И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, Г.Г. ШАРАФУТДИНОВА

ЗАДАЧИ КОШИ–ГУРСА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^n u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot |x|^m u_{yy} = 0, \quad n, m \geq 0, \tag{1}$$

в области G, ограниченной 1) кривой Γ из класса Ляпунова, лежащей в первой четверти плоскости (x, y) с концами в точках $B = (1, 0)$ и $B_1 = (0, 1)$; 2) характеристиками AC и CB уравнения (1) при $x > 0$, $y < 0$; 3) характеристиками AC_1 и C_1B_1 уравнения (1) при $x < 0$, $y > 0$, где $A = (0, 0)$, $C(x_C, y_C)$, $C_1(-x_C, -y_C)$, $x_C = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $y_C = -\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $\alpha = \frac{m+2}{2}$, $\beta = \frac{n+2}{2}$.

Данная работа является продолжением исследований авторов [1], где были установлены экстремальные свойства решения задачи Трикоми для уравнения (1), имеющего приложения в газовой динамике [2]. В связи с доказательством существования решения задачи Трикоми для уравнения (1) возникает необходимость построения в явном виде решения задач Коши–Гурса для уравнения (1) в гиперболической части $D = G \cap \{x > 0, \ y < 0\}$ смешанной области G.

Первая задача Коши–Гурса (*задача* D_1). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \wedge C^2(D); \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D; \tag{3}$$

$$u(x, y)\big|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq x_C; \tag{4}$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где τ и ψ — заданные достаточно гладкие функции такие, что $\tau(0) = \psi(0)$.

Вторая задача Коши–Гурса (*задача* D_2). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2)–(4) и

$$\lim_{y \to 0-0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad 0 < x < 1,$$

где ψ и ν — заданные достаточно гладкие функции.

Ранее задачи Коши–Гурса для уравнения (1) при $n > 0$, $m = 0$ были изучены в [3]–[6]. В [7] формально получены формулы решения задач D_1 и D_2 для уравнения (1), но отсутствуют соответствующие теоремы существования решения этих задач с указанием гладкости функций τ, ν и ψ. В [8] для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу построены общие решения для всех значений параметров. В данной статье для уравнения (1) при всех $m = n > 0$ получены теоремы существования решения задач D_1 и D_2 при более слабых условиях на гладкость функций τ, ν и ψ, чем в [3]–[6], [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №99-01-00934.

В области D перейдем к характеристическим координатам $\xi = x^\alpha - (-y)^\alpha$, $\eta = x^\alpha + (-y)^\alpha$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$L_0 v \equiv v_{\xi\eta} + \frac{q}{\eta - \xi}(v_\xi - v_\eta) + \frac{q}{\eta + \xi}(v_\xi + v_\eta) = 0, \tag{5}$$

$$v(\xi,\eta) = u\left[\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, -\left(\frac{\eta-\xi}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right], \quad q = \frac{m}{2(m+2)},$$

а область D отобразится в область $\triangle = \{(\xi,\eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\}$. За образами точек A, B, C оставим обозначения прообразов. Задачи Коши–Гурса ставятся следующим образом.

Задача D_1'. Найти функцию $v(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям

$$v(\xi,\eta) \in C(\overline{\triangle}) \wedge C^1(\triangle), \quad v_{\xi\eta} \in C(\triangle); \tag{6}$$

$$L_0(v) \equiv 0, \ (\xi,\eta) \in \triangle; \tag{7}$$

$$v(0,\eta) = u\left[\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, -\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \psi\left[\left(\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = \psi_1(\eta), \quad 0 \le \eta \le 1; \tag{8}$$

$$v(\xi,\xi) = u(\xi^{\frac{1}{\alpha}}, 0) = \tau(\xi^{\frac{1}{\alpha}}) = \tau_1(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1,$$

где τ_1 и ψ_1 — заданные функции, $\tau_1(0) = \psi_1(0)$.

Задача D_2'. Найти функцию $v(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям (6)–(8) и, кроме того,

$$\lim_{\eta\to\xi} \left(\frac{1}{2}\right)^{2q} \alpha(\eta-\xi)^{2q}(v_\xi - v_\eta) = \nu(\xi^{\frac{1}{\alpha}}) = \nu_1(\xi), \quad 0 < \xi < 1,$$

где ψ_1 и ν_1 — заданные функции.

Для решения задач D_1' и D_2' применим метод Римана–Адамара, который основан на так называемой функции Римана–Адамара. Ранее этот метод применялся в [3]–[7], [9], [10].

Функция Римана–Адамара задачи D_2' определяется следующим образом:

$$B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \begin{cases} B_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta > \xi_0; \\ B_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta < \xi_0, \end{cases}$$

где $B_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ — функция Римана, построенная в [7] и при $m = n$ имеющая вид

$$B_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \left(\frac{\eta^2 - \xi^2}{\eta_0^2 - \xi_0^2}\right)^q F(1-q, q, 1; \sigma), \tag{9}$$

$$B_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = k_2 \frac{(\eta^2-\xi^2)^{2q}}{(\xi_0^2-\xi^2)^q\,(\eta_0^2-\eta^2)^q} F\left(q, q, 2q; \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$k_2 = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(2q)}, \quad \sigma = \frac{(\xi^2-\xi_0^2)(\eta^2-\eta_0^2)}{(\xi^2-\eta^2)(\xi_0^2-\eta_0^2)},$$

$F(\cdot)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Функция $B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ обладает следующими свойствами:

1° $B(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ как функция от (ξ,η) является решением сопряженного уравнения $L_0^* v = 0$, а как функция от (ξ_0,η_0) является решением уравнения (5);

2° а) $B_{1\xi} + (\frac{q}{\eta-\xi} - \frac{q}{\eta+\xi})B_1 = 0$ на $\eta = \eta_0$,

б) $B_{1\eta} - (\frac{q}{\eta-\xi} + \frac{q}{\eta+\xi})B_1 = 0$ на $\xi = \xi_0$,

в) $B(\xi_0,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = 1$;

3° $\frac{d\lambda}{d\xi} + (\frac{q}{\eta-\xi} + \frac{q}{\eta+\xi})\lambda = 0$ на $\eta = \xi_0$,
где $\lambda = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}[B(\xi,\xi_0+\varepsilon;\xi_0,\eta_0) - B(\xi,\xi_0-\varepsilon;\xi_0,\eta_0)]$;

4° $B_{2\xi} - B_{2\eta} + \frac{4q}{\eta-\xi} B_2 = 0$ на $\eta = \xi$.

Замечание 1. Отметим, что в работах [3], [5], [7] вместо свойства 4° приведено условие $B_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 0$ на $\eta = \xi$, что недостаточно для построения решения задачи D_2'.

Функция Римана – Адамара $A(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ задачи D_1' имеет вид

$$A(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} A_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), & \eta > \xi_0; \\ A_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), & \eta < \xi_0, \end{cases}$$

где

$$A_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \left(\frac{\eta^2 - \xi^2}{\eta_0^2 - \xi_0^2}\right)^q F(1-q, q, 1; z),$$

$$A_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = k_1 \frac{(\eta^2 - \xi^2)(\eta_0^2 - \xi_0^2)^{1-2q}}{(\xi_0^2 - \xi^2)^{1-q}(\eta_0^2 - \eta^2)^{1-q}} F\left(1-q, 1-q, 2-2q; \frac{1}{z}\right),$$

$$k_1 = \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(q)\Gamma(2-2q)},$$

и обладает свойствами 1°–3° и, кроме того,

$$A(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \xi.$$

Пусть (ξ_0, η_0) — произвольная, но фиксированная точка области $\triangle$. Введем следующие подобласти области $\triangle$:

$$\triangle_1 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \xi_0 - 2\varepsilon,\ \xi_0 + \varepsilon < \eta < \eta_0\},$$
$$\triangle_2 = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \xi_0 - 2\varepsilon,\ \varepsilon < \eta < \xi_0 - \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Пусть v — решение задачи D_2', $w = B(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ — функция Римана–Адамара задачи D_2'. Запишем тождество Грина для оператора L_0:

$$wL_0(v) - vL_0^*(w) = M_\xi + N_\eta \equiv 0, \tag{10}$$

где

$$M = \frac{1}{2}(vw)_\eta - vw_\eta + \left(\frac{q}{\eta - \xi} + \frac{q}{\eta + \xi}\right) vw,$$
$$N = \frac{1}{2}(vw)_\xi - vw_\xi - \left(\frac{q}{\eta - \xi} - \frac{q}{\eta + \xi}\right) vw.$$

Интегрируя тождество (10) по множеству $\triangle_1 \cup \triangle_2$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим решение задачи D_2' в явном виде

$$v(\xi_0, \eta_0) = \frac{k_2}{\alpha} 2^{2q-1} \int_0^{\xi_0} \nu_1(\xi) \frac{(2\xi)^{2q}}{(\xi_0^2 - \xi^2)^q (\eta_0^2 - \xi^2)^q} d\xi + \int_0^{\eta_0} B(0, \eta; \xi_0, \eta_0) \left[\psi_1'(\eta) + \frac{2q}{\eta}\psi_1(\eta)\right] d\eta \tag{11}$$

или

$$v(\xi_0, \eta_0) = \frac{k_2}{2}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{2q} \int_0^{\xi_0} \nu_1(\xi) \frac{(2\xi)^{2q}}{(\xi_0^2 - \xi^2)^q (\eta_0^2 - \xi^2)^q} d\xi +$$
$$+ \frac{\eta_0^{2q}}{(\eta_0^2 - \xi_0^2)^q}\psi(\eta_0) - \int_0^{\eta_0} \psi_1(\eta) \left[\frac{\partial B(0, \eta; \xi_0, \eta_0)}{\partial \eta} - \frac{2q}{\eta} B(0, \eta; \xi_0, \eta_0)\right] d\eta. \tag{12}$$

Теорема 1. *Если* 1) *функция* $\nu_1(\xi)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha_2 > q$ *на интервале* $(0, 1)$, $\nu_1(\xi)$ *при* $\xi \to 0$ *может иметь особенность степенного порядка не больше, чем* 1, *а при* $\xi \to 1$ *меньше, чем* $1 - 2q$; 2) $\psi_1(\eta) \in C^2[0, 1]$, *то существует единственное решение задачи* D_2' *для уравнения* (5), *и оно определяется формулой* (11) *или* (12).

Доказательство теоремы следует из следующих утверждений.

Лемма 1. *Если функция $\nu_1(\xi)$ удовлетворяет условию* 1) *теоремы* 1, *то функция*

$$I_1(\xi_0,\eta_0)=\gamma\int_0^{\xi_0}\frac{\nu_1(\xi)(2\xi)^{2q}}{(\xi_0^2-\xi^2)^q(\eta_0^2-\xi^2)^q}d\xi,\quad \gamma=\frac{k_2}{\alpha}2^{2q-1},$$

обладает следующими свойствами:

1) *ее первые производные представимы в виде*

$$\frac{\partial I_1}{\partial\xi_0}=2^{2q}\gamma\eta_0^{-2q}\nu_1(\xi_0)+2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0}\frac{[\overline{\nu}_1(\xi_0)-\overline{\nu}_1(\xi)]\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{q+1}(\eta_0^2-\xi^2)^q}+$$
$$+2^{2q}\frac{\gamma q}{1-q}\xi_0^{2q}\nu_1(\xi_0)\left(\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right)^{1-q}(\eta_0^2-\xi_0^2)^{-2q}F\left(1-2q,1-q,2-q;\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right),\tag{13}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial\eta_0}=2^{2q+1}\gamma q\eta_0\int_0^{\xi_0}\frac{[\overline{\nu}_1(\xi_0)-\overline{\nu}_1(\xi)]\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^q(\eta_0^2-\xi^2)^{q+1}}-$$
$$-2^{2q}\frac{\gamma q}{1-q}\xi_0^{2q}\nu_1(\xi_0)\frac{\eta_0}{\xi_0}\left(\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right)^{1-q}(\eta_0^2-\xi_0^2)^{-2q}F\left(1-2q,1-q,2-q;\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right),\tag{14}$$
$$\overline{\nu}_1(\xi)=\nu_1(\xi)\xi^{2q-1};$$

2) *производные* $\frac{\partial I_1}{\partial\xi_0}$ *и* $\frac{\partial I_1}{\partial\eta_0}$ *непрерывны в* $\overline{\triangle}\setminus\overline{AB}$;

3) $I_1(\xi_0,\eta_0)$ *является решением уравнения* (5) *и удовлетворяет краевым условиям*

$$I_1(0,\eta_0)=0,$$
$$\lim_{\eta_0\to\xi_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q}\alpha(\eta_0-\xi_0)^{2q}\left(\frac{\partial I_1}{\partial\xi_0}-\frac{\partial I_1}{\partial\eta_0}\right)=\nu_1(\xi_0),\quad 0<\xi_0<1.\tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$I_{1\varepsilon}(\xi_0,\eta_0)=\gamma\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\nu_1(\xi)(2\xi)^{2q}}{(\xi_0^2-\xi^2)^q(\eta_0^2-\xi^2)^q}d\xi.$$

Продифференцируем ее по ξ_0

$$\frac{\partial I_{1\varepsilon}}{\partial\xi_0}=-2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\overline{\nu_1}(\xi)\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{q+1}(\eta_0^2-\xi^2)^q}+2^{2q}\gamma\frac{\nu_1(\xi_0-\varepsilon)(\xi_0-\varepsilon)^{2q}}{(\xi_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q(\eta_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q}.$$

К правой части последнего равенства прибавим и вычтем выражение

$$R=2^{2q+1}\gamma q\xi_0\overline{\nu_1}(\xi_0)\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{q+1}(\eta_0^2-\xi^2)^q}+2^{2q+1}\gamma q\xi_0\overline{\nu_1}(\xi_0)\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^q(\eta_0^2-\xi^2)^{q+1}},$$

которое в силу формул ([11], с. 81)

$$\int\frac{dx}{z^nt^m}=-\frac{1}{(m-1)\triangle}\frac{1}{t^{m-1}z^{n-1}}-\frac{(m+n-2)b}{(m-1)\triangle}\int\frac{dx}{t^{m-1}z^n},$$
$$\int\frac{dx}{z^nt^m}=\frac{1}{(n-1)\triangle}\frac{1}{t^{m-1}z^{n-1}}+\frac{(m+n-2)\beta}{(n-1)\triangle}\int\frac{dx}{t^mz^{n-1}},$$

где $z=a+bx$, $t=\alpha+\beta x$, $\triangle=a\beta-\alpha b$, равно

$$R=2^{2q}\gamma\xi_0\overline{\nu_1}(\xi_0)\frac{1}{(\xi_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q(\eta_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q}-2^{2q}\gamma\xi_0\overline{\nu_1}(\xi_0)(\xi_0\eta_0)^{-2q}.$$

Тогда

$$\frac{\partial I_{1\varepsilon}}{\partial\xi_0}=2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{[\overline{\nu_1}(\xi_0)-\overline{\nu}(\xi)]\,\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{q+1}(\eta_0^2-\xi^2)^q}+$$

$$+2^{2q}\gamma\frac{\nu_1(\xi_0-\varepsilon)(\xi_0-\varepsilon)^{2q}}{(\xi_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q(\eta_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q}+2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\overline{\nu_1}(\xi_0)\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^q(\eta_0^2-\xi^2)^{q+1}}-$$

$$-\left[2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\overline{\nu_1}(\xi_0)\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{q+1}(\eta_0^2-\xi^2)^q}+2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\overline{\nu_1}(\xi_0)\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^q(\eta_0^2-\xi^2)^{q+1}}\right]=$$

$$=2^{2q}\gamma\xi_0\overline{\nu}_1(\xi_0)(\xi_0^2\eta_0^2)^{-q}-2^{2q}\gamma\frac{\nu_1(\xi_0)\xi_0^{2q}}{(\xi_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q\,(\eta_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q}+$$

$$+2^{2q}\gamma\frac{\nu_1(\xi_0-\varepsilon)(\xi_0-\varepsilon)^{2q}}{(\xi_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q\,(\eta_0^2-(\xi_0-\varepsilon)^2)^q}+2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{[\overline{\nu}_1(\xi_0)-\overline{\nu}_1(\xi)]\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{q+1}(\eta_0^2-\xi^2)^q}+$$

$$+2^{2q+1}\gamma q\xi_0^{2q}\nu_1(\xi_0)\int_0^{\xi_0-\varepsilon}\frac{\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^q(\eta_0^2-\xi^2)^{q+1}}.$$

Поскольку $\overline{\nu}_1(\xi)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $(0,1)$ с показателем $\alpha_2>q$, то отсюда при $\varepsilon\to 0$ получим

$$\frac{\partial I_1}{\partial\xi_0}=2^{2q}\gamma\nu_1(\xi_0)\eta_0^{-2q}+2^{2q+1}\gamma q\xi_0\int_0^{\xi_0}\frac{[\overline{\nu}_1(\xi_0)-\overline{\nu}_1(\xi)]\xi d\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{q+1}(\eta_0^2-\xi^2)^q}+$$

$$+2^{2q}\gamma q\xi_0^{2q}\nu_1(\xi_0)\int_0^{\xi_0^2}(\xi_0^2-\xi)^{-q}(\eta_0^2-\xi)^{-q-1}d\xi. \quad (16)$$

Далее, пользуясь интегральным представлением для гипергеометрической функции

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}dt,$$
$$0<\operatorname{Re}b<\operatorname{Re}c,\quad |z|<1, \quad (17)$$

и формулой автотрансформации

$$F(a,b,c;z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;z), \quad (18)$$

убеждаемся, что

$$\int_0^{\xi_0^2}(\xi_0^2-\xi)^{-q}(\eta_0^2-\xi)^{-q-1}d\xi=\frac{1}{1-q}\left(\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right)^{1-q}(\eta_0^2-\xi_0^2)^{-2q}F\left(1-2q,1-q,2-q;\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16), получим равенство (13). Аналогично доказывается справедливость равенства (14).

Из формул (13) и (14) видно, что $\frac{\partial I_1}{\partial\xi_0}$ и $\frac{\partial I_1}{\partial\eta_0}$ существуют и непрерывны в $\overline{\triangle}\setminus\overline{AB}$.

Используя формулы (13) и (14), легко проверить, что $I_1(\xi_0,\eta_0)$ является решением уравнения (5) и удовлетворяет граничным условиям (15). □

Аналогично [6] введем функцию

$$B_0(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\begin{cases}B_{01}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta>\xi_0;\\ B_{02}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0), & \eta<\xi_0,\end{cases}$$

где

$$B_{01}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=\left(\frac{\eta_0^2-\eta^2}{\eta_0^2-\xi_0^2}\right)^q\left(\frac{\eta_0^2-\eta^2}{\eta_0^2-\xi^2}\right)^{1-q}F_1\left(1-q,q,1-q,2;\frac{\eta_0^2-\eta^2}{\eta_0^2-\xi_0^2},\frac{\eta_0^2-\eta^2}{\eta_0^2-\xi^2}\right), \quad (20)$$

$$B_{02}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=-\frac{k_2}{2q}\left(\frac{\eta^2-\xi^2}{\xi_0^2-\xi^2}\right)^q\left(\frac{\eta^2-\xi^2}{\eta_0^2-\xi^2}\right)^qF_1\left(q,q,q,2q+1;\frac{\eta^2-\xi^2}{\xi_0^2-\xi^2},\frac{\eta^2-\xi^2}{\eta_0^2-\xi^2}\right), \quad (21)$$

где $F_1(\cdot)$ — гипергеометрическая функция двух переменных.

Лемма 2. *Имеет место тождество*

$$\frac{\partial B_0}{\partial \eta} = -\frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2} B. \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\eta > \xi_0$. Пусть $X = \frac{\eta_0^2 - \eta^2}{\eta_0^2 - \xi_0^2}$, $Y = \frac{\eta_0^2 - \eta^2}{\eta_0^2 - \xi^2}$. Тогда $B_{01} = X^q Y^{1-q} F_1(1-q, q, 1-q, 2; X, Y)$. Дифференцируя функцию B_{01} по η, получаем

$$\frac{\partial B_{01}}{\partial \eta} = -X^q Y^{1-q} \frac{2\eta}{\eta_0^2 - \eta^2} \left[F_1(1-q, q, 1-q, 2; X, Y) + X \frac{\partial F_1}{\partial X} + Y \frac{\partial F_1}{\partial Y} \right].$$

Далее в силу формул ([5], с. 108)

$$\begin{gathered}
\frac{x}{b} \frac{\partial}{\partial x} F_1(a, b, b', c; x, y) = F_1(a, b+1, b', c; x, y) - F_1(a, b, b', c; x, y), \\
\frac{y}{b'} \frac{\partial}{\partial y} F_1(a, b, b', c; x, y) = F_1(a, b, b'+1, c; x, y) - F_1(a, b, b', c; x, y), \\
(c - b - b' - 1) F_1(a, b, b' c; x, y) + b F_1(a, b+1, b', c; x, y) + b' F_1(a, b, b'+1, c; x, y) = \\
= (c-1) F_1(a, b, b', c-1; x, y), \quad |x| < 1, \quad |y| < 1, \\
F_1(a, b, b', b+b'; x, y) = (1-y)^{-a} F\left(a, b, b+b'; \frac{x-y}{1-y}\right)
\end{gathered}$$

имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_{01}}{\partial \eta} = -X^q Y^{1-q} \frac{2\eta}{\eta_0^2 - \eta^2} [q F_1(1-q, 1+q, 1-q, 2; X, Y) + (1-q) F_1(1-q, q, 2-q, 2; X, Y)] = \\
= -X^q Y^{1-q} \frac{2\eta}{\eta_0^2 - \eta^2} F_1(1-q, q, 1-q, 1; X, Y) = \\
= X^q Y^{1-q} \frac{2\eta}{\eta_0^2 - \eta^2} (1-Y)^{q-1} F\left(1-q, q, 1; \frac{X-Y}{1-Y}\right) = -\frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2} \left(\frac{\eta^2 - \xi^2}{\eta_0^2 - \xi_0^2}\right)^q F(1-q, q, 1; \sigma).
\end{aligned}$$

Тогда с учетом (9) получим требуемое тождество при $\eta > \xi_0$.

Аналогично доказывается справедливость тождества (22) и в случае $\eta < \xi_0$. □

Лемма 3. *Если $\psi_1(\eta) \in C^2[0,1]$, то функция*

$$I_2(\xi_0, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} \left[\psi_1'(\eta) + \frac{2q}{\eta} \psi_1(\eta) \right] B(0, \eta; \xi_0, \eta_0) d\eta \tag{23}$$

обладает следующими свойствами:

1) $I_2(\xi_0, \xi_0) \in C^1[0,1]$;

2) *если $\psi_1(0) = 0$, то $I_2(\xi_0, \xi_0)$ при $\xi_0 \to 0$ обращается в нуль;*

3) *функция $I_2(\xi_0, \eta_0)$ и ее первые производные представимы в виде*

$$I_2(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2q} \varphi(\xi_0) + \frac{1}{2} \int_0^{\eta_0} \varphi'(\eta) B_0(0, \eta; \xi_0, \eta_0) d\eta, \tag{24}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \xi_0} = \frac{1}{2} \int_0^{\eta_0} \varphi'(\eta) B_{0\xi_0}(0, \eta; \xi_0, \eta_0) d\eta, \tag{25}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \eta_0} = \frac{1}{2} \int_0^{\eta_0} \varphi'(\eta) B_{0\eta_0}(0, \eta; \xi_0, \eta_0) d\eta, \tag{26}$$

где $\varphi(\eta) = \eta \psi_1'(\eta) + 2q \psi_1(\eta)$;

4) $I_2(\xi_0,\eta_0)$ *является решением уравнения* (5) *и удовлетворяет граничным условиям*

$$I_2(0,\eta_0)=\psi_1(\eta_0),\quad \lim_{\eta_0\to\xi_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{2q}\alpha(\eta_0-\xi_0)^{2q}\left(\frac{\partial I_2}{\partial\xi_0}-\frac{\partial I_2}{\partial\eta_0}\right)=0. \tag{27}$$

Доказательство. Положив в интеграле (23) $\eta_0=\xi_0$, получим

$$I_2(\xi_0,\xi_0)=\int_0^{\xi_0}\left[\psi_1'(\eta)+\frac{2q}{\eta}\psi_1(\eta)\right]B_2(0,\eta;\xi_0,\xi_0)d\eta=$$
$$=k_2\int_0^{\xi_0}\varphi(\eta)\eta^{4q-1}\xi_0^{-2q}(\xi_0^2-\eta^2)^{-q}d\eta=\frac{k_2}{2}\int_0^1\varphi(\xi_0\sqrt{t})t^{2q-1}(1-t)^{-q}dt.$$

Отсюда непосредственно следуют два первых утверждения леммы.

Для нахождения частных производных перепишем интеграл в виде

$$I_2(\xi_0,\eta_0)=\int_0^{\eta_0}\varphi(\eta)\frac{B(0,\eta;\xi_0,\eta_0)}{\eta}d\eta.$$

Применяя лемму 2 при $\xi=0$ и интегрируя по частям, с учетом равенств $B_{01}(0,\eta_0;\xi_0,\eta_0)=B_{02}(0,0;\xi_0,\eta_0)=0$, получим

$$I_2(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\varphi(\xi_0)[B_{01}(0,\xi_0;\xi_0,\eta_0)-B_{02}(0,\xi_0;\xi_0,\eta_0)]+\frac{1}{2}\int_0^{\eta_0}\varphi'(\eta)B(0,\eta;\xi_0,\eta_0)d\eta. \tag{28}$$

Пусть $\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}=z$ и $T=B_{01}(0,\xi_0;\xi_0,\eta_0)-B_{02}(0,\xi_0;\xi_0,\eta_0)$. Тогда на основании (20) и (21) выражение для T примет вид

$$T=\frac{k_2}{2q}z^qF_1(q,q,q,2q+1;1,z)+(1-z)^{1-q}F_1(1-q,q,1-q,2;1,1-z).$$

В силу формулы ([5], с. 108)

$$F_1(a,b,b',c;1,y)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b',c-b;y),$$
$$\mathrm{Re}(c-a-b)>0,\quad |x|<1,\quad |y|<1$$

имеем

$$T=\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(1-q)\Gamma^2(1+q)}z^qF(q,q,q+1;z)+\frac{1}{\Gamma(1+q)\Gamma(2-q)}(1-z)^{1-q}F(1-q,1-q,2-q;1-z).$$

Для второго слагаемого в последнем выражении применим формулу аналитического продолжения ([12], с. 116(1))

$$F(a,b,c;z)=A_1F(a,b,a+b-c+1;1-z)+A_2(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1;1-z),$$

где

$$A_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad A_2=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},\quad |\arg(1-z)|<\pi.$$

Тогда на основании (18) и известной формулы $F(a,b,b;z)=(1-z)^{-a}$ имеем

$$T=\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(1-q)\Gamma^2(1+q)}z^qF(q,q,q+1;z)+\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(1+q)}(1-z)^{1-q}F(1-q,1-q,1-q;z)+$$
$$+\frac{\Gamma(-q)}{\Gamma(1+q)\Gamma^2(1-q)}z^q(1-z)^{1-q}F(1,1,q+1;z)=\frac{1}{q\Gamma(1-q)\Gamma(1+q)}z^qF(q,q,q+1;z)+$$
$$+\frac{1}{q}-\frac{1}{q\Gamma(1+q)\Gamma(1-q)}z^qF(q,q,q+1;z)=\frac{1}{q}.$$

Подставляя найденное значение T в (28), получим представление (24).

Исходя из равенства (24), несложно проверить равенства (25) и (26). С помощью формул (25), (26) и (12) можно доказать, что функция $I_2(\xi_0,\eta_0)$ является решением уравнения (5) и удовлетворяет краевым условиям (27). $\square$

Полагая в тождестве (10) v — решение задачи D_1', $w = A(\xi,\eta;\ \xi_0,\eta_0)$ — функция Римана–Адамара задачи D_1' и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим формулу решения задачи D_1'

$$v(\xi_0,\eta_0) = 2k_1(1-2q)\int_0^{\xi_0} \frac{\tau_1(\xi)\xi(\eta_0^2-\xi_0^2)^{1-2q}}{(\xi_0^2-\xi^2)^{1-q}(\eta_0^2-\xi^2)^{1-q}}d\xi + \int_0^{\eta_0} A(0,\eta;\xi_0,\eta_0)\left[\psi_1'(\eta)+\frac{2q}{\eta}\psi_1(\eta)\right]d\eta. \tag{29}$$

Теорема 2. *Если $\tau_1(\xi)$ непрерывна на $[0,1]$ и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_1 > 1-q$ на $(0,1)$, $\psi_1(\eta)\in C^2[0,1]$, $\tau_1(0)=\psi_1(0)$, то существует единственное решение задачи D_1' для уравнения* (5), *и оно определяется формулой* (29).

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие леммы.

Лемма 4. *Если функция $v(\xi,\eta)$, определенная равенством*

$$v(\xi,\eta) = (\eta^2-\xi^2)^{1-2q}w(\xi,\eta),$$

является решением уравнения (5), *то функция $w(\xi,\eta)$ — решением уравнения*

$$w_{\xi\eta} + \frac{1-q}{\eta-\xi}(w_\xi - w_\eta) + \frac{1-q}{\eta+\xi}(w_\xi+w_\eta) = 0. \tag{30}$$

Верно и обратное утверждение.

Лемма 5. *Если функция $\tau_1(\xi)$ непрерывна на $[0,1]$ и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_1 > 1-q$ при $0<\xi<1$, то функция*

$$J(\xi_0,\eta_0) = 2k_1(1-2q)(\eta_0^2-\xi_0^2)^{1-2q}\int_0^{\xi_0}\frac{\tau_1(\xi)\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{1-q}(\eta_0^2-\xi^2)^{1-q}}d\xi$$

является решением уравнения (5) *и удовлетворяет краевым условиям*

$$J(0,\eta_0)=0, \qquad \lim_{\eta_0\to\xi_0} J(\xi_0,\eta_0) = \tau_1(\xi_0). \tag{31}$$

Доказательство. Представим функцию J в виде

$$J(\xi_0,\eta_0) = 2k_1(1-2q)(\eta_0^2-\xi_0^2)^{1-2q}w(\xi_0,\eta_0),$$

где

$$w(\xi_0,\eta_0) = \int_0^{\xi_0}\frac{\tau_1(\xi)\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{1-q}(\eta_0^2-\xi^2)^{1-q}}d\xi. \tag{32}$$

Если функция $\tau_1(\xi)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $(0,1)$ с показателем $\alpha_1 > 1-q$, то в силу леммы 1 функция $w(\xi_0,\eta_0)$, определенная равенством (32), является решением уравнения (30). Тогда на основании леммы 4 функция $J(\xi_0,\eta_0)$ является решением уравнения (5).

Докажем, что $J(\xi_0,\eta_0)$ удовлетворяет краевым условиям (31). Справедливость первого из них очевидна. Для доказательства второго граничного условия функцию $J(\xi_0,\eta_0)$ представим в виде

$$J(\xi_0,\eta_0) = 2k_1(1-2q)(\eta_0^2-\xi_0^2)^{1-2q}\int_0^{\xi_0}\frac{[\tau_1(\xi)-\tau_1(\xi_0)]\,\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{1-q}(\eta_0^2-\xi^2)^{1-q}}d\xi +$$
$$+ k_1(1-2q)(\eta_0^2-\xi_0^2)^{1-2q}\tau_1(\xi_0)\int_0^{\xi_0}\frac{2\xi}{(\xi_0^2-\xi^2)^{1-q}(\eta_0^2-\xi^2)^{1-q}}d\xi = J_1(\xi_0,\eta_0)+J_2(\xi_0,\eta_0).$$

Поскольку функция $\tau_1(\xi)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha_1 > 1-q$, то интеграл $J_1(\xi_0,\eta_0)$ при $\eta_0 \to \xi_0$ сходится и принимает значение, равное нулю. В интеграле, содержащемся в $J_2(\xi_0,\eta_0)$, проведем замену $\xi^2 = \xi_0^2 t$. Тогда получим

$$J_2(\xi_0,\eta_0) = k_1(1-2q)(\eta_0^2-\xi_0^2)^{1-2q}\tau_1(\xi_0)\xi_0^{2q}\eta_0^{2q-2}\int_0^1 (1-t)^{q-1}\left(1-\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}t\right)^{q-1} dt.$$

В силу (17) и (18) имеем

$$J_2(\xi_0,\eta_0) = \frac{\Gamma(1-q)}{\Gamma(1+q)\Gamma(1-2q)}\tau_1(\xi_0)\xi_0^{2q}\eta_0^{-2q}F\left(2q,q,q+1;\frac{\xi_0^2}{\eta_0^2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{\eta_0\to\xi_0} J_2(\xi_0,\eta_0) = \tau_1(\xi_0).$$

Литература

1. Сабитов К.Б., Карамова А.А., Шарафутдинова Г.Г. *К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 11. – С. 70–80.
2. Кузьмин А.Г. *Неклассические уравнения смешанного типа и их применения в газовой динамике.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. – 208 с.
3. Gellerstedt S. *Quelques problemes mixtes pour l'equation* $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik. – 1937. – 26A (3). – P. 1–32.
4. Бабенко К.И. *К теории уравнений смешанного типа*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – М., МИАН, 1952. – 156 с.
5. Смирнов М.М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения.* – Минск: Вышэйш. школа, 1977. – 160 с.
6. Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1971. – 172 с.
7. Гордеев А.М. *Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу* // Волжский матем. сб. – Куйбышев, 1968. – Вып. 6. – С. 56–61.
8. Хайруллин Р.С. *К теории уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11. – С. 69–76.
9. Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г. *Задачи Дарбу для вырождающегося гиперболического уравнения* // Дифференц. уравнения и их приложения в физике. Сб. тр. Стерлитамакского филиала АН РБ. – Стерлитамак, 1999. – С. 68–82.
10. Сабитов К.Б. *Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 6. – С. 1023–1032.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм и произведений.* – М.: Наука, 1971. – 1100 с.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т.1. – М.: Изд-во физ.-матем. лит., 1965. – 296 с.

Стерлитамакский государственный педагогический институт

Стерлитамакский филиал Академии Наук Республики Башкортостан

Поступила 10.05.2001