И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 517.977

Е.А. ЛУТКОВСКАЯ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для линейно-квадратичной задачи оптимального управления с произвольными параметрами или “возмущениями” задачи предлагается способ построения оптимального управления в виде функции от независимого переменного и параметров. Такое управление, сохраняющее свойство оптимальности при любых возмущениях задачи, можно отнести к классу робастных управлений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу минимизации интегрального квадратичного функционала

$$J(u)=\int_T[\langle g(t),x(t)\rangle+\langle d(t),u(t)\rangle+\tfrac{1}{2}\langle G(t)x(t),x(t)\rangle+\tfrac{1}{2}\langle D(t)u(t),u(t)\rangle]dt, \tag{1.1}$$

определенного на решениях линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u+C(t)p+f(t) \tag{1.2}$$

с условиями

$$x(t_0)=q, \quad x(t_1)=r \tag{1.3}$$

на концах отрезка $T=[t_0,t_1]$. Здесь $x=x(t)$, $x(t)\in E^n$, — состояние процесса, $u=u(t)$, $u(t)\in E^r$, — управление процессом, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — символ скалярного произведения векторов в E^n или в E^r, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $G(t)$, $D(t)$, $f(t)$, $g(t)$, $d(t)$ — заданные непрерывные матричные функции размерности $(n\times n)$, $(n\times r)$, $(n\times k)$, $(n\times n)$, $(r\times r)$, $(n\times 1)$, $(n\times 1)$, $(r\times 1)$ соответственно, причем матрица $G(t)$ симметрическая и неотрицательно определенная, а $D(t)$ — положительно определенная симметрическая матрица в каждом $t\in T$, векторы $p\in E^k$, $q\in E^n$, $r\in E^n$ являются произвольными параметрами, $\alpha=(p,q,r)$, т. е. α — произвольные возмущения задачи. Требуется найти оптимальное управление u^* в виде функции $u^*=u^*(t,\alpha)$.

2. Метод решения

В поставленной задаче при каждом фиксированном значении параметров $\alpha=(p,q,r)$ оптимальное управление u^* удовлетворяет принципу максимума Л.С. Понтрягина, поэтому решение краевой задачи

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)D^{-1}(t)B(t)'\psi-B(t)D^{-1}(t)d(t)+C(t)p+f(t), \quad \dot{\psi}=G(t)x-A(t)'\psi+g(t), \tag{2.1}$$

$$x(t_0)=q, \quad x(t_1)=r \tag{2.2}$$

определяет оптимальное управление

$$u^*(t)=D^{-1}(t)B(t)'\psi-D^{-1}(t)d(t) \tag{2.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Федеральной целевой программы “Интеграция”, проект А 0037.

для произвольных $\alpha = (p, q, r)$.

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\overline{B}(t) = B(t)D^{-1}(t)B(t)', \quad \widetilde{f}(t) = f(t) - B(t)D^{-1}(t)d(t), \tag{2.4}$$

$$\overline{A}(t)(2n \times 2n) = \begin{bmatrix} A(t) & \overline{B}(t) \\ G(t) & -A(t)' \end{bmatrix}, \qquad \overline{C}(t) = \begin{bmatrix} C(t)(n \times k) & 0(n \times k) \\ 0(n \times k) & 0(n \times k) \end{bmatrix},$$

$$z(t) = (x(t), \psi(t)) \in E^{2n}, \ \ \overline{f}(t) = (\widetilde{f}(t), g(t)) \in E^{2n}, \ \ \overline{p} = (p, 0) \in E^{2k}, \ \ b = (q, r) \in E^{2n},$$

$$L_0 = \begin{bmatrix} I(n \times n) & 0(n \times n) \\ 0(n \times n) & 0(n \times n) \end{bmatrix}, \qquad L_1 = \begin{bmatrix} 0(n \times n) & 0(n \times n) \\ I(n \times n) & 0(n \times n) \end{bmatrix};$$

здесь I — единичная матрица, 0 — нулевая матрица. С учетом этих обозначений краевая задача (2.1), (2.2) примет вид

$$\dot{z} = \overline{A}(t)z + \overline{C}(t)\overline{p} + \overline{f}(t), \quad L_0 z(t_0) + L_1 z(t_1) - b = 0, \tag{2.5}$$

где $\operatorname{rank}[L_0 L_1] = 2n$.

Запишем [1], [2] аналитическое представление решения краевой задачи (2.5). Для этого представим решение задачи Коши

$$\dot{Z} = \overline{A}(t)Z, \quad Z(t_0) = I \tag{2.6}$$

в форме клеточной матрицы

$$Z(t) = \begin{bmatrix} Z_{11}(t) & Z_{12}(t) \\ Z_{21}(t) & Z_{22}(t) \end{bmatrix} \qquad \left(Z^{-1}(t) = \begin{bmatrix} Z_{11}^*(t) & Z_{12}^*(t) \\ Z_{21}^*(t) & Z_{22}^*(t) \end{bmatrix} \right),$$

где каждая клетка — матричная функция размерности $(n \times n)$. Тогда если

$$\det[L_0 + L_1 Z(t_1)] \neq 0, \tag{2.7}$$

то решение краевой задачи (2.5) существует, единственно и представимо в форме

$$z(t) = Z(t)[L_0 + L_1 Z(t_1)]^{-1} b - Z(t)[L_0 + L_1 Z(t_1)]^{-1} L_1 Z(t_1) \int_{t_0}^{t_1} Z^{-1}(t)[\overline{C}(t)\overline{p} + \overline{f}(t)]dt + \\ + Z(t) \int_{t_0}^{t} Z^{-1}(\tau)[\overline{C}(\tau)\overline{p} + \overline{f}(\tau)]d\tau. \tag{2.8}$$

Теперь из решения (2.8) выделим подвектор $\psi(t)$ и подставим его в формулу (2.3). В результате оптимальное управление примет вид

$$u^*(t, \alpha) = P(t)p + Q(t)q + R(t)r + \eta(t), \tag{2.9}$$

где матричные функции $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$, $\eta(t)$ выписываются в явном виде. Для их подсчета требуется решить несколько задач Коши и провести элементарные алгебраические операции. Эти операции можно записать в виде алгоритма, реализующего оптимальное управление (2.9).

Заметим, что условие разрешимости (2.7) краевой задачи (2.5) по сути является условием существования оптимального управления (2.9) для задачи (1.1)–(1.3).

3. Алгоритм метода

1) Вычислить $D^{-1}(t)$, и по формулам (2.4) найти $\overline{B}(t)$ и $\widetilde{f}(t)$.
2) Решить матричную задачу Коши (2.6) и выделить клетки $Z_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, матричной функции $Z(t)$.
3) Проверить условие разрешимости (2.7), которое примет вид

$$\det Z_{12}(t_1) \neq 0, \tag{3.1}$$

вычислить $\Theta = Z_{12}^{-1}(t_1)$, $\Theta_1 = Z_{12}^{-1}(t_1) Z_{11}(t_1)$.

4) Решить матричную задачу Коши $\dot{S} = -S\overline{A}(t)$, $S(t_0) = I$. Ее решением ([3], с. 197) является $S(t) = Z^{-1}(t)$. Выделить клетки $Z^*_{ij}(t)$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, этой матрицы.

5)Решить матричные задачи Коши $\dot{Y}_1 = Z^*_{11}(t)C(t)$, $Y_1(t_0) = 0$; $\dot{Y}_2 = Z^*_{21}(t)C(t)$, $Y_2(t_0) = 0$, где Y_1, Y_2 имеют размерность $(n \times k)$.

6) Решить векторные задачи Коши $\dot{y}^{(1)} = Z^*_{11}(t)\widetilde{f}(t) + Z^*_{12}(t)g(t)$, $y^{(1)}(t_0) = 0$; $\dot{y}^{(2)} = Z^*_{21}(t)\widetilde{f}(t) + Z^*_{22}(t)g(t)$, $y^{(2)}(t_0) = 0$.

7) Вычислить P, Q, R, η по формулам

$$P(t) = D^{-1}(t)B(t)'[Z_{21}(t)Y_1(t) + Z_{22}(t)[Y_2(t) - \Theta_1 Y_1(t_1) - Y_2(t_1)]],$$

$$Q(t) = D^{-1}(t)B(t)'[Z_{21}(t) - Z_{22}(t)\Theta_1], \quad R(t) = -D^{-1}(t)B(t)'Z_{22}(t)\Theta,$$

$$\eta(t) = D^{-1}(t)B(t)'[Z_{21}(t)y^{(1)}(t) + Z_{22}(t)[y^{(2)}(t) - \Theta_1 y^{(1)}(t_1) - y^{(2)}(t_1)]] - D^{-1}(t)d(t).$$

Заметим, что при численном решении приведенных задач Коши матрицы P, Q, R и вектор η запоминаются в узлах численного интегрирования. Такие таблицы лежат в основе реализации оптимального управления по формуле (2.9) для любых заданных $x(t_0) = q$, $x(t_1) = r$ и параметров p, входящих в правую часть системы (1.2). Если провести аппроксимацию элементов этих матриц, например, полиномами с заданной точностью по известным программам, то получим приближенный синтез оптимального управления в форме (2.9). Параметрический синтез (2.9) возможен при выполнении условия (3.1).

Наконец, при $f = g = d = 0$ (в задаче (1.1)-(1.3)) в параметрическом синтезе (2.9) $\eta = 0$.

Для иллюстрации полученного приведем

Пример. $J(u) = \int\limits_{0.5}^{1} [2tx(t) + \frac{1}{t}u(t)]dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0.5}^{1} \frac{u^2(t)}{t^2}dt \to \min$, $\dot{x} = \frac{1}{t}x + u + tp + t^2$, $x(0.5) = q$, $x(1) = r$. Для этой задачи

$$Z(t) = \begin{pmatrix} 2t & \frac{1}{2}t^2 - \frac{t}{4} \\ 0 & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}, \quad Z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2t} & -\frac{1}{2}t^2 + \frac{t}{4} \\ 0 & 2t \end{pmatrix}, \quad Y_1(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}, \ \ Y_2(t) = 0,$$

$$y^{(1)}(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \frac{35}{192}, \ \ y^{(2)}(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{6}.$$

Оптимальный параметрический синтез (2.9) имеет вид $u^*(t,\alpha) = -tp - 4tq + 2tr + \frac{2}{3}t^4 - \frac{17}{16}t$.

Литература

1. Васильева О.О., Мизуками К. *Оптимальное управление краевой задачей* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 12. – С. 33–41.
2. Vasiliev O.V., Lutkovskaya E.A. *On a problem of parametric synthesis of optimal controls* // Proc. of Internat. Conf. "Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization". – Minsk, 1998. – V. 1. – P. 65–67.
3. Беллман Р.М. *Введение в теорию матриц.* – М.: Наука, 1976. – 352 с.

Иркутский государственный университет

Поступила 05.07.1999