ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 517.88.7

О.Ю. ХВОРОСТ, З.Б. ЦАЛЮК

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему

$$x' = Ax + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t,x) + \int_0^t G[t,s,x(s)]ds, \tag{1}$$

где A — постоянная $n\times n$-матрица, $K \in L_1[0,\infty)$, f и G непрерывны при $0 \le s \le t < \infty$, $\|x\| \le r$, причем $f(t,0) = G(t,s,0) \equiv 0$.

Определения устойчивости тривиального решения (1) и его асимптотической устойчивости аналогичны соответствующим определениям для дифференциальных уравнений.

Ниже приводятся условия устойчивости тривиального решения системы (1), которые потребуются при изучении одной иммунологической модели.

Пусть

$$\sup_t \|f(t,x)\| = o(\|x\|), \quad x \to 0 \quad \text{и} \quad \sup_t \int_0^t \sup_{\|x\|\le\tau} \|G(t,s,x)\|ds = o(\tau), \quad \tau \to 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Если матрица* $zI - A - \widehat{K}(z)$, *где* $\widehat{K}(z)$ — *преобразование Лапласа ядра* K, *обратима при* $\operatorname{Re} z \ge 0$ *и выполнено условие* (2), *то тривиальное решение системы* (1) *устойчиво. Если, кроме того,*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^T \sup_{\|x\|\le\tau} \|G(t,s,x)\|ds = 0 \tag{3}$$

при любых $T > 0$ *и* $\tau \le r$, *то тривиальное решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Схема доказательства. Из $\det(zI - A - \widehat{K}(z)) \ne 0$ при $\operatorname{Re} z \ge 0$ следует (см., напр., [1]), что для матрицы Коши линейной системы $x' = Ax + \int\limits_0^t K(t-s)x(s)ds$ справедливы оценки $\|C(t)\| \le M$, $\int\limits_0^\infty \|C(t)\|dt \le M$.

В силу (2) в малой окрестности нуля при t ≥ 0

$$\|f(t,x)\| \le \alpha\|x\|, \quad \int_0^t \sup_{\|x\|\le\tau} \|G(t,s,x)\|ds \le \alpha\tau.$$

Пусть $\|x(0)\| \le \delta$ и $\overline{x}(t) = \sup\limits_{0\le\tau\le t} \|x(\tau)\|$. Тогда из равенства

$$x(t) = C(t)x(0) + \int_0^t C(t-s)\Big[f(s,x(s)) + \int_0^s G(s,\theta,x(\theta))d\theta\Big]ds \tag{4}$$

имеем $\overline{x}(t) \le M[\delta + 2\alpha\overline{x}(t)]$, откуда $\overline{x}(t) \le M\delta/(1-2M\alpha)$. Значит, тривиальное решение устойчиво.

Пусть выполнено (3), $\overline{x} = \limsup\limits_{t\to\infty} \|x(t)\|$ и $\|x(t)\| \le \overline{x}+\varepsilon$ при $t \ge T$. Так как $\int\limits_0^t C(t-s)\varphi(s)ds \to 0$ при $t\to\infty$ для любой $\varphi \to 0$, то согласно (4) $\overline{x} \le 2M\alpha(\overline{x}+\varepsilon)$, откуда $\overline{x} = 0$.

Условие (2) предполагает ограниченность f и $\int\limits_0^t G(t,s,x)ds$ по t. Если вместо (2) выполнены условия: при некоторых $a > 0$, $q_i(t)$, $Q_i(t,s)$

$$\|f(t,x)\| \le q_1(t)o(\|x\|) + q_2(t)\|x\|^{1+a}, \tag{5}$$

$$\|G(t,s,x)\| \le Q_1(t,s)o(\|x\|) + Q_2(t,s)\|x\|^{1+a}, \tag{6}$$

то устойчивость возможна и при некоторых неограниченных по t нелинейных членах.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (5), (6)*) и* $\|C(t)\| \le M\exp(-\alpha t)$ *при некоторых* $\alpha > 0$, $M > 0$. *Если функция*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left[q_1(s) + \int_0^s \exp(\alpha(s-\tau))Q_1(s,\tau)d\tau\right]ds$$

ограничена на $[0;\infty)$, *а функция*

$$\exp(-\beta t)\left[q_2(t) + \int_0^t Q_2(t,s)\exp(\alpha(1+a)(t-s))ds\right] \quad \text{принадлежит} \quad L_1[0,\infty)$$

при некотором $0 < \beta < a\alpha$, *то тривиальное решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Схема доказательства. Пусть $A(t) = q_1(t) + \int\limits_0^t \exp(\alpha(t-s))Q_1(t,s)ds$, $\int\limits_0^t A(s)ds \le Mt$ и при достаточно малом γ и $\|x\| \le \Delta$

$$\|f(t,x)\| \le \gamma q_1(t)\|x\| + q_2(t)\|x\|^{1+a}, \tag{7}$$

$$\|G(t,s,x)\| \le \gamma Q_1(t,s)\|x\| + Q_2(t,s)\|x\|^{1+a}. \tag{8}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что f и G определены при всех $x \in R^n$ и при всех x удовлетворяют (7), (8).

Обозначим $u(t) = \exp(\alpha t)\|x(t)\|$, $\overline{u}(t) = \sup\limits_{0\le\tau\le t} u(\tau)$. Тогда из оценки матрицы Коши, из (7), (8) и уравнения (4) получим

$$\overline{u}(t) \le M\int_0^t \{\gamma A(s)\overline{u}(s) + \exp(-a\alpha s)B(s)\overline{u}^{1+a}(s)\}ds + M\|x(0)\|,$$

где $B(s) = q_2(s) + \int\limits_0^s Q_2(s,\tau)\exp(\alpha(1+a)(s-\tau))d\tau$.

По теореме об интегральном неравенстве (см., напр., [2]) $\overline{u}(t)$, а значит, и $u(t)$ меньше решения соответствующего уравнения Бернулли. Поэтому

$$\|x(t)\| \le M\|x(0)\|\exp\left(-\alpha t + M\gamma\int_0^t A(s)ds\right) \times$$
$$\times\left[1 - M^{1+a}a\|x(0)\|^a\int_0^t \exp\left(M\gamma a\int_0^s A(\tau)d\tau - a\alpha s)B(s)ds\right]^{-1/a}\right.$$

и, следовательно, при достаточно малых $\|x(0)\|$ решение $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Замечание. Для экспоненциальной оценки $C(t)$ достаточно, чтобы $\exp(\alpha t)K(t) \in L_1[0;\infty)$ и $\det(zI - A - \widehat{K}(z)) \ne 0$ при $\operatorname{Re} z \ge -\alpha$.

Если матрица $zI - A - \widehat{K}(z)$ необратима при некотором z_0, $\operatorname{Re} z_0 > 0$, то тривиальное решение (1) при определенных f и G неустойчиво.

Теорема 3. *Пусть z_0 — полюс $(zI - A - \widehat{K}(z))^{-1}$ с максимальной действительной частью $\alpha = \operatorname{Re} z_0 > 0$ и $(k+1)$ — максимальный порядок полюсов, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$. Пусть выполнены условия (5) и (6), причем*

$$A(t) = q_1(t)(t+1)^k + \int_0^t Q_1(t,s)\exp(-\alpha(t-s))(s+1)^k ds \in L_1[0,\infty),$$

а функция

$$B(t) = q_2(t)(t+1)^{k(1+a)} + \int_0^t Q_2(t,s)\exp(-\alpha(1+a)(t-s))(s+1)^{k(1+a)} ds$$

ограничена на $[0,\infty)$.

Тогда тривиальное решение системы (1) неустойчиво.

Схема доказательства. Используя [3], можно показать, что для матрицы Коши справедливо представление

$$C(t) = (t+1)^k e^{\alpha t}[B_1 e^{i\gamma_1 t} + B_2 e^{i\gamma_2 t} + \cdots + B_l e^{i\gamma_l t} + o(1)],$$

где $\alpha + i\gamma_j$ — полюса $(zI - A - \widehat{K}(z))^{-1}$ порядка $(k+1)$, лежащие на прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$, а B_j — некоторые матрицы, $B_j \neq 0$. Отсюда следует $\|C(t)\| \leq M(t+1)^k \exp(\alpha t)$ при некотором $M > 0$ и существуют такое число $m > 0$ и интервалы $(\mu_l; \nu_l)$, $\mu_l \to \infty$, что

$$\|\mathrm{C}(t)\| \geq m(t+1)^k e^{\alpha t} \quad \text{при} \quad t \in (\mu_l; \nu_l).$$

Пусть $\gamma > 0$ таково, что $\overline{q} = \gamma \int\limits_0^\infty A(t)dt < m/(M(M+m))$ и выполнено (7), (8). Пусть далее $C > 1$, $M/(1 - M\overline{q}) < C < M + m$ и

$$\|x(t)\| \leq C(t+1)^k \exp(\alpha t)\|x(0)\| \tag{9}$$

на некотором отрезке $[0, T]$.

Из равенства (4) и оценок (7)–(9) на $[0, T]$ имеем

$$\|x(t)\| \leq M(t+1)^k \exp(\alpha t)\|x(0)\|[1 + C\overline{q} + C\overline{p}(\exp{(\alpha t)} C\|x(0)\|)^a],$$

где $\overline{p} = \sup\limits_{t \geq 0} B(t)(a\alpha)^{-1}$. Поэтому (9) будет выполняться по крайней мере на таком отрезке $[0, T]$, что при достаточно малых $\|x(0)\|$

$$M(T+1)^k \exp(\alpha T)\|x(0)\|[1 + C\overline{q} + C\overline{p}(\exp(\alpha T)C\|x(0)\|)^a] = C(T+1)^k \exp(\alpha T)\|x(0)\|,$$

т. е. если T таково, что $\exp(\alpha T)C\|x(0)\| = [\{(1 - M\overline{q})C - M\}/MC\overline{p}]^{1/a}$.

Очевидно, T — непрерывная убывающая функция $\|x(0)\|$ и $T \to \infty$ при $\|x(0)\| \to 0$. Следовательно, существует такая последовательность $\|x_l(0)\| \to 0$ при $l \to \infty$, что соответствующие $T_l \in (\mu_l; \nu_l)$. Тогда при $t = T_l$

$$\|x(T_l)\| \geq (T_l + 1)^k (M + m - C)[(1 - M\overline{q})C - M]^{1/a}/C(MC\overline{p})^{1/a} >$$
$$> (M + m - C)[(1 - M\overline{q})C - M]^{1/a}/C(MC\overline{p})^{1/a};$$

здесь $\|x_l(0)\| \to 0$. Это означает неустойчивость тривиального решения системы (1).

Литература

1. Miller R.K. *Structure of solutions of unstable linear Volterra integrodifferential equations* // J. Different. Equat. – V. 15. – P. 129–157.
2. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. *Об интегральных неравенствах* // Матем. сб. – 1962. - Т. 56. – Вып. 3. – С 325–342.
3. Цалюк З.Б. *Структура резольвенты системы уравнений с разностным ядром* // Изв. вузов. Математика. – 2001. - № 6. – С. 71–80.

Кубанский государственный университет

Поступила 19.01.2007