ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 517.948 : 517.544

Н.А. ДЕГТЯРЕНКО

РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

1. Будем рассматривать интегральное уравнение типа свертки вида

$$\lambda(x)\varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty k_1(x-t)\varphi(t)dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 k_2(x-t)\varphi(t)dt + \mu(x)\overline{\varphi(x)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty k_3(x-t)\overline{\varphi(t)}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 k_4(x-t)\overline{\varphi(t)}dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

где $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ — вещественные кусочно-постоянные функции

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & x > 0; \\ \lambda_2, & x < 0, \end{cases} \qquad \mu(x) = \begin{cases} \lambda_3, & x > 0; \\ \lambda_4, & x < 0. \end{cases}$$

Это уравнение впервые было рассмотрено в ([1], с. 33–34).

Искомая функция $\varphi(x)$, свободный член $f(x)$ и разностные ядра считаются принадлежащими классу $\{0\}$. Классы $\{0\}$ и $\{\{0\}\}$ были введены в ([2], с. 12). При помощи аппарата преобразования Фурье уравнение (1) приводится в ([1], с. 40–41) к краевому условию вида

$$[\lambda_1 + K_1(x)]\Phi^+(x) - [\lambda_2 + K_2(x)]\Phi^-(x) + [\lambda_3 + K_3(x)]\overline{\Phi^+(-x)} - \\ - [\lambda_4 + K_4(x)]\overline{\Phi^-(-x)} = F(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

где $\Phi^\pm(x) \in \{\{0\}\}$ и являются предельными значениями на действительной оси аналитических соответственно в верхней и нижней полуплоскостях функций $\Phi^\pm(z)$. Присоединяя к (2) равенство, полученное из него комплексным сопряжением и заменой x на $(-x)$, и исключая из них $\overline{\Phi^+(-x)}$, получим краевое условие вида

$$\Delta_1(x)\Phi^+(x) = C(x)\Phi^-(x) + D(x)\overline{\Phi^-(-x)} + G(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (3)$$

где введены обозначения

$$C(x) = [\lambda_2 + K_2(x)][\lambda_1 + \overline{K_1(-x)}] - [\lambda_3 + K_3(x)][\lambda_4 + \overline{K_4(-x)}];$$
$$D(x) = [\lambda_1 + \overline{K_1(-x)}][\lambda_4 + K_4(x)] - [\lambda_3 + K_3(x)][\lambda_2 + \overline{K_2(-x)}];$$
$$G(x) = [\lambda_1 + \overline{K_1(-x)}]F(x) - [\lambda_3 + K_3(x)]\overline{F(-x)};$$
$$\Delta_1(x) = [\lambda_1 + K_1(x)][\lambda_1 + \overline{K_1(-x)}] - [\lambda_3 + K_3(x)][\lambda_3 + \overline{K_3(-x)}].$$

Функции $\Delta_1(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $G(x)$ принадлежат классу $\{\{0\}\}$. Обозначения для коэффициентов задачи (3) взяты из ([1], с. 41). Полученная краевая задача (3) и уравнение (1) эквивалентны в том смысле, что, найдя решение $\Phi^\pm(x)$ краевой задачи, решение уравнения получим по формуле

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)]e^{-itx}dt.$$

При этом линейно независимым решениям краевой задачи (3) соответствуют линейно независимые решения уравнения (1) и наоборот.

2. Зафиксируем целое неотрицательное число h. Обозначим через $r_1, r_2, \ldots, r_{h+1}$ попарно различные фиксированные отрицательные вещественные числа, а через $r_{2h+2}, r_{2h+1}, \ldots, r_{h+2}$ — числа, соответственно симметричные им относительно нуля. Введем обозначение $U := \bigcup\limits_{i=0}^{h}(r_{2i+1}, r_{2i+2})$. Будем предполагать, что коэффициенты краевого условия (3) удовлетворяют следующим тождествам:

$$\begin{aligned} &C(x) \equiv 0 \quad \text{при} \ \ x \in U, \\ &D(x) \equiv 0 \quad \text{при} \ \ x \in R \setminus \overline{U}. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда краевое условие (3) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\Delta_1(x)\Phi^+(x) = D(x)\overline{\Phi^-(-x)} + G(x) \quad \text{при} \ \ x \in U, \\ &\Delta_1(x)\Phi^+(x) = C(x)\Phi^-(x) + G(x) \qquad \text{при} \ \ x \in R \setminus \overline{U}. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу принадлежности функций $C(x)$ и $D(x)$ классу $\{\{0\}\}$ выполняются следующие равенства:

$$C(r_i) = 0, \ \ D(r_i) = 0 \ \ \text{при} \ \ i = \overline{1, 2h+2}. \tag{6}$$

Будем предполагать, что также выполняются условия

$$\lambda_i + K_i(r_j) \neq 0, \ \ i = 1, 2; \ \ j = \overline{1, 2h+2}. \tag{7}$$

Тогда из (6) легко получить

$$\lambda_i + K_i(r_j) \neq 0, \ \ i = 3, 4; \ \ j = \overline{1, 2h+2}. \tag{7'}$$

Лемма. *Коэффициент $\Delta_1(x)$ в точках $x = r_j$, $j = \overline{1, 2h+2}$, обращается в нуль.*

Доказательство. Рассмотрим любую точку $x = r_j$, $j = \overline{1, 2h+2}$. Из условий (6) следуют равенства

$$\begin{aligned} &[\lambda_2 + \overline{K_2(-r_j)}][\lambda_1 + K_1(r_j)] = [\lambda_3 + \overline{K_3(-r_j)}][\lambda_4 + K_4(r_j)]; \\ &[\lambda_2 + K_2(r_j)][\lambda_1 + \overline{K_1(-r_j)}] = [\lambda_3 + K_3(r_j)][\lambda_4 + \overline{K_4(-r_j)}]; \\ &[\lambda_1 + \overline{K_1(-r_j)}][\lambda_4 + K_4(r_j)] = [\lambda_3 + K_3(r_j)][\lambda_2 + \overline{K_2(-r_j)}]; \\ &[\lambda_1 + K_1(r_j)][\lambda_4 + \overline{K_4(-r_j)}] = [\lambda_3 + \overline{K_3(-r_j)}][\lambda_2 + K_2(r_j)]. \end{aligned}$$

Перемножим все четыре равенства между собой и сократим общие множители. Выпишем результат $[\lambda_1 + K_1(r_j)]^2[\lambda_1 + \overline{K_1(-r_j)}]^2 = [\lambda_3 + K_3(r_j)]^2[\lambda_3 + \overline{K_3(-r_j)}]^2$. Из этого равенства следуют две возможности:

1) $[\lambda_1 + K_1(r_j)][\lambda_1 + \overline{K_1(-r_j)}] = [\lambda_3 + K_3(r_j)][\lambda_3 + \overline{K_3(-r_j)}]$, т. е. $\Delta_1(r_j) = \Delta_1(-r_j) = 0$,

2) $[\lambda_1 + K_1(r_j)][\lambda_1 + \overline{K_1(-r_j)}] = -[\lambda_3 + K_3(r_j)][\lambda_3 + \overline{K_3(-r_j)}]$.

Покажем, что вторая возможность не реализуется. Предположим противное. Тогда выразим $C(-r_j)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} C(-r_j) &= -[\lambda_2 + K_2(-r_j)]\frac{[\lambda_3 + \overline{K_3(r_j)}][\lambda_3 + K_3(-r_j)]}{[\lambda_1 + K_1(-r_j)]} - [\lambda_3 + K_3(-r_j)][\lambda_4 + \overline{K_4(r_j)}] = \\ &= -\frac{[\lambda_3 + K_3(-r_j)]}{[\lambda_1 + K_1(-r_j)]}(\overline{D(r_j)} + 2[\lambda_2 + K_2(-r_j)][\lambda_3 + \overline{K_3(r_j)}]) = \\ &= -\frac{2[\lambda_3 + K_3(-r_j)][\lambda_2 + K_2(-r_j)][\lambda_3 + \overline{K_3(r_j)}]}{[\lambda_1 + K_1(-r_j)]} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, хотя бы один из множителей числителя равен нулю. Получили противоречие с условиями (7). Полученное противоречие доказывает, что второе равенство не выполняется. Следовательно, имеет место только первое равенство для любой точки $x = r_j$, $j = \overline{1, 2h+2}$. $\square$

Будем решать задачу (5), предполагая, что $\Delta_1(x)$, $C(x)$, $D(x)$ в соответствующих окрестностях точек $x = r_j$, $j = \overline{1, 2h+2}$, (т. е. там, где коэффициенты отличны от тождественного нуля) являются бесконечно малыми функциями одного и того же порядка. Предположим также, что свободный член $G(x)$ в окрестностях этих точек имеет порядок не ниже, чем $\Delta_1(x)$. Запишем эти условия в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&C(x) = O^*(\Delta_1(x)) \quad \text{при} \quad \begin{cases} x \to r_i,\ x < r_i, & i = 2k+1,\ k = \overline{0, h}; \\ x \to r_i,\ x > r_i, & i = 2k+2,\ k = \overline{0, h}, \end{cases} \\
&D(x) = O^*(\Delta_1(x)) \quad \text{при} \quad \begin{cases} x \to r_i,\ x > r_i, & i = 2k+1,\ k = \overline{0, h}; \\ x \to r_i,\ x < r_i, & i = 2k+2,\ k = \overline{0, h}, \end{cases} \\
&G(x) = O(\Delta_1(x)) \quad\ \ \text{при} \quad x \to r_i,\ \ i = \overline{1, 2h+2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

В силу принадлежности классу $\{\{0\}\}$ пределы на бесконечности коэффициентов $\Delta_1(x)$, $C(x)$ задачи (5), свободного члена $G(x)$ и искомых функций $\Phi^{\pm}(x)$ равны нулю. Будем предполагать, что в окрестности бесконечно удаленной точки $\Delta_1(x)$ и $C(x)$ являются бесконечно малыми функциями одного и того же порядка, а $G(x)$ имеет в окрестности этой точки порядок не ниже, чем $\frac{C(x)}{x}$, т. е.

$$\begin{aligned}
\Delta_1(x) &= O^*(C(x)) \quad \text{при} \ \ x \to \infty, \\
G(x) &= O\Big(\frac{C(x)}{x}\Big) \quad \text{при} \ \ x \to \infty.
\end{aligned} \tag{9}$$

Сделаем следующие предположения:

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in R \setminus \{r_1, r_2, \ldots, r_{2h+2}\} : \Delta_1(x) \neq 0, \\
\forall\, x \in R \setminus \overline{U} : C(x) \neq 0, \\
\forall\, x \in U : D(x) \neq 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Будем решать задачу, предполагая , что выполняются условия (4), (7)–(10). Из этих ограничений следует, что если решение задачи (5) существует, то оно будет принадлежать классу ограниченных функций, имеющих нуль кратности, большей либо равной единице лишь в одной точке (бесконечно удаленной). Заметим, что при этом предельные значения сверху и снизу $\Phi^{\pm}(x)$ на вещественной оси функций $\Phi^{\pm}(z)$ будут принадлежать классу $\{\{0\}\}$.

3. Введем вектор-функцию

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(z) \\ \Phi_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(z) \\ \overline{\Phi(-\overline{z})} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Очевидно, что функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ будут связаны между собой тождеством

$$\Phi_1(z) \equiv \overline{\Phi_2(-\overline{z})}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что при $x \in \mathbb{R}$ выполняются следующие тождества:

$$\Phi_1^+(x) \equiv \overline{\Phi_2^+(-x)}, \quad \Phi_1^-(x) \equiv \overline{\Phi_2^-(-x)}. \tag{13}$$

Здесь $\Phi_1^{\pm}(x)$, $\Phi_2^{\pm}(x)$ — предельные значения сверху $(+)$ и снизу $(-)$ на действительной оси функций $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$. Присоединим к каждому равенству (5) равенство, полученное из него комплексным сопряжением и заменой x на $(-x)$. С учетом формул (11)–(13) получим краевое условие вида

$$
\begin{aligned}
&\Delta_1(x)\Phi_1^+(x) = D(x)\Phi_2^-(x) + G(x), && \text{при } x \in U;\\
&\overline{\Delta_1(-x)}\Phi_2^+(x) = \overline{D(-x)}\Phi_1^-(x) + \overline{G(-x)}, && \\
&\Delta_1(x)\Phi_1^+(x) = C(x)\Phi_1^-(x) + G(x), && \text{при } x \in R \setminus \overline{U}.\\
&\overline{\Delta_1(-x)}\Phi_2^+(x) = \overline{C(-x)}\Phi_2^-(x) + \overline{G(-x)}, &&
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Полученная система уравнений (14) эквивалентна системе уравнений (5). Заметим, что если в уравнениях (14) заменить x на $(-x)$ и все функции заменить комплексно-сопряженными, то условия сопряжения (14) перейдут сами в себя. Система (14) есть задача Римана для двух пар функций с линией разрыва R. Сформулируем ее более подробно. *Найти все функции* $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, *аналитические в* $C \setminus R$, *предельные значения которых на действительной оси принадлежат классу* $\{\{0\}\}$ *и удовлетворяют равенствам* (14), *предполагая, что на коэффициенты краевого условия накладываются ограничения вида* (4), (7)–(10).

4. Задачу (14) будем решать сведением к скалярной задаче Римана на римановой поверхности рода h, задаваемой уравнением

$$
w^2 = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k). \tag{15}
$$

Рассмотрим расширенную комплексную плоскость с разрезами от r_{2i+1} до r_{2i+2} $(i = \overline{0,h})$ по вещественной оси. Обозначим через D полученную область, а через $D \cup \partial D$ — ее компактификацию Мазуркевича (область с краем) ([3], с. 24). На разрезанной плоскости выделим две однозначные непрерывные ветви корня $w(z) = \sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2h+2}(z-r_k)}$. Через $w(z) = \sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2h+2}(z-r_k)}$ обозначим ту непрерывную ветвь, которая при $z \to \infty$ имеет разложение $\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{2h+2}(z-r_k)} = z^{h+1} + \cdots$. Возьмем два экземпляра $D \cup \partial D$, которые обозначим через $D^+ \cup \partial D^+$ и $D^- \cup \partial D^-$. Расположив $D^+ \cup \partial D^+$ над $D^- \cup \partial D^-$, склеим их "накрест" вдоль разрезов $[r_{2i+1}, r_{2i+2}]$ $(i = \overline{0,h})$. В результате получим риманову поверхность $\mathfrak{R}$ рода h, алгебраическое уравнение которой совпадает с (15). Будем считать, что

$$
D^{\pm} = \{(z,\ \pm w(\dot z)) \mid z \in D\}.
$$

Каждый лист поверхности $\mathfrak{R}$ имеет бесконечно удаленную точку. Обозначим эти точки соответственно символами (∞, ∞_1), (∞, ∞_2). За локальный параметр окрестностей вышеуказанных точек принимается $t = \frac{1}{z}$. Точки вида $(r_k, 0)$ $(k = \overline{1, 2h+2})$ являются единственными точками ветвления поверхности $\mathfrak{R}$. Переменная $t = \sqrt{z - r_k}$ используется в качестве локального параметра окрестностей точек ветвления. В регулярных точках $(z, w) \in \mathfrak{R}$ за локальный параметр принимается z.

Краю ∂D припишем ориентацию, указанную на рис. 1.

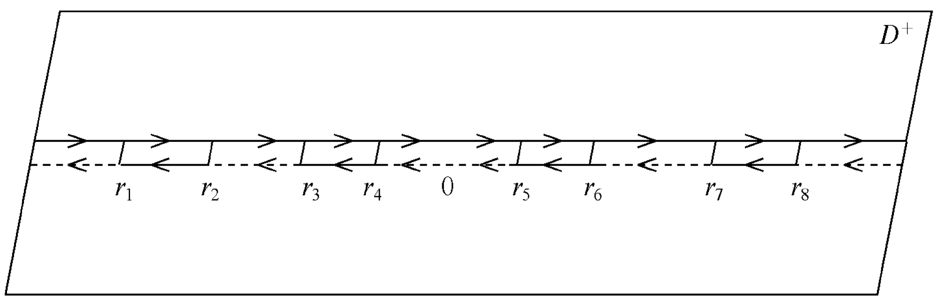

Рис. 1.

Рисунок 1 соответствует случаю $h = 3$. Область D^+ остается слева при движении вдоль края в положительном направлении. Условимся считать, что интервалы $(-\infty; r_1)$, (r_{2i}, r_{2i+1}) $(i = \overline{1,h})$; $(r_{2h+2}; +\infty)$ вещественной оси на листе D^+ ориентированы слева направо, а на листе D^- — в противоположном направлении (на рис. 1 пунктиром обозначается линия на нижнем листе). Канонические сечения a_i и b_i $(i = \overline{1,h})$ на $\mathfrak{R}$ выбираем и ориентируем стандартным образом ([4], сс. 119, 155).

На $\mathfrak{R}$ введем новую неизвестную кусочно-аналитическую функцию $F(z,w)$, $(z,w) \in \mathfrak{R}$, полагая

$$F(z,w) = \begin{cases} \Phi_1(z), & (z,w) \in D^+; \\ \Phi_2(z), & (z,w) \in D^-. \end{cases} \tag{16}$$

Из (12) следует, что она должна удовлетворять условию

$$F(z,w) = \overline{F(-\overline{z},\, -w(\overline{z}))}. \tag{17}$$

Функция $F(z,w)$ является разрывной вдоль общей границы областей D^+ и D^-. Обозначим эту границу L_1. Через L_2 обозначим объединение множеств вида $\{(x,\vartheta) \mid x \in (-\infty; r_1)\}$, $\{(x,\vartheta) \mid x \in (r_{2i}, r_{2i+1}),\ i = \overline{1,h}\}$, $\{(x,\vartheta) \mid x \in (r_{2h+2}; +\infty)\}$, где $\vartheta^2 = \prod\limits_{k=1}^{2h+2}(x - r_k)$, $(x,\vartheta) \in \mathfrak{R}$.

Выпишем краевое условие на контуре $L := L_1 \cup L_2$ для функции $F(z,w)$. Введем обозначения

$$\widetilde{\Delta}_1(x,\vartheta) = \begin{cases} D(x)/\Delta_1(x) & \text{на верхних берегах всех разрезов;} \\ \overline{\Delta_1(-x)/D(-x)} & \text{на нижних берегах всех разрезов,} \end{cases}$$

$$\widetilde{G}_1(x,\vartheta) = \begin{cases} G(x)/\Delta_1(x) & \text{на верхних берегах всех разрезов;} \\ \overline{-G(-x)/D(-x)} & \text{на нижних берегах всех разрезов,} \end{cases}$$

$$\widetilde{\Delta}_2(x,\vartheta) = \begin{cases} C(x)/\Delta_1(x) & \text{при } (x,\vartheta) \in L_2,\ \ \vartheta > 0; \\ \overline{\Delta_1(-x)/C(-x)} & \text{при } (x,\vartheta) \in L_2,\ \ \vartheta < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{G}_2(x,\vartheta) = \begin{cases} G(x)/\Delta_1(x) & \text{при } (x,\vartheta) \in L_2,\ \ \vartheta > 0; \\ \overline{-G(-x)/C(-x)} & \text{при } (x,\vartheta) \in L_2,\ \ \vartheta < 0, \end{cases}$$

$$\Delta(x,\vartheta) = \begin{cases} \widetilde{\Delta}_1(x,\vartheta) & \text{при } (x,\vartheta) \in L_1; \\ \widetilde{\Delta}_2(x,\vartheta) & \text{при } (x,\vartheta) \in L_2, \end{cases}$$

$$G_1(x,\vartheta) = \begin{cases} \widetilde{G}_1(x,\vartheta) & \text{при } (x,\vartheta) \in L_1; \\ \widetilde{G}_2(x,\vartheta) & \text{при } (x,\vartheta) \in L_2. \end{cases}$$

Учитывая эти обозначения и (16), получим краевое условие на $\mathfrak{R}$

$$F^+(x,\vartheta) = \Delta(x,\vartheta)F^-(x,\vartheta) + G_1(x,\vartheta), \quad (x,\vartheta) \in L, \tag{18}$$

где $F^{\pm}(x,\vartheta)$ — предельные значения слева и справа функции $F(z,w)$ на L.

Заметим, что если в краевом условии (18) заменить $(x,\vartheta(x))$ на $(-x,-\vartheta(x))$ и заменить все функции комплексно-сопряженными, то оно при выполнении условия (17) перейдет само в себя, т. к. коэффициент задачи $\Delta(x,\vartheta)$ и свободный член $G_1(x,\vartheta)$ удовлетворяют условиям

$$\Delta(x,\vartheta(x)) = \frac{1}{\overline{\Delta(-x,-\vartheta(x))}}, \quad G_1(x,\vartheta(x)) = \overline{-G_1(-x,-\vartheta(x))}\Delta(x,\vartheta(x)). \tag{19}$$

Эти условия проверяются непосредственно. С другой стороны, если $F(z,w(z))$ является решением краевой задачи (18), то $\overline{F(-\overline{z},-w(\overline{z}))}$ также является решением этой задачи в силу (19). Таким образом, для того чтобы общее решение краевой задачи (18) давало общее решение задачи (14), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие симметрии (17). Поскольку решение и коэффициенты задачи (18) принадлежат гёльдеровскому классу (H-непрерывны), то для ее решения можно воспользоваться теоремами и формулами из [4]. Из постановки задачи (14) следует, что дивизор J ([4], с. 129), определяющий класс функций, которому принадлежат решение (если оно существует) и свободный член задачи (18), имеет вид $J = (\infty, \infty_1)^{-1}(\infty, \infty_2)^{-1}$.

5. Рассмотрим однородную задачу

$$\widehat{F}^+(x,\vartheta) = \Delta(x,\vartheta)\widehat{F}^-(x,\vartheta), \quad (x,\vartheta) \in L. \tag{20}$$

Соответствующая союзная задача для дифференциалов имеет вид

$$d\Psi^+(x,\vartheta) = \frac{1}{\Delta(x,\vartheta)} d\Psi^-(x,\vartheta), \quad (x,\vartheta) \in L. \tag{21}$$

Сначала будем решать задачи (20) и (21) без учета условия симметрии, а затем обеспечим его выполнение.

Множество точек контура L обозначим символом $\{L\}$ и будем считать его топологическим пространством с индуцированной топологией. Множество $\{L\} \setminus \{(r_1, 0), (r_2, 0), \dots, (r_{2h+2}, 0), (\infty, \infty_1), (\infty, \infty_2)\}$ распадается на конечное число связных компонент $\{L_j\}$, каждая из которых есть гладкая открытая жорданова кривая, гомеоморфная интервалу $(0;1)$ числовой оси. Кривые L_j назовем *кривыми контура* L. Каждая кривая L_j имеет начальную и концевую точки, которые принадлежат множеству $\{(r_1, 0), (r_2, 0), \dots, (r_{2h+2}, 0), (\infty, \infty_1), (\infty, \infty_2)\}$. На каждой из них задана H-непрерывная функция $\Delta_j(x,\vartheta)$, конечная и не обращающаяся в нуль, H-непрерывно продолжимая на начальную и концевую точки кривой L_j, причем предельные значения являются конечными и отличными от нуля в силу (8)–(10). На каждой кривой L_j можно выделить однозначную ветвь логарифма $\ln \Delta_j(x,\vartheta)$. Выделим произвольным образом указанные ветви, зафиксируем их и будем использовать в дальнейших формулах.

Для решения возникших задач удобно использовать формулы и теоремы из [4]. Чтобы решить задачи (18), (20), (21), необходимо указать комплексно-нормированный базис абелевых дифференциалов первого рода на $\mathfrak{R}$. Нормируя базис абелевых дифференциалов первого рода поверхности $\mathfrak{R}$ $\frac{dz}{w}, \frac{z\,dz}{w}, \dots, \frac{z^{h-1}dz}{w}$, $(z,w) \in \mathfrak{R}$, относительно выбранных канонических сечений, получим комплексно-нормированный базис $du_1(z,w), du_2(z,w), \dots, du_h(z,w)$. Дифференциалы этого базиса вычисляются по формулам ([4], с. 155)

$$du_j(z,w) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{dz}{w} & \dots & \dfrac{z^{h-1}dz}{w} \\ -\delta_{j1} & \displaystyle\int_{a_1} \frac{d\tau}{\xi} & \dots & \displaystyle\int_{a_1} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\xi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\delta_{jh} & \displaystyle\int_{a_h} \frac{d\tau}{\xi} & \dots & \displaystyle\int_{a_h} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\xi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \displaystyle\int_{a_1} \frac{d\tau}{\xi} & \dots & \displaystyle\int_{a_1} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\xi} \\ \dots & \dots & \dots \\ \displaystyle\int_{a_h} \frac{d\tau}{\xi} & \dots & \displaystyle\int_{a_h} \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\xi} \end{vmatrix}} \qquad \begin{matrix} (j = \overline{1,h}), \\ (z,w) \in \mathfrak{R}, \\ (\tau,\xi) \in \mathfrak{R}, \end{matrix}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

Посчитаем индекс коэффициента задачи (20) ([4], с. 132). В каждой точке $(r_k, 0)$, $k = \overline{1, 2h+2}$, контура L начинаются и оканчиваются по две кривые из множества кривых L_j. Обозначим через $L_{k,1}$, $L_{k,2}$ те кривые, которые оканчиваются в произвольно зафиксированной точке $(r_k, 0)$, $k = \overline{1, 2h+2}$, а через $L_{k,3}$, $L_{k,4}$ — те кривые, которые начинаются в указанной точке. Через $\Delta_{L_{k,j}}(r_k - 0)$ $(j = 1, 2)$ обозначим соответственно предельные значения слева функции $\Delta(x,\vartheta)$ в концевой точке $(r_k, 0)$ по кривым $L_{k,j}$ $(j = 1, 2)$. Аналогично через $\Delta_{L_{k,j}}(r_k + 0)$ $(j = 3, 4)$ обозначим соответственно предельные значения справа функции $\Delta(x,\vartheta)$ в начальной точке $(r_k, 0)$ по кривым $L_{k,j}$ $(j = 3, 4)$. С учетом введенных обозначений индекс коэффициента задачи (20) будет вычисляться по формуле $\varkappa = \sum\limits_{k=1}^{2h+2} [\varkappa_k]$, где $\varkappa_k = \frac{1}{2\pi}(\arg \Delta_{L_{k,1}}(r_k - 0) + \arg \Delta_{L_{k,2}}(r_k - 0) - \arg \Delta_{L_{k,3}}(r_k + 0) - \arg \Delta_{L_{k,4}}(r_k + 0))$. Здесь и в последующем квадратными скобками будем обозначать целую часть. Заметим, что $\varkappa_k = \varkappa_{2h+3-k}$ $(k = \overline{1, h+1})$ в силу свойства (19) коэффициента $\Delta(x, \vartheta)$. Введем дивизор $E = (r_1, 0)^{[\varkappa_1]}(r_2, 0)^{[\varkappa_2]} \cdot \ldots \cdot (r_{2h+2}, 0)^{[\varkappa_{2h+2}]}$, $\operatorname{ord} E = \varkappa$. Задача (20) сводится к последовательному решению двух задач: проблемы обращения Якоби ([4], § § 4, 5) и задачи нахождения мероморфных всюду на $\mathfrak{R}$ функций, кратных заданному дивизору.

Решение однородной задачи (20) будем искать в виде ([5], с. 112)

$$\widehat{F}(z, w) = \widehat{\varphi}(z, w) \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \Delta(\tau, \xi) \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{h} \left[{\int'}_{(z_0, w_0)}^{(z_j, w_j)} \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau - n_j \int_{a_j} \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau - m_j \int_{b_j} \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau \right] \right\}, \quad (22)$$

где (z_0, w_0) — произвольная фиксированная точка поверхности $\mathfrak{R}$, не принадлежащая контуру L, а через $\widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau$ обозначено выражение

$$\widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau = \frac{w + \xi}{2\xi} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{\widetilde{w} + \xi}{2\xi} \frac{d\tau}{\tau - \widetilde{z}}.$$

Здесь $(\widetilde{z}, \widetilde{w})$ — произвольная фиксированная точка поверхности $\mathfrak{R}$, не принадлежащая контуру L, причем $(\widetilde{z}, \widetilde{w}) \neq (z_0, w_0)$. Штрих перед интегралом в формуле (22) означает, что путь интегрирования не пересекает канонические сечения. Точки (z_j, w_j) и целые числа n_j, m_j $(j = \overline{1, h})$ находятся из того условия, чтобы входящая в формулу (22) экспонента не имела существенно особых точек при $(z, w) = (\infty, \infty_1)$ и $(z, w) = (\infty, \infty_2)$. Разложим $w(z)$ и $\frac{1}{\tau - z}$ в ряды по степеням z при $z \to \infty$ и подставим эти разложения в формулу (22). Заметим, что

$$w(z) \sim z^{h+1} + C_h z^h + C_{h-1} z^{h-1} + \cdots + C_0 \quad \text{при} \quad z \to \infty,$$

где C_i $(i = \overline{0, h})$ — некоторые постоянные. Приравнивая нулю соответствующие коэффициенты при одинаковых положительных степенях z, получим однородную треугольную систему h уравнений с h неизвестными λ_i

$$\begin{cases} \hfill \lambda_0 = 0, \\ \hfill \lambda_0 C_h + \lambda_1 = 0, \\ \hfill \lambda_2 C_{h-1} + \lambda_1 C_h + \lambda_2 = 0, \\ \hfill \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_0 C_2 + \lambda_1 C_3 + \cdots + \lambda_{h-2} C_h + \lambda_{h-1} = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где λ_i выражаются формулой

$$\lambda_i = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Delta(\tau, \xi)}{2\xi} \tau^i d\tau - \sum_{j=1}^{h} \left[{\int'}_{(z_0, w_0)}^{(z_j, w_j)} \frac{\tau^i}{2\xi} d\tau - n_j \int_{a_j} \frac{\tau^i}{2\xi} d\tau - m_j \int_{b_j} \frac{\tau^i}{2\xi} d\tau \right], \quad i = \overline{0, h-1}.$$

Очевидно, что система (23) имеет лишь тривиальное решение. Таким образом, получили задачу обращения абелевых интегралов первого рода, которая имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Delta(\tau, \xi)}{2\xi} \tau^i d\tau = \sum_{j=1}^{h} \left[{\int'}_{(z_0, w_0)}^{(z_j, w_j)} \frac{\tau^i}{2\xi} d\tau - n_j \int_{a_j} \frac{\tau^i}{2\xi} d\tau - m_j \int_{b_j} \frac{\tau^i}{2\xi} d\tau \right], \quad i = \overline{0, h-1}. \quad (24)$$

Эта задача заключается в нахождении точек (z_j, w_j) и целых чисел n_j, m_j $(j = \overline{1, h})$, удовлетворяющих (24). Это и есть проблема обращения Якоби. Общая идея способа, с помощью которого получены уравнения (24), изложена в работе ([5], с. 112). Более подробно этот способ применен в статье ([6], с. 48). Для вычисления точек (z_j, w_j) и целых чисел n_j, m_j $(j = \overline{1, h})$ годится описанный в статье [4] алгоритм решения задачи обращения Якоби. В указанной работе приведен алгоритм для случая произвольной римановой поверхности рода h. Специфика гиперэллиптического случая отражена в статье [7], поэтому на алгоритме здесь не останавливаемся. Будем считать, что решение проблемы обращения Якоби найдено и тем самым определен дивизор $F = (z_0, w_0)^h (z_1, w_1)^{-1} (z_2, w_2)^{-1} \cdot \ldots \cdot (z_h, w_h)^{-1}$.

Функция $\widehat{\varphi}(z, w)$, входящая в формулу (22), есть произвольная мероморфная всюду на $\mathfrak{R}$ функция, кратная дивизору

$$J^{-1}E^{-1}F^{-1} = (\infty, \infty_1)^1 (\infty, \infty_2)^1 (r_1, 0)^{-[\varkappa_1]} (r_2, 0)^{-[\varkappa_2]} \cdot \ldots \cdot \\ \cdot (r_{2h+2}, 0)^{-[\varkappa_{2h+2}]} (z_0, w_0)^{-h} (z_1, w_1)^1 (z_2, w_2)^1 \cdot \ldots \cdot (z_h, w_h)^1.$$

Функцию $\widehat{\varphi}(z, w)$ можно искать в виде

$$\frac{P(z)w + Q(z)}{R(z)},$$

где $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ — многочлены от z, степени и коэффициенты которых находятся из условий, обеспечивающих кратность. Автором получен конкретный вид функции $\widehat{\varphi}(z, w)$, кратной дивизору $J^{-1}E^{-1}F^{-1}$, однако на этом здесь не останавливаемся. Обозначим через l число произвольных комплексных постоянных, содержащихся в функции $\widehat{\varphi}(z, w)$, а следовательно, и в общем решении однородной задачи (20). Тогда общее решение этой задачи выражается формулой (22) и содержит l линейно независимых решений.

Перейдем к решению однородной задачи для дифференциалов (21). Будем искать его в виде

$$d\Psi(z, w) = d\psi(z, w) \exp\Big\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \Delta(\tau, \xi) \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau + \\ + \sum_{j=1}^{h} \Big[{\int'}_{(z_0, w_0)}^{(z_j, w_j)} \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau - n_j \int_{a_j} \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau - m_j \int_{b_j} \widetilde{\omega}_{(z,w)}(\tau, \xi) d\tau \Big] \Big\}, \quad (25)$$

где $d\psi(z, w)$ — произвольный абелев дифференциал, кратный дивизору JEF, а все остальные символы в правой части (25) те же, что и в правой части (22). Дифференциал $d\psi(z, w)$ можно искать в виде

$$\frac{P^*(z)w + Q^*(z)}{R^*(z)} dz,$$

где $P^*(z)$, $Q^*(z)$, $R^*(z)$ — многочлены от z, степени и коэффициенты которых находятся из условий, обеспечивающих кратность дивизору

$$JEF = (\infty, \infty_1)^{-1} (\infty, \infty_2)^{-1} (r_1, 0)^{[\varkappa_1]} (r_2, 0)^{[\varkappa_2]} \cdot \ldots \cdot \\ \cdot (r_{2h+2}, 0)^{[\varkappa_{2h+2}]} (z_0, w_0)^h (z_1, w_1)^{-1} (z_2, w_2)^{-1} \cdot \ldots \cdot (z_h, w_h)^{-1}.$$

Вид дифференциала $d\psi(z, w)$ так же, как и вид функции $\widehat{\varphi}(z, w)$, можно конкретизировать, но на этом здесь не останавливаемся. Обозначим через l' число произвольных комплексных постоянных, содержащихся в дифференциале $d\psi(z, w)$, а следовательно, и в общем решении задачи (21). Тогда общее решение этой задачи выражается формулой (25) и содержит l' линейно независимых решений. Таким образом, получены общие решения однородных задач (20) и (21) без учета условия симметрии (17). Проведем рассуждения, позволяющие учесть это условие.

6. Утверждение. *Число произвольных комплексных постоянных, содержащихся в общем несимметричном решении задачи* (20), *равно числу произвольных вещественных постоянных, содержащихся в общем симметричном решении этой задачи.*

Доказательство. Заметим, что если $F(z, w)$ есть решение задачи (20), то $\overline{F(-\overline{z}, -w(\overline{z}))}$ также есть решение этой задачи в силу (19). Следовательно, $\frac{F(z,w) + \overline{F(-\overline{z}, -w(\overline{z}))}}{2}$, $\frac{F(z,w) - \overline{F(-\overline{z}, -w(\overline{z}))}}{2i}$ также являются решениями задачи (20), причем они удовлетворяют условию симметрии (17).

Кроме того, любое решение $F(z,w)$ однородной задачи (20) может быть представлено в виде линейной комбинации симметричных решений, указанных выше. Пусть $\{F_k(z,w)\}$, $k=\overline{1,l}$, является базисом пространства несимметричных решений задачи (20). Тогда система симметричных решений $\frac{F_k(z,w)+\overline{F_k(-\overline{z},-w(\overline{z}))}}{2}$, $\frac{F_k(z,w)-\overline{F_k(-\overline{z},-w(\overline{z}))}}{2i}$ представляет собой полную систему решений однородной задачи (20). Эта система содержит $2l$ функций. Выберем в ней l линейно независимых симметричных функций и разложим решение однородной задачи по новому базису. Получим формулу общего симметричного решения задачи (20) тогда и только тогда, когда все коэффициенты этого разложения будут вещественными. Количество произвольных вещественных постоянных, содержащихся в общем симметричном решении задачи (20), будет равно l. $\square$

Из утверждения следует, что картина разрешимости однородной задачи (20) останется той же самой и с учетом условия симметрии (17). Под картиной разрешимости понимается количество линейно независимых решений (соответственно и произвольных постоянных), содержащихся в общем решении задачи. В случае симметричного решения речь идет о произвольных вещественных постоянных. В доказательстве утверждения фактически описана процедура нахождения общего решения однородной задачи (20), удовлетворяющего условию симметрии (17). Будем считать, что оно построено, и обозначим его $\widehat{F}_*(z,w)$.

7. Теперь рассмотрим неоднородную задачу (18). Для построения ее симметричного общего решения достаточно построить симметричное частное решение и прибавить к нему общее решение однородной задачи $\widehat{F}_*(z,w)$. Построим сначала частное решение, не удовлетворяющее условию симметрии (17), а затем получим симметричное частное решение.

Для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства ([4], с. 146)

$$\int_L G_1(\tau,\xi)d\Psi^+(\tau,\xi)=0 \tag{26}$$

для всех линейно независимых решений, содержащихся в $d\Psi(z,w)$. Предположим, что эти равенства выполняются, и построим частное решение неоднородной задачи (18). Частное решение этой задачи будет представлено различными аналитическими выражениями в зависимости от того, разрешима нетривиально задача (21) или нет.

Рассмотрим первый случай. Пусть задача (21) имеет нетривиальное решение. Обозначим его $d\Psi_0(z,w)$. Тогда задачу (18) можно переписать в виде следующей задачи “о скачке” для нахождения кусочно-аналитического дифференциала $F(z,w)d\Psi_0(z,w)$:

$$F^+(x,\vartheta)d\Psi_0^+(x,\vartheta)-F^-(x,\vartheta)d\Psi_0^-(x,\vartheta)=G_1(x,\vartheta)d\Psi_0^+(x,\vartheta),\quad (x,\vartheta)\in L.$$

В силу (26) эта задача разрешима, а алгоритм ее решения подробно описан в ([4], с. 147–148). Решив эту задачу, легко найти частное решение задачи (18).

Рассмотрим второй случай. Пусть задача (21) не имеет нетривиальных решений. Это означает, что размерность линейного пространства абелевых на $\mathfrak{R}$ дифференциалов, кратных дивизору JEF, равна нулю. Отсюда следует $\mathrm{ord}(JEF)\geq h-1$. Добавляя в знаменатель дивизора JEF конечное число точек, не лежащих на L, можем дополнить его до минимального дивизора ([4], с. 122). Напомним, что дивизор $\Delta_{\min}$ называется минимальным, если не существует мероморфных всюду на $\mathfrak{R}$ функций, кратных $\Delta_{\min}^{-1}$, и не существует абелевых на $\mathfrak{R}$ дифференциалов, кратных $\Delta_{\min}$. Из теоремы Римана–Роха ([8], с. 122) следует, что для минимального дивизора имеет место равенство $\mathrm{ord}\,\Delta_{\min}=h-1$. Выбор точек, которые нужно добавить в знаменатель дивизора JEF, чтобы дополнить его до минимального, основывается на одном из свойств сопряженных пар точек ([4], с. 157) гиперэллиптической поверхности $\mathfrak{R}$ (т. е. пар вида (z_0,w_0), $(z_0,-w_0)$ точек указанной поверхности). Точки (∞,∞_1), (∞,∞_2) образуют сопряженную пару. Каждая точка ветвления, взятая с кратностью два, также порождает сопряженную пару. Известно, что сопряженные пары (и только они) обладают тем свойством, что существуют две линейно независимые функции

$$C_1 + \frac{C_2}{z - z_0}, \quad C_1 + \frac{C_2}{z - r_k}, \quad C_1 + C_2 z,$$

кратные соответственно дивизорам

$$(z_0, w(z_0))^{-1}(z_0, -w(z_0))^{-1}; \quad (r_k, 0)^{-2}; \quad (\infty, \infty_1)^{-1}(\infty, \infty_2)^{-1}.$$

Если же точки $(z_1, w(z_1))$, $(z_2, w(z_2))$ не образуют сопряженной пары, то существует только одна функция (постоянная), кратная дивизору $(z_1, w(z_1))^{-1}$ $(z_2, w(z_2))^{-1}$. Принимая во внимание изложенное выше свойство, выберем точку поверхности $\mathfrak{R}$, не лежащую на контуре L, так, чтобы она не образовывала сопряженных пар с точками дивизора JEF. Добавим в знаменатель дивизора JEF эту точку, взятую с кратностью $\varkappa - h - 1$. Обозначим полученный дивизор $\Delta_{\min}$. Его порядок будет равным $h - 1$. Дивизор $\Delta_{\min}$ мы построили таким образом, что не существует абелевых на $\mathfrak{R}$ дифференциалов, кратных $\Delta_{\min}$, и не существует мероморфных всюду на $\mathfrak{R}$ функций, кратных $\Delta_{\min}^{-1}$. Следовательно, $\Delta_{\min}$ и есть минимальный дивизор. Принимая его за характеристический дивизор мероморфного аналога ядра Коши ([4], с. 124), построим последний по формуле из ([4], с. 125). Обозначим его $d\omega_{(z,w)}(\tau, \xi)$. Через $X_0(z, w)$ обозначим функцию, в которую переходит правая часть формулы (22), если в ней положить $\widehat{\varphi}(z, w) \equiv 1$. Функция $X_0(z, w)$ удовлетворяет краевому условию (20), поэтому задачу (18) можно свести к задаче "о скачке"

$$\frac{F^+(x, \vartheta)}{X_0^+(x, \vartheta)} - \frac{F^-(x, \vartheta)}{X_0^-(x, \vartheta)} = \frac{G_1(x, \vartheta)}{X_0^+(x, \vartheta)}, \quad (x, \vartheta) \in L.$$

Применяя формулу для решения этой задачи ([4], с. 149), получим частное несимметричное решение

$$F(z, w) = \frac{X_0(z, w)}{2\pi i} \int_L \frac{G_1(\tau, \xi)}{X_0^+(\tau, \xi)} d\omega_{(z,w)}(\tau, \xi)$$

задачи (18).

Частное симметричное решение можно получить из несимметричного следующим образом:

$$F_*(z, w) = \frac{F(z, w) + \overline{F(-\overline{z}, -w(\overline{z}))}}{2}. \tag{27}$$

Если $F(z, w)$ — решение неоднородной задачи, то и $\overline{F(-\overline{z}, -w(\overline{z}))}$ также является решением этой задачи в силу (19). Тогда общее симметричное решение задачи (18) будет иметь вид

$$F^*(z, w) = \widehat{F}_*(z, w) + F_*(z, w), \tag{28}$$

где $\widehat{F}_*(z, w)$ — общее симметричное решение однородной задачи (20), а $F_*(z, w)$ — частное симметричное решение задачи (18), вычисляемое по формуле (27).

8. Подытожим все полученные результаты и опишем тем самым картину разрешимости краевой задачи (5). Напомним, что через l обозначается число линейно независимых симметричных решений однородной задачи (20) и число произвольных вещественных постоянных в симметричном общем решении неоднородной задачи (18). Если $l = 0$, то однородная задача (20) имеет лишь тривиальное решение. Через l' обозначается число условий разрешимости неоднородной задачи (18). Эти условия описываются формулой (26).

Теорема 1. *Если* $\varkappa > 2h$, *то* $l = \varkappa - h - 1$, $l' = 0$. *Если* $\varkappa < 2$, *то* $l = 0$, $l' = -\varkappa + h + 1$. *В "особом случае"* $2 \le \varkappa \le 2h$ *имеет место точная оценка* $\max\{0, \varkappa - h - 1\} \le l \le \frac{\varkappa}{2}$, $l' = l - \varkappa + h + 1$. *Во всех случаях, когда решение задачи* (18) *существует, оно вычисляется по формуле* (28).

Перейдем теперь от решения задачи (18) к решению задачи (5) . Так как построенное решение задачи (18) удовлетворяет условию симметрии (17), то подставив вместо w в решение $F^*(z, w(z))$ выражение $\sqrt{\prod_{k=1}^{2h+2}(z - r_k)}$, получим тем самым решение $\Phi(z)$ задачи (5). Выполнив обратное преобразование Фурье, найдем функцию $\varphi(x)$. Она является решением уравнения (1), ядра которого подчиняются условиям (4), (7)–(10).

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. *Уравнение* (1)*, ядра и свободный член которого подчиняются условиям* (4)*,* (7)*–*(10)*, допускает решение в замкнутой форме. Это уравнение эквивалентно краевой задаче Римана* (5)*, картина разрешимости которой полностью определена в теореме* 1*. Во всех случаях, когда решение уравнения* (1) *существует, оно вычисляется по формуле*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*\left(t, \sqrt{\prod_{k=1}^{2h+2}(t - r_k)}\right) e^{-itx} dt,$$

где $F^*(z, w)$ *определяется формулой* (28)*.*

Литература

1. Комяк И.И. *Об интегральных уравнениях типа свертки с сопряжением* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-матэм. наук. – 1967. – № 2. – С. 33–47.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.
3. Евграфов М.А. *Аналитические функции.* – М.: Наука, 1991. – 447 с.
4. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т.XXVI. – Вып. 1. – С. 113–179.
5. Зверович Э.И. *Смешанная задача теории упругости для плоскости с разрезами, лежащими на вещественной оси* // Тр. симпозиума по механ. сплошн. среды и родственным пробл. анализа. – Тбилиси, 1971. – Т. 1. – С. 103–114.
6. Корзан Л.А. *Однородная смешанная задача теории упругости для полосы с разрезами, лежащими на вещественной оси* // Весцi АНБ. Сер. фiз.-матэм. наук. – 1996. – № 4. – С. 44–49.
7. Зверович Э.И. *О конструктивном решении краевой задачи Римана на гиперэллиптических римановых поверхностях* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 199. – № 4. – С. 758–761.
8. Спрингер Дж. *Введение в теорию римановых поверхностей.* –М.: Ин. лит., 1960. – 343 с.

Белорусский Государственный
Технологический Университет

Поступила
23.03.1998