ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 514.755

*Т.Б. ЖОГОВА*

# СЕМЕЙСТВА $V^2_{2n-1}$, $U^m_{2n-1}$ И ИХ ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ

В данной работе вводятся некоторые классы семейств $L^m_{2n-1}$. Семейства $V^2_{2n-1}$ являются обобщением конгруэнций $V$, а семейства $U^m_{2n-1}$ — обобщением линейных конгруэнций. Дано конструктивное построение семейств $U^m_{2n-1}$. Исследована задача проективного изгибания введенных семейств.

Условимся, что по индексам $i$, $j$, $k$ суммирования нет, и если они находятся в одном и том же математическом выражении, то не принимают равные значения. По индексам $p$, $q$, $r$ всегда проводится суммирование. Все индексы, как правило, принимают значения от 1 до $n$ включительно.

**1.** *Семейства* $V^2_{2n-1}$ *и* $U^m_{2n-1}$. В проективном пространстве $P_{2n-1}$ введем проективный репер $\{A_i, A_{n+i}\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dA_i = \omega_i^p A_p + \omega_i^{n+p} A_{n+p}, \quad dA_{n+i} = \omega_{n+i}^p A_p + \omega_{n+i}^{n+p} A_{n+p},$$

где формы Пфаффа удовлетворяют известным уравнениям структуры проективного пространства.

В [1] введено понятие семейства $L^m_{2n-1}$ и его преобразований Лапласа. При этом, если $(n-1)$-плоскость $L_{n-1} = (A_1 \dots A_n)$ описывает семейство $L^m_{2n-1}$, то в репере 2-го порядка оно определяется системой уравнений Пфаффа

$$\alpha)\ \omega_i^{n+j} = 0, \quad \beta)\ \omega_i^j = a_i^j \omega_j, \quad \gamma)\ \omega_{n+i}^{n+j} = b_i^j \omega_i, \tag{1}$$

где введено обозначение $\omega_i^{n+i} = \omega_i$, и за независимые формы семейства $L^m_{2n-1}$ принимаются формы $\omega_k$, $k = \overline{1,m}$, $2 \le m \le n$.

В [2] введены абсолютные инварианты $J_{ij}$ и относительные инвариантные формы $\varphi_{ij}$ семейства $L^m_{2n-1}$, где

$$J_{ij} = a_i^j a_j^i / b_i^j b_j^i, \quad \varphi_{ij} = \omega_i^j \omega_j + \omega_{n+i}^{n+j} \omega_i.$$

Нулевые линии формы $\varphi_{ij}$ называются асимптотическими линиями фокальной $m$-поверхности $(A_i)$ в направлении фокуса $A_j$.

**Определение 1.** Семейство $L^2_{2n-1}$ назовем семейством $V^2_{2n-1}$, если

$$J_{ij} = -1, \quad \text{т. е.} \quad a_i^j a_j^i = -b_i^j b_j^i.$$

Из определения 1 следует, что $b_i^j = \tau_i^j a_i^j$, $\tau_i^j \tau_j^i = -1$, и учитывая $(1\,\gamma))$, получим

$$\omega_{n+i}^{n+j} = \tau_i^j a_i^j \omega_i, \quad \tau_i^j \tau_j^i = -1. \tag{2}$$

Замыкая систему уравнений $(1\,\alpha), \beta))$, (2), найдем

$$\begin{gathered} a_i^j \Delta a_i^j \wedge \omega_j + \omega_{n+i}^j \wedge \omega_i = 0, \quad \Delta\tau_i^j + \Delta\tau_j^i = 0, \\ \tau_i^j a_i^j (\Delta a_i^j + \Delta\tau_i^j + A_{ij}^p \omega_p) \wedge \omega_i - \omega_{n+i}^j \wedge \omega_j = 0, \quad p \ne i, j, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\Delta a_i^j = d\ln a_i^j + 2\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_{n+j}^{n+j} - (a_p^j a_i^p / a_i^j)\omega_p, \quad p \neq i, j,$$
$$\Delta \tau_i^j = d\ln \tau_i^j + 2(\omega_i^i - \omega_{n+i}^{n+i} - \omega_j^j + \omega_{n+j}^{n+j}),$$
$$A_{ij}^k = (a_k^j a_i^k / a_i^j)(1 - \tau_j^i \tau_k^j \tau_i^k).$$

Замкнутая система уравнений $(1\,\alpha), \beta))$, (2), (3), определяющая семейство $V_{2n-1}^2$, находится в инволюции с характерами $s_1 = 2n(n-1)$, $s_2 = n(n+1)/2 - 2$, т. е. справедлива

**Теорема 1.** *Семейство $V_{2n-1}^2$ существует с произволом $n(n+1)/2 - 2$ функций двух аргументов.*

Геометрический смысл уравнения $J_{ij} = -1$ ($i$, $j$ фиксированы) состоит в том, что асимптотическим линиям фокальной поверхности $(A_i)$ в направлении фокуса $A_j$ соответствует сопряженная система линий фокальной поверхности $(A_j)$ в направлении фокуса $A_i$.

**Определение 2.** Семейство $L_{2n-1}^m$ назовем семейством $U_{2n-1}^m$, если его фокальные $m$-поверхности вырождаются в прямые.

Семейство $U_{2n-1}^m$ при $m \neq n$ определяется замкнутой системой уравнений

$$\omega_i^{n+j} = 0, \quad \omega_i^j = 0, \quad \omega_{n+i}^{n+j} = 0, \quad \omega_{n+i}^j = 0, \tag{4}$$
$$\omega_k = \Lambda_k^r \omega_r, \quad \Delta\Lambda_k^r \wedge \omega_r = 0, \quad r = \overline{1, m}, \quad k = \overline{m+1, n}, \tag{5}$$

где

$$\Delta\Lambda_k^j = d\Lambda_k^j + \Lambda_k^j(\omega_j^j - \omega_{n+j}^{n+j} - \omega_k^k + \omega_{n+k}^{n+k}), \quad j = \overline{1, m}.$$

Эта система находится в инволюции с характерами $s_1 = \dots = s_m = n - m$, т. е. справедлива

**Теорема 2.** *Семейство $U_{2n-1}^m$ при $m \neq n$ существует с произволом $n - m$ функций $m$ аргументов.*

В силу уравнений (4)

$$d(A_i A_{n+i}) = (\omega_i^i + \omega_{n+i}^{n+i})(A_i A_{n+i}),$$

т. е. прямые $l_i = (A_i A_{n+i})$ неподвижны и, следовательно, фокальные $m$-поверхности семейства $L_{2n-1}^m$ вырождаются в прямые $l_i$.

Если $m = n$, то уравнения (5) будут отсутствовать, и семейство $U_{2n-1}^n$ определится вполне интегрируемой системой (4), т. е. справедлива

**Теорема 3.** *Семейство $U_{2n-1}^n$ существует с произволом в $4n(n-1)$ постоянных.*

Система уравнений (4) при фиксированном $i$ является вполне интегрируемой, и ее первые интегралы могут быть приняты за координаты прямой $l_i$ в пространстве $P_{2n-1}$. Таким образом, чтобы конструктивно построить семейство $U_{2n-1}^n$, достаточно в $P_{2n-1}$ взять $n$ прямых $l_i$ общего положения и рассмотреть множество $(n-1)$-плоскостей, каждая из которых пересекает каждую из прямых $l_i$. Заметим, что через точку общего положения по отношению к прямым $l_i$ проходит единственная $(n-1)$-плоскость семейства $U_{2n-1}^n$.

Если $m \neq n$, то нужно еще задать $n - m$ функций $m$ аргументов. Теперь формы $\omega_i$ связаны уравнениями (5). Каждое из уравнений $\omega_i = 0$ является вполне интегрируемым, и его первый интеграл является координатой точки $A_i$ на прямой $l_i$. Зафиксируем в системе (5) индекс $k$. Тогда получим уравнение Пфаффа, решение которого существует с произволом в одну функцию $m$ аргументов. Пусть $t_i$ — координата точки $A_i$ на прямой $l_i$. Тогда функция $t_k = \varphi_k(t_1, \dots, t_m)$, определяющая произвол решения уравнения (5) при фиксированном $k$, будет индуцировать отображение

$$q_k : l_1 \times l_2 \times \dots \times l_m \to l_k. \tag{6}$$

Доказано, что функция $\varphi_k$ однозначно разрешима относительно любого из аргументов $t_1, \ldots, t_m$. В случае $m=2$, $n=3$ отображение (6) определяет квазигруппу, которая была исследована в [3].

**2.** *Изгибание семейств* $V^2_{2n-1}$ *и* $U^m_{2n-1}$. Рассматривается проективное изгибание Фубини–Картана ([4], с. 102). Отнесем семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$, на которое проективным изгибанием 2-го порядка наложимо семейство $L^m_{2n-1}$, к реперу $\{B_i, B_{n+i}\}$ с инфинитезимальными перемещениями

$$dB_i = \Omega^q_i B_q + \Omega^{n+q}_i B_{n+q}, \quad dB_{n+i} = \Omega^q_{n+i} B_q + \Omega^{n+q}_{n+i} B_{n+q}.$$

Если $(n-1)$-плоскость $\overline{L}_{n-1} = (B_1 \ldots B_n)$ описывает семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$, а $\Pi$ — такое проективное преобразование, что

$$\Pi(B_i) = \widetilde{B}_i = A_i, \quad \Pi(B_{n+i}) = \widetilde{B}_{n+i} = A_{n+i}, \quad \Pi(\overline{L}^m_{2n-1}) = \widetilde{L}^m_{2n-1},$$

то условие касания 2-го порядка семейств $L^m_{2n-1}$ и $\widetilde{L}^m_{2n-1}$ определится уравнением

$$\widetilde{L}_{n-1} + d\widetilde{L}_{n-1} + \tfrac{1}{2} d^2 \widetilde{L}_{n-1} = (\theta_0 + \theta_1 + \tfrac{1}{2}\theta_2)(L_{n-1} + dL_{n-1} + \tfrac{1}{2} d^2 L_{n-1}).$$

В дальнейшем используются обозначения

$$\Omega^{n+i}_i = \Omega_i, \quad \widetilde{\omega}^\beta_\alpha = \Omega^\beta_\alpha - \omega^\beta_\alpha, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 2n}.$$

Проективное изгибание 1-го порядка семейства $V^2_{2n-1}$ определяется системой $(1\,\alpha),\beta))$, (2), (3), к которой добавляются уравнения

$$\widetilde{\omega}_i = 0, \quad \Omega^{n+j}_i = 0, \tag{7}$$

$$(\widetilde{\omega}^i_i - \widetilde{\omega}^{n+i}_{n+i}) \wedge \omega_i = 0, \quad \widetilde{\omega}^j_i \wedge \omega_j - \widetilde{\omega}^{n+j}_{n+i} \wedge \omega_i = 0. \tag{8}$$

Исследование замкнутой системы уравнений $(1\,\alpha),\beta))$, (2), (3), (7), (8) показывает, что справедлива

**Теорема 4.** *Существует с произволом в $n(n-1)$ функций двух аргументов семейство $\overline{L}^2_{2n-1}$, на которое изгибанием 1-го порядка с произволом в $n$ функций одного аргумента наложимо заданное семейство $V^2_{2n-1}$.*

Изгибание 1-го порядка семейства $U^m_{2n-1}$ определяется замкнутой системой уравнений (4), (5), (7), (8), исследование которой приводит к следующей теореме.

**Теорема 5.** *Существует с произволом в $n(n-1)$ функций двух аргументов семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$, на которое изгибанием 1-го порядка с произволом в $n$ функций одного аргумента наложимо заданное семейство $U^m_{2n-1}$.*

**Определение 3.** Фокальным изгибанием $k$-го порядка семейства $L^m_{2n-1}$ назовем изгибание $k$-го порядка его фокальных $m$-поверхностей.

При фокальном изгибании 1-го порядка семейства $L^m_{2n-1}$ имеют место уравнения

$$\widetilde{B}_i + d\widetilde{B}_i = (\theta^i_0 + \theta^i_1)(A_i + dA_i).$$

Рассматривая фокальное изгибание 1-го порядка семейства $V^2_{2n-1}$, получим уравнения (7) и уравнения

$$\widetilde{\omega}^j_i = 0, \tag{9}$$

т. е. фокальное изгибание 1-го порядка семейства $V^2_{2n-1}$ влечет за собой его изгибание 1-го порядка. Система (9) с учетом $(1\,\beta))$ имеет дифференциальные следствия

$$\widetilde{\omega}^i_i + \widetilde{\omega}^j_j = p_i \omega_i - p_j \omega_j, \tag{10}$$

а замыкание системы (7), (9), (10) имеет вид

$$(\widetilde{\omega}_i^i - \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+i}) \wedge \omega_i = 0, \quad \widetilde{\omega}_{n+i}^{n+j} \wedge \omega_i = 0, \tag{11}$$

$$(\widetilde{\omega}_{n+i}^j + p_i a_i^j \omega_j) \wedge \omega_i = 0, \quad \Delta p_i \wedge \omega_i = 0, \tag{12}$$

где

$$\Delta p_i = dp_i + p_i(\omega_i^i - \omega_{n+i}^{n+i}) + \widetilde{\omega}_{n+i}^i.$$

Исследование замкнутой системы уравнений $(1\,\alpha),\beta)$), (2), (3), (7), (9)–(12) показывает, что справедлива

**Теорема 6.** *Существует с произволом в $n(2n-1)$ функций одного аргумента семейство $\overline{L}_{2n-1}^2$, на которое фокальным изгибанием 1-го порядка с произволом в $n$ функций одного аргумента наложимо заданное семейство $V_{2n-1}^2$.*

При фокальном изгибании 1-го порядка семейства $U_{2n-1}^m$ имеют место уравнения (7), (9), внешним дифференцированием которых получим уравнения (11) и уравнения

$$\widetilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_i = 0. \tag{13}$$

Исследование замкнутой системы уравнений (4), (5), (7), (9), (11), (13) показывает, что имеет место

**Теорема 7.** *Существует с произволом в $2n(n-1)$ функций одного аргумента семейство $\overline{L}_{2n-1}^m$, на которое фокальным изгибанием 1-го порядка с произволом в $n$ функций одного аргумента наложимо заданное семейство $U_{2n-1}^m$.*

Рассмотрим изгибание 1-го порядка семейства $V_{2n-1}^2$ одновременно с изгибанием 1-го порядка его прямых Лапласа. Тогда дополнительно будут иметь место условия

$$(\widetilde{B}_i \widetilde{B}_{n+i}) + d(\widetilde{B}_i \widetilde{B}_{n+i}) = (\widetilde{\theta}_0^i + \widetilde{\theta}_1^i)((A_i A_{n+i}) + d(A_i A_{n+i})).$$

Оказалось, что в этом случае семейство $V_{2n-1}^2$ является семейством $U_{2n-1}^2$, а семейство $\overline{L}_{2n-1}^2$ является семейством $\overline{U}_{2n-1}^2$ и справедлива

**Теорема 8.** *Заданное семейство $U_{2n-1}^2$ допускает изгибание 1-го порядка одновременно с прямыми Лапласа с произволом в $n$ функций одного аргумента.*

При изгибании 2-го порядка семейства $U_{2n-1}^m$ справедлива

**Теорема 9.** *Заданное семейство $U_{2n-1}^m$ допускает изгибание 2-го порядка с произволом в $n$ функций одного аргумента.*

## Литература


1. Макеев Г.Н. *О некотором обобщении преобразований Лапласа* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 2. – С. 123–125.
2. Макеев Г.Н. *Семейства $R_{2n-1}^m$ и $\Phi_{2n-1}^n$* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 1. – С. 84–86.
3. Жогова Т.Б. *О квазигруппе, порождаемой одним классом двупараметрических семейств двумерных плоскостей в $P_5$* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 2. – С. 63–66.
4. Фиников С.П. *Теория пар конгруэнций.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 443 с.



*Нижегородский государственный педагогический университет*



*Поступила* 17.07.2001