ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 514.762

К.В. СЕМЕНОВ

О ГЕОМЕТРИИ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Введение

В данной работе изучается дифференциально-геометрическая структура, порожденная эволюционным дифференциальным уравнением. Построен фундаментальный объект, определяющий геометрию уравнения. Найдена связность, охваченная продолженным фундаментальным объектом. Указаны условия, при которых связность может быть расширена до связности в расслоении с более широкой структурной группой и условия, при выполнении которых расширенная связность определяет представление нулевой кривизны для заданного эволюционного уравнения третьего порядка.

1. Фундаментальный объект

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка следующего вида:

$$u_t = \varphi(t, x^1, \dots, x^n, u, u_j, u_{jk}, u_{jkl}). \tag{$*$}$$

Здесь $t, x^1, \dots, x^n$ — независимые переменные; при этом $t = x^0$ — выделенная переменная (имеющая смысл "времени"), $x^1, \dots, x^n$ — пространственные переменные, u – неизвестная функция, u_j, u_{jk}, u_{jkl} — ее частные производные по переменным x^i до третьего порядка включительно. Условимся рассматривать $t, x^1, \dots, x^n, u$ как адаптированные локальные координаты расслоенного $(n+2)$-мерного многообразия $\mathbf{E}$ с расслоенной $(n+1)$-мерной базой $\mathbf{M}$, локальными координатами которой являются переменные $t, x^1, \dots, x^n$. Допустимыми преобразованиями локальных координат являются невырожденные преобразования вида

$$\begin{cases} \tilde t = \varphi^0(t); \\ \tilde x^i = \varphi^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n; \\ \tilde u = \varphi^{n+1}(t, x^1, \dots, x^n, u). \end{cases} \tag{1а}$$

Эти преобразования можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} t = \psi^0(\tilde t); \\ x^i = \psi^i(\tilde t, \tilde x^1, \dots, \tilde x^n), \quad i = 1, \dots, n; \\ u = \psi^{n+1}(\tilde t, \tilde x^1, \dots, \tilde x^n, u). \end{cases} \tag{1б}$$

Запишем уравнение $(*)$ в более общем виде

$$\lambda_0 - \varphi(t, x^1, \dots, x^n, u, \lambda_j, \lambda_{jk}, \lambda_{jkl}) = 0, \tag{2}$$

где $t, x^1, \dots, x^n, u, \lambda_j, \lambda_{jk}, \lambda_{jkl}$ $(j, k, l, \ldots = 0, 1, \ldots, n)$ — локальные координаты многообразия голономных 3-струй локальных сечений расслоения $\mathbf{E}$. Закон преобразования локальных координат голономных струй тот же, что и у соответствующих частных производных $u_t, u_j, u_{jk}, u_{jkl}$, например,

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial u} \frac{d\psi^0}{dt} \lambda_0, \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial u} \lambda_i.$$

Из вида преобразований локальных координат струй следует, что $t, x^i, u, \lambda_j, \lambda_{jk}, \lambda_{jkl}$ можно одновременно рассматривать и как часть локальных координат многообразия $\mathbf{J}^3\mathbf{E}$, и как всю совокупность локальных координат некоторого многообразия $\overline{\mathbf{J}}^3\mathbf{E}$, которое является фактор-многообразием многообразия $\mathbf{J}^3\mathbf{E}$. В дальнейшем наряду с многообразием $\overline{\mathbf{J}}^3\mathbf{E}$ нам придется рассматривать многообразие $\overline{\mathbf{J}}^4\mathbf{E}$, главными формами которого являются формы ω^i, ω^{n+1}, ω^{n+1}_j, ω^{n+1}_{jk}, ω^{n+1}_{jkl}, ω^{n+1}_{jklm}, и многообразие $\overline{\mathbf{J}}^5\mathbf{E}$, главными формами которого являются формы ω^i, ω^{n+1}, ω^{n+1}_j, $\omega^{n+1}_{i_1,\ldots,i_k}$, $k = 2, \ldots, 5$. Эти многообразия являются фактор-многообразиями многообразий $\mathbf{J}^4\mathbf{E}$ и $\mathbf{J}^5\mathbf{E}$.

В результате произвольного допустимого преобразования локальных координат уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial \tilde{u}} \frac{d\varphi^0}{dt} \tilde{\lambda}_0 - \varphi\Big|_{t=\psi^0(\tilde{t})} = 0.$$

В этом уравнении левая часть представляет собой функцию, заданную на $\overline{\mathbf{J}}^3\mathbf{E}$; сама эта функция не меняется при допустимых преобразованиях локальных координат, меняется только ее выражение в локальных координатах. Однако при подобных преобразованиях координат это уравнение теряет вид (2). Можем снова представить его в виде (2), умножив его на $\left(\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial \tilde{u}} \frac{d\varphi^0}{dt}\right)^{-1}$, но тогда, вообще говоря, изменится функция, стоящая в левой части уравнения (2).

Этого не произойдет, если допустимые преобразования будут удовлетворять условию

$$\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial \tilde{u}} \frac{d\varphi^0}{dt} = 1,$$

что имеет место, например, когда переменные t, x^i, u преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases} t = \tilde{t} + c, \\ x^i = \psi^i(\tilde{t}, \tilde{x}^1, \cdot, \tilde{x}^n), \\ u = \tilde{u} + \psi(\tilde{t}, \tilde{x}^1, \cdot, \tilde{x}^n). \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, если ограничимся преобразованиями вида (3), то выражение

$$\lambda_0 - \varphi(t, x^1, \ldots, x^n, u, \lambda_j, \lambda_{jk}, \lambda_{jkl})$$

является инвариантным, поэтому уравнение (2) задает на многообразии функцию. Преобразования вида (3) составляют группу, которая является подгруппой группы невырожденных преобразований (1).

Пусть

$$\omega^{\hat{i}};\ \omega^{n+1};\ \omega^{n+1}_{n+1};\ \omega^0_0;\ \omega^{\hat{i}}_{\hat{j}};\ \omega^{n+1}_{n+1};\ \omega^{n+1}_{\hat{j}};\ \omega^0_{00},\ \omega^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{k}};\ \omega^{n+1}_{n+1,n+1};\ \ldots \tag{4}$$

— последовательность симметричных по нижним индексам структурных форм расслоений голономных реперов многообразия $\mathbf{E}$. При этом формы $\omega^{\hat{i}}$; ω^{n+1}; $\omega^{n+1}_{\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ являются главными формами в расслоении голономных r-струй $\mathbf{J}^r\mathbf{E}$. В качестве главных форм могут, в частности, быть выбраны так называемые контактные формы, т. е. формы вида $\omega^{\hat{i}} = dx^{\hat{i}}$; $\omega^{n+1} = du - \lambda_{\hat{i}} dx^{\hat{i}}$; $\omega^{n+1}_{\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_k} = d\lambda_{\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_k \hat{j}} dx^{\hat{j}}$.

Замечание 1.1. Для любого сечения $\sigma \subset \mathbf{E}$, заданного уравнением $u = u(t, x^1, \ldots, x^n)$, можно рассматривать поднятые сечения $\sigma^r \subset \mathbf{J}^r\mathbf{E}$, заданные уравнениями

$$u = u(t, x^1, \ldots, x^n); \quad \lambda_{\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_k} = u_{\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Заметим, что интегральными многообразиями системы уравнений Пфаффа

$$\omega^{n+1} = \omega^{n+1}_{\hat{i}} = \cdots = \omega^{n+1}_{\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_k} = 0,$$

где ω^{n+1}, $\omega^{n+1}_{\hat{i}}, \ldots, \omega^{n+1}_{\hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_k}$ — контактные формы, являются поднятия $\sigma^{r+1} \subset \mathbf{J}^{r+1}\mathbf{E}$ сечений $\sigma \subset \mathbf{E}$ и только они.

Структурные уравнения, которым удовлетворяют структурные формы (4), включают уравнения

$$\begin{cases} d\omega^0 &= \omega^0 \wedge \omega^0_0, \\ d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^0 \wedge \omega^0_0, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \omega^{n+1}_{n+1} + \omega^j \wedge \omega^{n+1}_j + \omega^0 \wedge \omega^{n+1}_0 \end{cases} \tag{5}$$

и уравнения, которые получаются в процессе правильного продолжения (см. об этом в [1]) уравнений (5).

Дифференциал левой части уравнения (2) можно записать в виде

$$d(\lambda_0 - \varphi) = \omega^{n+1}_0 - F_0\omega^0 - F_i\omega^i - F\omega^{n+1} - F\omega^{n+1} - F^j\omega^{n+1}_j - F^{jk}\omega^{n+1}_{jk} - F^{jkl}\omega^{n+1}_{jkl}. \tag{6}$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом (с учетом (6) и структурных уравнений для форм (4)), получим соотношение следствием которого (в силу леммы Картана) являются разложение разности $\omega^{n+1}_{n+1} - \omega^0_0$ по главным формам многообразия $\overline{\mathbf{J}}^3\mathbf{E}$ (здесь ω^{n+1} заменена на $d(\lambda_0 - \varphi)$, что возможно в силу (6))

$$\omega^{n+1}_{n+1} - \omega^0_0 = \Phi^0_0\omega^0 + \Phi^0_i\omega_i + \Phi^0_{n+1}\omega^{n+1} + \Phi^{00}d(\lambda_0 - \varphi) - \Phi^{0j}\omega^{n+1}_j + \Phi^{0,jk}\omega^{n+1}_{jk} + \Phi^{0,jkl}\omega^{n+1}_{jkl}, \tag{7}$$

а также дифференциальные уравнения, которым которым удовлетворяют компоненты F^{jkl}, F^{jk}, F^j, F, F_i, F_0 (здесь равенство нулю имеет место по модулю главных форм многообразия $\overline{\mathbf{J}}^3\mathbf{E}$),

$$\begin{aligned}
&dF^{jkl} + F^{mkl}\omega^j_m + F^{jml}\omega^k_m + F^{jkm}\omega^l_m - F^{jkl}\omega^{n+1}_{n+1} = 0, \\
&dF^{jk} + F^{mk}\omega^j_m + F^{jm}\omega^k_m - F^{jk}\omega^{n+1}_{n+1} + \tfrac{3}{2}F^{uv(j}\omega^{k)}_{uv} - 3F^{jkm}\omega^{n+1}_{m,n+1} = 0, \\
&dF^i + F^m\omega^i_m - F^i\omega^{n+1}_{n+1} - 2F^{im}\omega^{n+1}_{m,n+1} + F^{uv}\omega^i_{uv} + F^{uvw}\omega^i_{uvw} - 3F^{iuv}\omega^{n+1}_{uv,n+1} = 0, \\
&dF - F\omega^{n+1}_{n+1} - F^m\omega^{n+1}_{m,n+1} - F^{uv}\omega^{n+1}_{uv,n+1} - F^{jkl}\omega^{n+1}_{jkl,n+1} = 0, \\
&dF_i + F_l\omega^l_i + F\omega^{n+1}_i + F^l\omega^{n+1}_{il} + F^{lk}\omega^{n+1}_{ilk} + F^{jkl}\omega^{n+1}_{ijkl} = 0, \\
&dF_0 + F_j\omega^j_0 - F\omega^{n+1}_0 + F^j\omega^{n+1}_{0j} + F^{jk}\omega^{n+1}_{0jk} + F^{jkl}\omega^{n+1}_{0jkl} = 0.
\end{aligned}$$

Замечание 1.2. В процессе продолжения уравнения (7) получаются уравнения для коэффициентов $\Phi^0_0, \Phi^0_i, \Phi^0_{n+1}, \ldots$ В частности,

$$\begin{aligned}
d\Phi^0_i - \Phi^0_m\omega^m_i + \omega^{n+1}_{i,n+1} = \Phi^0_{i,0} + \Phi^0_{i,j}\omega^i + \Phi^0_{i,n+1}\omega^{n+1} + \Phi^{00}_i d(\lambda_0 - \varphi) + \\
+ \Phi^{0,j}_i\omega^{n+1}_j + \Phi^{0,jk}_i\omega^{n+1}_{jk} + \Phi^{0,jkl}_i\omega^{n+1}_{jkl} + \Phi^{0,jklm}_i\omega^{n+1}_{jklm}.
\end{aligned}$$

Рассматривая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты F^{jkl}, F^{jk}, F^j, F, F_i, F_0, видим, что они суть компоненты поля геометрического объекта, заданного на многообразии $\overline{\mathbf{J}}^4\mathbf{E}$. Подобъектами данного объекта являются объекты $\{F^{jkl}, F^{jk}, F^j\}$; $\{F^{jkl}, F^{jk}\}$; $\{F^{jkl}\}$, причем $\{F^{jkl}\}$ является относительным тензором.

Объект с компонентами F^{jkl}, F^{jk}, F^j, F, F_i, F_0 условимся называть *фундаментальным объектом.*

Свойства дифференциально-геометрической структуры, определяемой заданием фундаментального объекта, условимся называть *геометрией дифференциального уравнения* (2).

В случае, если мы ограничимся преобразованиями локальных координат вида (3), задание фундаментального объекта равносильно определению (с точностью до постоянной) функции $\lambda_0 - \varphi$ (левой части уравнения (2)).

2. Фундаментальная связность

Допустим, что наряду с псевдотензором F^{jkl} на нашем многообразии определен обратный ему псевдотензор F_{jkl}, удовлетворяющий условию

$$F_{juv}F^{uvi} = \delta^i_j.$$

Замечание 2.1. Известно (см. [1], [2]), что такой тензор F^{jkl} можно построить, если существует некоторый охваченный объектом F^{jkl} относительный инвариант $J = J(F^{jkl})$. В частности, при $n = 2$ можно взять $J = \frac{2}{3}D$, где D — дискриминант кубической формы $\Phi = F^{jkl}y_jy_ky_l$. Тогда

$$F_{111} = \frac{1}{2J}\frac{\partial J}{\partial F^{111}}, \quad F_{112} = -\frac{1}{6J}\frac{\partial J}{\partial F^{112}}, \quad F_{122} = \frac{1}{6J}\frac{\partial J}{\partial F^{122}}, \quad F_{222} = \frac{1}{2J}\frac{\partial J}{\partial F^{222}}.$$

Поскольку (см. [2])

$$J = F^{111}F^{112}F^{122}F^{222} - \frac{2}{3}(F^{112})^3F^{222} - \frac{2}{3}F^{111}(F^{122})^3 + \frac{1}{2}(F^{112})^2(F^{122})^2 - \frac{1}{6}(F^{111})^2(F^{222})^2,$$

то $J \neq 0$, если существует локальная система координат, по отношению к которой компоненты тензора принимают значения

$$F^{112} = F^{122} = 0, \quad F^{111} = F^{222} = 1.$$

Уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты F_{jkl}, имеют вид

$$dF_{jkl} - F_{mkl}\omega^m_j - F_{jml}\omega^m_k - F_{jkm}\omega^m_l + F_{jkl}\omega^{n+1}_{n+1} = 0$$

(равенство нулю имеет место по модулю главных форм многообразия $\overline{\mathbf{J}}^3\mathbf{E}$). Дополнительно потребуем выполнения следующего условия невырожденности:

$$\det\left\|\widetilde{\mathbf{F}}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}\right\| \neq 0, \quad i,j,k,\alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{F}}\begin{pmatrix} i \\ jk\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\beta \\ \gamma\end{pmatrix} = \delta^i_\gamma\delta^\alpha_{(j}\delta^\beta_{k)} + F^{iu\alpha}F_{u\gamma(j}\delta^\beta_{k)} + F^{iu\beta}F_{u\gamma(j}\delta^\alpha_{k)} - \delta^i_{(j}F_{k)u\gamma}F^{u\alpha\beta},$$

при этом тройка индексов $\binom{i}{jk}$ указывает на номер строки, а тройка $\binom{\alpha\beta}{\gamma}$ — на номер столбца матрицы $\left\|\widetilde{\mathbf{F}}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}\right\|$.

Замечание 2.2. Из рассмотрения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $\widetilde{\mathbf{F}}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}$, можно заключить, что $\widetilde{\mathbf{F}}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}$ — тензор. Данное условие выполнено в предположениях замечания 2.1. Если условие невырожденности выполнено, то можно ввести тензор $\mathbf{F}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}$, обратный тензору $\widetilde{\mathbf{F}}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}$, так, что

$$\left\|\mathbf{F}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}\right\| = \left\|\widetilde{\mathbf{F}}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}\right\|^{-1}, \quad \widetilde{\mathbf{F}}{}^{i}_{jk}{}^{\alpha\beta}_{\gamma}\cdot\mathbf{F}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}{}^{pq}_{r} = \tfrac{1}{2}\delta^i_r\delta^p_{(j}\delta^q_{k)}.$$

Построим объекты

$$\Gamma^i_{kj}\mathbf{F}^{\ i\ \ \alpha\beta}_{jk\ \ \gamma}\left[\tfrac{1}{3}\mathbf{F}^{\gamma u\xi}(\mathbf{F}_{\alpha\beta(u,\xi)}-\mathbf{F}_{\alpha\beta u,\xi})-\tfrac{1}{3}\delta^{\gamma}_{(\alpha}\Phi^0_{\beta)}+\tfrac{1}{3}\mathbf{F}_{\alpha\beta\xi}\mathbf{F}^{\xi\gamma m}\cdot\Phi^0_m\right],\qquad(9)$$
$$\Gamma^i_0=\mathbf{F}^i+2\mathbf{F}^{im}\Phi^0_m+\Gamma^i_{jk}\Phi^0_l\mathbf{F}^{jkl}.$$

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты этих объектов имеют вид

$$d\Gamma^i_{jk}+\Gamma^m_{jk}\omega^i_m-\Gamma^i_{mk}\omega^m_j-\Gamma^i_{jm}\omega^m_j-\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jk,0}\omega^0+\Gamma^i_{jk,l}\omega^l+\Gamma^i_{jk,n+1}\omega^{n+1}+$$
$$+\Gamma^{i0}_{jk}d(\lambda_0-\varphi)+\Gamma^{i,l}_{jk}\omega^{n+1}_l+\Gamma^{i,uv}_{jk}\omega^{n+1}_{uv}+\Gamma^{i,uvw}_{jk}\omega^{n+1}_{uvw}+\Gamma^{i,uvw,\xi}_{jk}\omega^{n+1}_{uvw\xi},$$
$$d\Gamma^i_0+\Gamma^m_0-\Gamma^i_0\omega^0_0-\omega^i_0=\Gamma^i_{0,0}\omega^0+\Gamma^i_{0,j}\omega^j+\Gamma^i_{0,n+1}\omega^{n+1}\Gamma^{i0}_0d(\lambda_0-\varphi)+\Gamma^{i,j}_0\omega^{n+1}_j+$$
$$\Gamma^{i,jk}_0\omega^{n+1}_{jk}+\Gamma^{i,jkl}_0\omega^{n+1}_{jkl}+\Gamma^{i,jkln}_0\omega^{n+1}_{jkln}.$$

Теперь введем коэффициенты

$$\Gamma^0_{00}=-\mathbf{F}+\Phi^0_0-\mathbf{F}^m\Phi^0_m-\mathbf{F}^{uv}(\Phi^0_u\Phi^0_v-\Phi^0_{uv})+\Phi^{0m}\mathbf{F}_m,\qquad(10)$$
$$\Gamma^i_{j0}=\Gamma^i_{0,j}+\Gamma^m_0\Gamma^i_{mj},$$

которые, в свою очередь, удовлетворяют уравнениям

$$d\Gamma^i_{j0}+\Gamma^m_{j0}\omega^i_m-\Gamma^i_{m0}\omega^m_j-\Gamma^i_{j0}\omega^0_0-\Gamma^i_{jm}\omega^m_0-\omega^i_{j0}=$$
$$=\Gamma^i_{j0,0}\omega^0+\Gamma^i_{j0,k}\omega^k+\Gamma^i_{j0,n+1}\omega^{n+1}+\Gamma^{i0}_{j0}d(\lambda_0-\varphi)+\sum_{l=1}^{5}\Gamma^{i,i_1,\dots,i_l}_{j0}\omega^{n+1}_{i_1,\dots,i_l},$$

$$d\Gamma^0_{00}-\Gamma^0_{00}\omega^0_0-\omega^0_{00}=\Gamma^0_{000}\omega^0+\Gamma^0_{00,k}\omega^k+\Gamma^0_{00,n+1}\omega^{n+1}+\Gamma^{0,0}_{00}d(\lambda_0-\varphi)+\sum_{l=1}^{5}\Gamma^{0,i_1,\dots,i_l}_{00}\omega^{n+1}_{i_1,\dots,i_l}.$$

Из уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты Γ^i_{jk}, Γ^i_{j0}, Γ^0_{00}, следует, что они являются компонентами объекта связности, заданной в главном расслоении $H(\overline{\mathbf{J}}^5\mathbf{E},G^1)$.

Инвариантными структурными формами группы G^1 являются формы $\overline{\omega}^i_j$ и $\overline{\omega}^0_0$ (черта над формами означает фиксацию точки базы). Формы связности имеют следующий вид:

$$\tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j+\Gamma^i_{j0}\omega^0+\Gamma^i_{jk}\omega^k,$$
$$\tilde{\omega}^0_0=\omega^0_0+\Gamma^0_{00}\omega^0.\qquad(11)$$

Они удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\tilde{\omega}^i_j=\tilde{\omega}^m_j\wedge\tilde{\omega}^i_m+\Omega^i_j,\quad d\tilde{\omega}^0_0=\Omega^0_0.$$

При этом формы кривизны Ω^0_0, Ω^i_j имеют вид

$$\Omega^i_j=R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l+2R^i_{j0k}\omega^0\wedge\omega^k+2R^i_{jkn+1}\omega^k\wedge\omega^{n+1}+2R^i_{j0n+1}\omega^0\wedge\omega^{n+1}+2R^{i0}_{jk}\omega^k\wedge d(\lambda_0-\varphi)+$$
$$2R^{i0}_{j0}\omega\wedge d(\lambda_0-\varphi)+2\sum_{l=1}^{5}R^{i,i_1,\dots,i_l}_{jk}\omega^k\wedge\omega^{n+1}_{i_1,\dots,i_l}+2\sum_{l=1}^{5}R^{i,i_1,\dots,i_l}_{j0}\omega^0\wedge\omega^{n+1}_{i_1,\dots,i_l},$$

$$\Omega^0_0=2R^0_{00k}\omega^o\wedge\omega^k+2R^0_{00,n+1}\omega^0\wedge d(\lambda_0-\varphi)+2\sum_{l=1}^{5}R^{0j_1,\dots,j_l}_{00}\omega^0\wedge\omega^{n+1}_{j_1,\dots,j_l}.$$

Выражения для компонент тензора кривизны выводятся очевидным образом, но из-за громоздкости здесь не приводятся. Заметим, что выражения для Ω^i_j и Ω^0_0 сильно упрощаются, если в качестве главных форм выбраны контактные формы

$$\Omega^i_j=R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l+2R^i_{j0k}\omega^0\wedge\omega^k+2R^{i0}_{jk}\omega^k\wedge d(\lambda_0-\varphi)+2R^{i0}_{j0}\omega^0\wedge d(\lambda_0-\varphi),$$
$$\Omega^0_0=2R^0_{00k}\omega^0\wedge\omega^k+2R^{00}_{00}\omega^0\wedge d(\lambda_0-\varphi).$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение* (2), *удовлетворяющее условию невырожденности* (8), *индуцирует связность в главном расслоении* $H(\overline{\mathbf{J}}^5\mathbf{E})$ *с формами связности* (11). *Компоненты объекта связности определяются по формулам* (9).

3. Расширенная фундаментальная связность

К уже имеющимся коэффициентам добавим коэффициенты

$$\Gamma^i_{00} = \Gamma^i_{0,0} - \Gamma^i_0\Gamma^0_{00} + \Gamma^m_0\Gamma^i_{m0}. \tag{12}$$

Они удовлетворяют уравнениям

$$d\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{00}\omega^i_0 + \Gamma^m_{00}\omega^i_m - 2\Gamma^i_{00}\omega^0_0 - 2\Gamma^i_{m0}\omega^m_0 - \omega^i_{00} - \Gamma^{i,m}_0\omega^{n+1}_{0m} - \Gamma^{ijk}_0\omega^{n+1}_{jk0} - \Gamma^{ijkl}_0\omega^{n+1}_{0jkl} - \Gamma^{ijklm}_0 =$$
$$= \Gamma^i_{000}\omega^0 + \Gamma^i_{00,j}\omega^j + \Gamma^i_{00,n+1}\omega^{n+1} + \Gamma^{i0}_{00}d(\lambda_0 - \varphi) + \sum_{l=1}^{5}\Gamma^{i,i_1,\dots,i_l}_{00}\omega^{n+1}_{i_1,\dots,i_l}.$$

Это уравнение в процессе правильного продолжения (см. [1]) приводит к уравнениям для коэффициентов $\Gamma^{i,j}_0$, $\Gamma^{i,jk}_0$, $\Gamma^{i,jkln}$, которые имеют ту же структуру, что и уравнения для F^{jkl}, т. е. описывают компоненты заданного на $\overline{\mathbf{J}}^5\mathbf{E}$ тензорного поля. Последнее означает, что обращение в нуль этих коэффициентов носит инвариантный характер. В случае, когда это имеет место,

$$\Gamma^{i,j}_0 = \Gamma^{i,jk}_0 = \Gamma^{i,jkl}_0 = 0. \tag{13}$$

Можно расширить объект связности, присоединив Γ^i_{00} к найденным коэффициентам Γ^i_{jk}, Γ^i_{j0}, Γ^i_{00}, Γ^0_{00}. Добавляются следующие новые формы связности:

$$\tilde{\omega}^i_0 = \omega^i_0 + \Gamma^i_{00}\omega^0 + \Gamma^i_{j0}\omega^j. \tag{14}$$

Эти формы удовлетворяют уравнениям

$$d\tilde{\omega}^i_0 = \tilde{\omega}^0_0 \wedge \tilde{\omega}^i_0 + \tilde{\omega}^j_0 \wedge \tilde{\omega}^i_j + \Omega^i_0,$$

где

$$\Omega^i_0 = R^i_{0kl}\omega^k \wedge \omega^l + 2R^i_{00k}\omega^0 \wedge \omega^k + 2R^i_{0kn+1}\omega^k \wedge \omega^{n+1} + 2R^i_{00n+1}\omega^0 \wedge \omega^{n+1} + 2R^{i0}_{00}\omega^0 \wedge d(\lambda_0 - \varphi) +$$
$$+ 2R^{i0}_{k0}\omega^k \wedge d(\lambda_0 - \varphi) + 2\sum_{l=1}^{5} R^{i,i_1,\dots,i_l}_{0k}\omega^k \wedge \omega^{n+1}_{i_1,\dots,i_l} + 2\sum_{l=1}^{5} R^{i,i_1,\dots,i_l}_{00}\omega^0 \wedge \omega^{n+1}_{i_1,\dots,i_l}.$$

Расширенный объект связности определен в главном расслоении $H(\overline{\mathbf{J}}^5\mathbf{E}, G)$, инвариантными структурными формами группы G являются формы $\overline{\omega}^i_j$, $\overline{\omega}^0_0$, $\overline{\omega}^i_0$ (черта означает фиксацию точки базы).

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий теоремы* 1 *дифференциальное уравнение* (2) *удовлетворяет также условию* (13). *Тогда связность из теоремы* 1, *индуцированная в расслоении* $H(\overline{\mathbf{J}}^5\mathbf{E}, G^1)$, *может быть расширена до связности в главном расслоении* $H(\overline{\mathbf{J}}^5\mathbf{E}, G)$, *при этом к формам связности* (11) *добавляются формы* (14), *а к компонентам* (9), (10) *объекта связности — компоненты* (12).

Замечание 3.1. Из рассмотрения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют компоненты тензора кривизны следует, что он содержит два подтензора. Первый из них — A_1 с компонентами

$$R^i_{jkl},\quad R^i_{j0k},\quad R^{i,l}_{jk},\quad R^{i,lm}_{jk},\quad R^{ilmt}_{jk},\quad R^{ilmtn}_{jk}.$$

При выполнении условия (13) подтензор A_1 расширяется до подтензора A, т. е. к выписанным выше компонентам добавляются

$$R^i_{0kl},\quad R^i_{00k},\quad R^{i,l}_{j0},\quad R^{i,lm}_{j0},\quad R^{ilmt}_{j0},\quad R^{ilmtn}_{j0}.$$

Второй подтензор — подтензор B_1 с компонентами

$$R^{i0}_{jk},\quad R^{i0}_{j0},\quad R^{00}_{00},$$

который также допускает расширение до подтензора B с дополнительными компонентами R^{i0}_{00}. Обращение в нуль того или другого из этих тензоров носит инвариантный характер.

Замечание 3.2. Представляет интерес вопрос, когда расширенная фундаментальная связность определяет представление нулевой кривизны. Условимся называть сечение $\sigma \subset \mathbf{E}$ *обобщенным решением* уравнения (2), если на поднятии $\sigma^3 \subset \overline{\mathbf{J}}^3\mathbf{E}$ имеет место обращение дифференциала $d(\lambda_0 - \varphi)$ в нуль, т. е. функция $\lambda_0 - \varphi$ принимает постоянное значение. Среди этих обобщенных решений содержатся и решения в собственном смысле. Понятие обобщенного решения инвариантно относительно преобразований локальных координат вида (3), а понятие решения в собственном смысле инвариантно относительно преобразований локальных координат вида (1).

Справедливо следующее

Утверждение. *Если подтензор A (см. замечание 3.1) равен нулю, а подтензор B отличен от нуля, то тогда расширенная фундаментальная связность определяет представление нулевой кривизны.*

Доказательство. Действительно, в силу замечания 3.1 достаточно проверить утверждение в случае, когда в качестве главных форм многообразия нами выбраны формы $\omega^0 = dt$, $\omega^i = dx^1$ и контактные формы. В этом случае, как уже отмечалось, на поднятиях сечений имеют место равенства

$$\begin{aligned} \omega^0_0 = \omega^0_{00} = \dots = 0,\\ \omega^i_j = \omega^i_{\hat{j}\hat{k}} = \dots = 0,\\ \omega^{n+1}_{n+1} = \omega^{n+1}_{\hat{j},n+1} = \dots = 0,\\ \omega^{n+1} = \omega^{n+1}_{\hat{j}} = \dots = \omega^{n+1}_{\hat{j}_1,\dots,\hat{j}_k} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Поэтому для форм связности имеем

$$\begin{aligned} \tilde\omega^i_j &= \Gamma^i_{j0}dt + \Gamma^i_{jk}dx^k,\\ \tilde\omega^i_0 &= \Gamma^i_{00}dt + \Gamma^i_{k0}dx^k,\\ \tilde\omega^0_0 &= \Gamma^0_{00}dt. \end{aligned}$$

В силу (15) на поднятиях сечений $\sigma \subset \mathbf{E}$ формы кривизны принимают вид

$$\begin{aligned} \Omega^i_j &= R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l + 2R^i_{j0k}dt \wedge dx^k + 2R^{i0}_{jk}dx^k \wedge d(\lambda_0 - \varphi) + 2R^{i0}_{j0}dt \wedge d(\lambda_0 - \varphi),\\ \Omega^i_0 &= R^i_{0kl}dx^k \wedge dx^l + 2R^i_{00k}dt \wedge dx^k + 2R^{i0}_{0k}dx^k \wedge d(\lambda_0 - \varphi) + 2R^{i0}_{00}dt \wedge d(\lambda_0 - \varphi),\\ \Omega^0_0 &= 2R^0_{00k}dt \wedge dx^k + 2R^{00}_{00}dt \wedge d(\lambda_0 - \varphi). \end{aligned}$$

Если выполнены условия утверждения, то на поднятиях сечений

$$\begin{aligned}
\Omega^i_j &= 2R^{i0}_{jk}dx^k \wedge d(\lambda_0 - \varphi) + 2R^{i0}_{j0}dt \wedge d(\lambda_0 - \varphi),\\
\Omega^0_0 &= 2R^{00}_{00}dt \wedge d(\lambda_0 - \varphi),\\
\Omega^i_0 &= 2R^{i0}_{0k}dx^k \wedge d(\lambda_0 - \varphi) + 2R^{i0}_{00}dt \wedge d(\lambda_0 - \varphi),
\end{aligned}$$

откуда следует, что формы кривизны обращаются в нуль на поднятиях сечений тогда и только тогда, когда сечения являются обобщенными решениями дифференциального уравнения (2), что и требовалось доказать. □

Литература

1. Рыбников А.К. *О геометрии эволюционного уравнения второго порядка* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., мех. – 1994. – № 2. – С. 79–85.
2. Гуревич Г.Б. *Основы теории алгебраических инвариантов.* – М.–Л.: 1948. – 408 с.
3. Васильев А.М. *Теория дифференциально-геометрических структур.* Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 190 с.

Московский государственный университет

Поступила 20.05.1997