ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 9 (472)

УДК 517.54

Ю.А. ПЕШКИЧЕВ

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО КУДРЯВЦЕВУ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Кроме известной уже непрерывности по Гёльдеру, при рассмотрении искажения квазиконформных отображений $f : G \to E^n$ открытой области $G \subset E^n$, $n \geq 3$, на гиперповерхностях в G возникает понятие $(n-1)$-непрерывности, которое присуще векторной функции

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)], \quad m \geq n-1,$$

и которое вырождается при $m < n-1$. Поскольку такая непрерывность проявляется только при ограниченности вариации Кудрявцева квазиконформного отображения, то естественно называть ее непрерывностью по Кудрявцеву.

Здесь и далее E^n — евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, H_{n-1} — мера Хаусдорфа в E^n размерности $n-1$, $B_n(x,r)$ — шар в E^n с центром в точке x радиуса r, $S_{n-1}(R)$ — граница шара $B_n(R) = B_n(0,R)$,

$$\sigma_{n-1} = H_{n-1}(S_{n-1}(1)),$$
$$L = \{x \in E^n : x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0\},$$
$$C = \{x \in L : x_1^2 + x_n^2 = 1\}, \quad \Phi(x) = \frac{(x_1, 0, \dots, 0, x_n)}{\sqrt{x_1^2 + x_n^2}} : E^n \setminus L \to C$$

— композиция проектирования пространства E^n на $(n-2)$-ось L с последующим радиальным проектированием подпространства L на окружность C, $P_t = B_n(R) \cap \Phi^{-1}(t)$ — полугипершар, вращающийся при изменении параметра $t \in C$ вокруг $(n-2)$-оси L.

Для гомеоморфизма $f : G \to E^n$ соболевского класса $W_n^1(G)$ и числа $p \geq 1$ рассмотрим p-вариацию Кудрявцева [1] $\overset{p}{\underset{G}{\bigvee}} f = \int_G |Jf(x)|^p dx$, где $Jf(x)$ — якобиан f в точке $x \in G$, существующий почти всюду в G.

Отображение $f : G \to E^n$ класса $W_n^1(G)$ называется q-квазиконформным ($q \geq 1$), если $|\nabla f(x)|^n \leq q|Jf(x)|$ для почти всех $x \in G$, где $|\nabla f(x)|$ — спектральная норма матрицы Якоби отображения f в точке x. Как следует из общей теории квазиконформных отображений [2], при их сужении на компактные подобласти p-вариация Кудрявцева конечна при достаточно близких к единице значениях параметра p. Отмеченное в названии статьи свойство проявится при $p > 2(n-1)/n$.

Теорема 1. *Если квазиконформный гомеоморфизм $f : B \to E^n$ шара $B = B_n(R)$ имеет ограниченную p-вариацию Кудрявцева при $p = \frac{\alpha(n-1)}{n(\alpha-1)}$, $1 < \alpha < 2$, то выполняется неравенство изопериметрического типа*

$$\inf_{t \in C} H_{n-1}(f(P_t)) \leq C(n,\alpha,q) R^{(n-\alpha)/\alpha} \Big(\overset{p}{\underset{B}{\bigvee}} f \Big)^{(\alpha-1)/\alpha}$$

с некоторой положительной постоянной $C(n,\alpha,q)$, зависящей только от параметров n, α и q.

Доказательство. Для почти всех $t \in C$ следы f на P_t абсолютно непрерывны по мере H_{n-1} [3], причем

$$H_{n-1}(f(P_t)) \le \int_{P_t} (q|Jf(x)|)^{(n-1)/n} H_{n-1}(dx).$$

При интегрировании этого неравенства по $t \in C$ используем первую обобщенную теорему Гульдина [4]:

$$2\pi \inf_{t\in C} H_{n-1}(f(P_t)) \le \int_B (q|Jf(x)|)^{(n-1)/n} \frac{dx}{\sqrt{x_1^2 + x_n^2}} \le$$
$$\le q^{(n-1)/n} \Big(\bigvee_B^p f \Big)^{(\alpha-1)/\alpha} \Big(\int_B (x_1^2 + x_n^2)^{-\alpha/2} dx \Big)^{1/\alpha}.$$

По той же теореме Гульдина полученный несобственный интеграл равен

$$\pi \int_{B_{n-1}(R)} x_1^{1-\alpha} H_{n-1}(dx),$$

где $B_{n-1}(R) = \{x \in B_n(R) : x_n = 0\}$. Теперь остается заметить, что после введения сферических координат последний несобственный интеграл преобразуется в произведение однократных интегралов

$$\int_0^R r^{n-\alpha-1} dr,\ \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi \cos^{1-\alpha}\varphi\, d\varphi,\ \int_0^\pi \sin^{n-4}\varphi\, d\varphi, \dots, \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi,$$

второй из которых сходится как несобственный интеграл при $\alpha < 2$.

Пусть L — произвольная $(n-2)$-плоскость в E^n, проходящая через точку x; C_L — единичная окружность с центром в точке x в 2-плоскости, проходящей через x и ортогональной L; Φ_L — композиционное проектирование пространства E^n на окружность C_L. Рассмотрим $(n-1)$-колебание непрерывного отображения $f : G \to E^n$ на шаре $B_n(x,r)$:

$$\operatorname{osc}_{n-1} f(x,r) = \inf_{L\in\Omega} \big\{ \inf_{t\in C_L} H_{n-1}[B_n(x,r) \cap \Phi_L^{-1}(t)] \big\},$$

где Ω — совокупность всех $(n-2)$-плоскостей L в E^n, проходящих через точку x.

Для непрерывно дифференцируемого отображения $f : G \to E^n$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{osc}_{n-1} f(x,r)}{r^{n-1}} \le \frac{1}{2}\sigma_{n-1} |\nabla f(x)|^{n-1},$$
$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{osc}_{n-1} f(x,r)}{r^{\gamma(n-1)}} = 0, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Учитывая результаты и конструкцию понятия вариации Кудрявцева [1], непрерывное отображение $f : G \to E^n$ назовем непрерывным по Кудрявцеву с показателем $\gamma \in (0,1)$, если для всех $x \in G$

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\operatorname{osc}_{n-1} f(x,r)}{r^{\gamma(n-1)}} \le \text{const} < \infty.$$

Теорема 2. *Если квазиконформный гомеоморфизм $f : G \to E^n$ имеет ограниченную p-вариацию Кудрявцева при $p = \frac{\alpha(n-1)}{n(\alpha-1)}$, $1 < \alpha < 2$, то отображение f непрерывно по Кудрявцеву с показателем $\gamma = \frac{n-\alpha}{\alpha(n-1)}$.*

Доказательство следует из сопоставления определения непрерывности по Кудрявцеву с геометрическим результатом теоремы 1 для последовательности уменьшающихся концентрических шаров с центром в точке $x \in G$.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. *О p-вариации отображений и суммируемости степеней производной Радона–Никодима* // УМН. – 1955. – Т. 10. – № 2. – С. 167–174.
2. Gehring F.W. *The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mappings* // Acta Math. – 1973. – V. 130. – P. 265–277.
3. Пешкичев Ю.А. *Абсолютная непрерывность следов аппроксимативно дифференцируемых вектор-функций* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 278. – № 3. – С. 549–551.
4. Пешкичев Ю.А. *Торы вращения в многомерном пространстве* // Экстремальные задачи теории функц. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1988. – С. 67–75.

Рудненский индустриальный институт

Поступила
26.05.1999