_S h \cdot n q_0 dS_x, \quad F q = \frac{1}{2\pi}\int_S (h \times n) \cdot q\, dS_x,$$
$$D q = \frac{1}{2\pi}\int_S [(h \times n) \times q - (h \cdot n) q] dS_x, \quad C q_0 = \frac{1}{2\pi}\int_S h \times n q_0 dS_x$$

и

$$\Phi_0 + \Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{V^\pm} h\nabla q\, dV = \frac{1}{2\pi}\int_{V^\pm} h(\Psi_0 + \Psi) dV.$$

Восстановление в области выполняется по формуле [6]

$$\int_S h n_x q(x) dS_x - \int_{V^+} h\nabla q(x) dV_x = \begin{cases} 0, & y \in V^-; \\ 4\pi q(y), & y \in V^+. \end{cases} \tag{8}$$

Так как $q_0 = 0$, то из уравнений (7) следует, что для определения векторного поля q, заданного в области V^+, необходимо найти сначала его граничное значение из системы четырех граничных интегральных и одного алгебраического уравнений

$$F q = -\Phi_0, \quad D q = q + \Phi, \quad n \cdot q = f. \tag{9}$$

При сделанных предположениях она имеет единственное решение.

Для восстановления векторного поля в области V^- система уравнений запишется в виде

$$F q = \Phi_0, \quad D q = -q - \Phi, \quad n \cdot q = f. \tag{10}$$

В частном случае однородных уравнений (2), (3) $\Psi_0 = \Psi = 0$ и в предположении $f = 0$ уравнения (9), (10) перейдут в систему

$$F q = 0, \quad D q = \pm q, \quad n \cdot q = 0. \tag{11}$$

Так как в данном случае условия (5) выполнены, то единственным решением этой системы является $q \equiv 0$.

Сведем систему пяти уравнений (9) сначала к трем, а затем к двум уравнениям, всякий раз доказывая эквивалентность преобразования.

Теорема 2. *Система пяти уравнений* (9) *эквивалентна системе из трех уравнений*

$$Fq = -\Phi_0, \quad n \cdot Dq = n \cdot q + n \cdot \Phi = f + n \cdot \Phi, \quad n \cdot q = f. \tag{12}$$

Доказательство. Системе (12) удовлетворяет единственное решение системы (9). Пусть v — еще одно решение системы (12). Подстановка v в (9) приводит к равенствам

$$Fv = -\Phi_0, \quad Dv = w + \Phi, \quad n \cdot v = f. \tag{13}$$

Здесь $w \neq v$, иначе система (9) имела бы второе решение. Из сравнения (12) и (13) следует также $n \cdot w = f$. Вычитая из (9) соответствующие равенства (13), найдем

$$F(q - v) = 0, \quad D(q - v) = q - w, \quad n \cdot (q - v) = 0. \tag{14}$$

Воспользуемся тождествами из [6], верными для произвольных векторов

$$B^2 q_0 - FC q_0 = q_0, \quad -BFq + FDq = 0, \quad CBq_0 - DCq_0 = 0, \quad -CFq + D^2 q = q. \tag{15}$$

Результат подстановки в (15) значений $F(q - v)$ и $D(q - w)$ имеет вид

$$F(q - w) = 0, \quad D(q - w) = q - v, \quad n \cdot (q - w) = 0. \tag{16}$$

Вычитая еще раз из равенств (14) соотношения (16), получим

$$F(w - v) = 0, \quad D(w - v) = -(w - v), \quad n \cdot (w - v) = 0. \tag{17}$$

Сравнение системы (17) с равенствами (11) приводит к выводу, что $w - v \equiv 0$. Тогда из (13) следует, что решение v системы уравнений (12) удовлетворяет уравнениям (9). Единственность этого решения следует из (14). $\square$

Система уравнений (12) определяет вектор q в точках поверхности S. Так как нормальная составляющая этого вектора $n \cdot q = f$ в каждой точке известна, то систему трех уравнений (12) можно свести к системе двух уравнений. Для этого надо ввести местную косоугольную систему координат. Пусть p — произвольный постоянный вектор. Разложим искомый вектор $q = q_1 n + q_2 p + q_3 (n \times p)$ по базису n, p, $n \times p$. Умножив это равенство скалярно и векторно на вектор n, получим

$$n \cdot q = q_1 + q_2 (n \cdot p) = f, \tag{18}$$
$$n \times q = q_2 (n \times p) + q_3 [n \times (n \times p)]. \tag{19}$$

Учитывая операторы из [6] F и D, первые два уравнения (15) представим в виде

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi} \int_S h \cdot [q_2 (n \times p) + q_3 (n \times (n \times p))] dS = -\Phi_0, \\ n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S h \times [q_2 (n \times p) + q_3 (n \times (n \times p))] dS = f + n \cdot \Phi + n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_S h f \, dS. \end{gathered} \tag{20}$$

В процессе решения исходной задачи из системы (20) единственным образом определяются величины q_2, q_3, а компонента q_1 определяется из (18). Таким образом, на границе векторное поле восстанавливается полностью. Векторное поле в области V^+ восстанавливается с помощью соотношения (8) через найденное граничное значение этого поля, не требуется численно дифференцировать найденные величины. Поступая аналогично, можно записать все необходимые равенства для решения задачи в области V^-.

Литература

1. Кантор И.Л., Солодовников А.С. *Гиперкомплексные числа.* – М.: Наука, 1973. – 144 с.
2. Кравченко В.В. *Кватернионнозначные интегральные представления гармонических электромагнитных и спинорных полей* // ДАН. – 1995. – Т. 341. – № 5. – С. 603–605.
3. Пименов А.А., Пушкарев В.И. *Применение аппарата кватернионов к обобщению метода Колосова–Мусхелишвили на пространственные задачи теории упругости* // ПММ. – 1991. – Т. 55. – № 3. – С. 422– 427.
4. Челноков Ю.Н. *Кватернионы и динамика управляемого движения твердого тела*// Механ. твердого тела. – 1996. – № 2. – С. 13–26.
5. Баничук Н.В., Шаранюк А.В. *Применение кватернионов для решения трехмерных задач оптимизации распределения материала в упругих телах* // Международн. конф. по пробл. оптимиз. в механ. деформ. тверд. тела. Тез. докл. – Н. Новгород, 1995. – С. 7–8.
6. Кутрунов В.Н. *Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости* // ПММ. – 1992. – Т. 56. – № 5. – С. 864–868.
7. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике.* – М.: Наука, 1978. – 832 с.

Тюменская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступили
первый вариант 23.04.1996
окончательный вариант 03.03.1999