ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.927

Э.И. АБДУРАГИМОВ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$y''(x) + f(x,y) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что функция $f(x,z)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial z}$ при $x \in [0,1]$, $z \geq 0$. Пусть при $x \in [0,1]$, $z \geq 0$ выполняются условия

$$a(x)z^p \leq f(x,z) \leq b(x)z^p, \quad p = \mathrm{const} > 1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial z} \geq 0, \tag{4}$$

где $a(x)$, $b(x)$ — непрерывные неотрицательные функции при $x \in [0,1]$, причем $a(x) \leq b(x)$.

В работе доказывается единственность положительного решения задачи (1), (2). Под положительным решением задачи (1), (2) понимается положительная при $x \in (0,1)$ функция $y(x) \in C^2[0,1]$, удовлетворяющая уравнению (1) и обращающаяся в нуль на концах отрезка $[0,1]$.

Ранее в работе [1] единственность положительного решения была доказана для случая функции $f(x,z) = x^m z^n$ ($m \geq 0$, $n > 1$). Здесь этот результат усилен.

Получим априорную оценку положительного решения задачи (1), (2).

Теорема 1. *Если $y(x)$ — положительное решение задачи* (1), (2)*, то для него справедлива оценка*

$$\max_{[0,1]} y(x) \leq (2M)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{5}$$

где

$$M = \left(\int_0^1 a(s)\phi^{p+1}(s)ds \right)^{-1}, \tag{6}$$

$$\phi(s) = \max(s, 1-s), \quad s \in [0,1].$$

Доказательство. Из уравнения (1) следует, что $y(x)$ — выпуклая вверх функция. Тогда легко показать, что

$$y(x) \geq \|y\|\phi(x), \tag{7}$$

где $\|y\| = \max\limits_{[0,1]} y(x)$. С помощью функции Грина

$$G(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s \leq 1; \\ s(1-x), & 0 \leq s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

задачу (1), (2) можно заменить эквивалентным интегральным уравнением

$$y(x)=\int_0^1 G(x,s)f(s,y(s))ds. \tag{8}$$

Отсюда в силу (3) и (7) получаем

$$y(x)\geq \|y\|^p\int_0^1 a(s)\phi^p(s)ds. \tag{9}$$

Легко видеть, что $G(x,s)\geq\phi(x)\phi(s)$. Поэтому из (9) имеем

$$y(x)\geq\phi(x)\|y\|^p\int_0^1 a(s)\phi^{p+1}(s)ds.$$

Переходя здесь к максимуму по x, получим

$$\|y\|\geq\max_{[0,1]}\phi(x)\|y\|^p\int_0^1 a(s)\phi^{p+1}(s)ds=\frac{1}{2}\|y\|^p\int_0^1 a(s)\phi^{p+1}(s)ds,$$

откуда и следует оценка (5). $\square$

Докажем теперь существование положительного решения задачи (1), (2). Обозначим через K конус неотрицательных непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций. Под полуупорядочением $u\prec v$ будем понимать $v(x)-u(x)\in K$, т. е. $v(x)\geq u(x)$ при всех $x\in[0,1]$.

Определение 1 ([2], с. 259). Нелинейный оператор A называется *положительным* на множестве $M\subset E$ (E — банахово пространство), если $AM\subset K$.

Определение 2 ([2], с. 362). Положительный вполне непрерывный оператор A называется *растяжением конуса* K, если существуют такие положительные числа $r_1<r_2$, что

$$Ax\overline{\succ}x,\quad x\in K(0,r_1)\quad(x\neq0) \tag{10}$$

и

$$Ax\overline{\prec}x,\quad x\in K(r_2,\infty). \tag{11}$$

Здесь $K(0,r_1)=\{x:x\in K,\ \|x\|\leq r_1\}$, $K(r_2,\infty)=\{x:x\in K,\ \|x\|\geq r_2\}$. Если вместо (10), (11) потребовать $Ax\overline{\prec}x$, $x\in K(0,r_1)$ $(x\neq0)$ и $Ax\overline{\succ}x$, $x\in K(r_2,\infty)$, то A называется *сжатием конуса* K.

Теорема 2 ([2], с. 362–363). *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A является сжатием или растяжением конуса K. Тогда A имеет в конусе K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Интегральное уравнение (8) запишем в виде

$$y=Ay,$$

где через A обозначен нелинейный интегральный оператор в правой части уравнения (8). Очевидно, A оставляет инвариантным конус K. Кроме того, легко видеть, что он вполне непрерывен. Следовательно, A — положительный вполне непрерывный оператор. Докажем, что он является растяжением конуса K.

Пусть $0<r_1<c_2^{-\frac{1}{p-1}}$, $r_2>(0.5c_1)^{-\frac{1}{p-1}}$, где

$$c_1=\int_0^1 a(s)\phi(s)ds,\quad c_2=\int_0^1 b(s)\phi(s)ds.$$

Для $y \in K(0, r_1)$ в силу (3), (7) и выпуклости вверх функции $y(x)$ имем

$$Ay = \int_0^1 G(x,s)f(s,y(s))ds \leq \|y\|^{p-1}\|y\| \int_0^1 b(s)G(x,s)ds \leq$$
$$\leq r_1^{p-1}\|y\|\phi(x)\int_0^1 b(s)\phi(s)ds \leq r_1^{p-1}c_2 y(x) < y(x),$$

т. е. $Ay \overline{\succ} y$ в $K(0, r_1)$. Для $y \in K(r_2, \infty)$ имеем

$$Ay(\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 G(\tfrac{1}{2},s)f(s,y(s))ds \geq \|y\|^{p-1}\|y\| \int_0^1 a(s)G(\tfrac{1}{2},s)ds \geq r_2^{p-1}\phi(\tfrac{1}{2})y(\tfrac{1}{2})c_1 = \frac{c_1}{2}r_2^{p-1}y(\tfrac{1}{2}) > y(\tfrac{1}{2}),$$

т. е. $Ay \overline{\prec} y$ в $K(r_2, \infty)$. Очевидно, $0 < r_1 < r_2$. Отсюда следует, что оператор A является растяжением конуса K. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если функция $f(x,z)$ непрерывна по обоим аргументам при $x \in [0,1]$, $z \geq 0$ и выполняется условие* (3), *то существует по крайней мере одно положительное решение задачи* (1), (2) *из класса $C^2[0,1]$.*

Условие единственности положительного решения устанавливает

Теорема 4. *Предположим, что функция $f(x,z)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial z}$ при $x \in [0,1]$, $z \geq 0$, и что выполняются условия* (3), (4). *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное положительное решение из класса $C^2[0,1]$.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ и $y(x) + \varphi(x)$ — различные положительные решения задачи (1), (2). Очевидно, они могут иметь лишь конечное число N общих точек. Пусть эти точки будут $0 = x_0 < x_1 \cdots < x_{N-1} = 1$. В них $\varphi(x_k) = 0$, $y(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Через $y_k(x)$ и $y_k(x) + \varphi_k(x)$ обозначим решения уравнения (1) на интервале (x_k, x_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots, N-1$, принимающие в граничных точках значения $y_k = y(x_k)$ и $y_{k+1} = y(x_{k+1})$. Вычитая из равенства $(y_k + \varphi_k)'' + f(x, y_k + \varphi_k) = 0$ равенство $y_k'' + f(x, y_k) = 0$, получим линейное относительно $\varphi_k(x)$ уравнение

$$\varphi_k'' + b_k(x)\varphi_k = 0, \tag{12}$$

где $b_k(x) = \partial f(x, r_k)/\partial y$,

$$\min(y_k(x), y_k(x) + \varphi_k(x)) \leq r_k(x) \leq \max(y_k(x), y_k(x) + \varphi_k(x)).$$

В силу (5) получим оценку $0 \leq r_k(x) \leq 2M^{\frac{1}{p-1}}$. Тогда из (4) следует $0 \leq b_k(x) = \frac{\partial f(x,r_k)}{\partial y} \leq c(M,p)$, где $c(M,p)$ — некоторая константа, зависящая только от M из (6) и p.

Как известно (напр., [3], гл. 4, § 2, с. 255), расстояние между двумя нулями решения уравнения (12) удовлетворяет неравенству

$$d > \frac{\pi}{\sqrt{2\max\limits_{[0,1]} b(x)}} \geq \frac{\pi}{\sqrt{2c(M,p)}},$$

поэтому

$$x_{k+1} - x_k > \frac{\pi}{\sqrt{2c(M,p)}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{13}$$

На интервале (x_k, x_{k+1}) функция $\varphi_k(x)$ удовлетворяет уравнению (12), а в граничных точках — условиям $\varphi_k(x) = \varphi_k(x_{k+1}) = 0$. Отсюда в силу (13) $\varphi_k(x) \equiv 0$ при $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Следовательно, $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$, и $y(x)$ будет единственным положительным решением задачи (1), (2) из класса $C^2[0,1]$. $\square$

Литература

1. Абдурагимов Э.И. *Единственность положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи и численный метод его нахождения* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 5. – С. 3–7.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 542 с.
3. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1950. – 468с.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 11.11.1999
окончательный вариант 19.06.2001