ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 517.9

В.Н. БОБОЧКО

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. II

Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение (СВДУ)

$$\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x) \tag{0.1}$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0,1]$.

Классическое уравнение Лиувилля является частным случаем СВДУ (0.1) при $b(x) \equiv 0$. Поэтому ко всему многообразию задач, относящихся к уравнению Лиувилля, для СВДУ (0.1) добавляются еще новые особенности и трудности исследований. Так, например, для уравнения Лиувилля возможны два основных случая относительно знаков коэффициента $\widetilde{a}(x)$. Если $\widetilde{a}(x)>0$, то корни характеристического уравнения чисто мнимые, а сама точка поворота является стабильной. Если же $\widetilde{a}(x) < 0$, то корни характеристического уравнения действительны. В этом случае точка $x = 0$ — нестабильная точка поворота (одна из функций Эйри неограниченно возрастает на бесконечности).

Для СВДУ (0.1) структура решения уравнения (0.1) уже существенно зависит от знаков двух коэффициентов $\widetilde{a}(x)$ и $b(x)$. Поэтому будем различать следующие основные расположения знаков этих функций.

Случай 1. Пусть $\widetilde{a}(x) > 0$, $b(x) < 0$ при $x \in I$. Тогда $x = 0$ является стабильной точкой поворота для СВДУ (0.1) и общее решение вырожденного уравнения

$$\mathbf{L}_0\omega(x) \equiv x\widetilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x) \tag{0.2}$$

является достаточно гладким для всех $x \in [0,1]$, содержащее произвольную постоянную интегрирования. Это означает, что для построения одного линейно независимого решения СВДУ (0.1) можно использовать решение вырожденного уравнения (0.2). Этот случай изучен автором в [1].

Случай 2. Пусть $\widetilde{a}(x) < 0$, $b(x) > 0$. В этом случае $x = 0$ уже нестабильная точка поворота для СВДУ (0.1). Но решение вырожденного уравнения все же достаточно гладкое для всех $x \in [0,1]$ и тоже содержит произвольную постоянную интегрирования. Следовательно, как и в первом случае, оно тоже может быть использовано для построения линейно независимого решения СВДУ (0.1). Этот случай по сравнению с предыдущим случаем не вносит принципиальных трудностей в построение асимптотики решения СВДУ (0.1). Учитывая разработанную методику построения равномерно пригодной асимптотики решения для алгебраических точек поворота ([2]–[5]) и методику [1], случай 2 представляет в основном только технические трудности.

Случай 3. Пусть $\widetilde{a}(x) > 0$, $b(x) > 0$. Здесь, как и в первом случае, $x = 0$ является стабильной точкой поворота для СВДУ (0.1). Однако решение вырожденного уравнения и его производные уже не являются достаточно гладкими в точке $x = 0$, а именно, решение вырожденного уравнения имеет разрыв второго рода в точке поворота. Поэтому оно не может быть использовано для построения линейно независимого решения СВДУ (0.1). Этот случай уже вносит принципиальные трудности в построение асимптотики решения СВДУ (0.1) по сравнению с предыдущими двумя случаями.

Случай 4. Пусть $\widetilde{a}(x) < 0$, $b(x) < 0$. Тогда $x = 0$, как и во втором случае, является нестабильной точкой поворота для уравнения (0.1). Решение вырожденного уравнения и его производные по аналогии с третьим случаем не являются гладкими в точке $x = 0$. Поэтому оно тоже не может быть использовано для построения линейно независимого решения СВДУ (0.1). Случай 4 уже не вносит принципиальных трудностей в построение асимптотики решения СВДУ (0.1).

В этой работе уравнение (0.1) будем исследовать при выполнении следующих условий.

Условие 1^0. $a(x), b(x), h(x) \in \mathbf{C}^\infty[I]$.

Условие 2^0. $a(x) = x\widetilde{a}(x)$, причем $\widetilde{a}(x) > 0$, $b(x) > 0$ при $x \in I$.

Изучим случай 3. По аналогии с [1], разлагая в ряд Маклорена, получим равенства

$$\frac{b(x)}{x\widetilde{a}(x)} = \frac{\rho}{x} + \delta(x), \quad \frac{h(x)}{\widetilde{a}(x)} = q + x\gamma(x), \tag{0.3}$$

где $\delta(x)$ и $\gamma(x)$ — аналитические функции в окрестности точки $x = 0$, причем $\gamma(0) \neq 0$. Снова предположим, что $\rho \in N$. В обозначениях (0.3) с целью дальнейших удобств знак параметра ρ изменен на противоположный по сравнению с обозначением, введенным в [1]. Поскольку в нашем случае $\rho > 0$, то решение вырожденного уравнения (0.2) уже не является достаточно гладкой функцией в окрестности точки $x = 0$. Поэтому, как уже было сказано, это решение нельзя использовать в явном виде для построения равномерно пригодной асимптотики решения СВДУ (0.1).

В [2]–[5] разработан метод построения равномерно пригодного асимптотического решения СВДУ с алгебраической точкой поворота без явного использования решения вырожденного уравнения.

1. Расширение возмущенного уравнения

Наряду с независимой переменной $x \in I$ введем новую переменную t, которую в отличие от [1] сразу определим в виде

$$t \equiv \varepsilon^{-1}\left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{x\widetilde{a}(x)}dx\right)^{2/3} \equiv \varepsilon^{-1}\varphi(x) \equiv \Phi(x, \varepsilon), \tag{1.1}$$

т. е. регуляризующая переменная (1.1) совпадает с соответствующей регуляризующей переменной, введенной в [1].

С вводом дополнительной переменной t в виде (1.1) согласно методу регуляризации существенно особых функций (СОФ) для определения расширенной функции $\widetilde{y}(x, t, \varepsilon)$ получим расширенное уравнение

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \widetilde{y}(x, t, \varepsilon) = h(x), \tag{1.2}$$

в котором расширенный оператор $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv [\varphi'(x)]^3\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \varepsilon\left[3[\varphi'(x)]^2\frac{\partial}{\partial x} + 3\varphi'(x)\varphi''(x)\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon^2\left[3\varphi'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + 3\varphi''(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi'''(x)\right]\frac{\partial}{\partial t} + a(x)\left[\varepsilon^{-1}\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right] + \varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + b(x). \tag{1.3}$$

Выделим модельный оператор

$$\widetilde{\mathbf{T}} \equiv \frac{\partial^3}{\partial t^3} + t\frac{\partial}{\partial t} \equiv \mathbf{T}\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.4}$$

следующим образом:

$$[\varphi'(x)]^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\varepsilon^{-1}\varphi'(x)a(x)\frac{\partial}{\partial t}\equiv[\varphi'(x)]^3\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\frac{a(x)}{[\varphi'(x)]^2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right]\equiv[\varphi'(x)]^3\widetilde{\mathbf{T}}, \tag{1.5}$$

где

$$\frac{a(x)}{\varepsilon[\varphi'(x)]^2}\equiv t\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)}\equiv\varepsilon^{-1}\varphi(x).$$

С учетом тождества (1.5) расширенный оператор (1.3) запишем в виде

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon\equiv[\varphi'(x)]^3\widetilde{\mathbf{T}}+\mathbf{L}_0+\varepsilon\mathbf{d}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\varepsilon^2\mathbf{m}\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}, \tag{1.6}$$

где

$$\mathbf{L}_0\equiv a(x)\frac{\partial}{\partial x}+b(x), \tag{1.7}$$

$$\mathbf{d}\equiv 3[\varphi'(x)]^2\frac{\partial}{\partial x}+3\varphi'(x)\varphi''(x),\quad \mathbf{m}\equiv 3\varphi'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3\varphi''(x)\frac{\partial}{\partial x}+\varphi'''(x). \tag{1.8}$$

Замечание 1. Результаты этого пункта формально полностью совпадают с соответствующими результатами, описанными в [1].

2. Пространства безрезонансных решений

Введем множества (подпространства) функций

$$\begin{aligned} Y_{rk}&=\{V_{rk}(x)U_k(t)+Q_{rk}(x)U_k'(t)\},\quad k=1,2,\\ Y_{r3}&=\{f_r(x)\Psi(t)+g_r(x)\Psi'(t)\},\quad X_r=\{\omega_r(x)\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $V_{rk}(x)$, $Q_{rk}(x)$, $f_r(x)$, $g_r(x)$, $\omega_r(x)\in\mathbf{C}^\infty[I]$, $U_k(t)$ — функции Эйри–Дородницына [6], т. е. два линейно независимых решения модельного уравнения $U''(t)+tU(t)=0$, а

$$\Psi(t)\equiv U_2(t)\int_\infty^t U_1(\tau)d\tau-U_1(t)\int_\infty^t U_2(\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Укажем на некоторые свойства СОФ (2.2).

1. Имеют место тождества

$$\begin{gathered}\Psi'(t)\equiv U_2'(t)\int_\infty^t U_1(\tau)d\tau-U_1'(t)\int_\infty^t U_2(\tau)d\tau,\\ \Psi''(t)\equiv 1-t\Psi(t),\quad \Psi^{(3)}(t)\equiv-\Psi(t)-t\Psi'(t)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)}\equiv-\Psi(t)-\varepsilon^{-1}\varphi(x)\Psi'(t),\\ \Psi^{(4)}(t)\equiv-2\Psi'(t)+t^2\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)}\cdot\Psi(t)-t\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)}\equiv-2\Psi'(t)+\varepsilon^{-2}\varphi^2(x)\Psi(t)-\varepsilon^{-1}\varphi(x).\end{gathered} \tag{2.3}$$

2. Кроме того, имеют место равенства

$$\widetilde{\mathbf{T}}\Psi(t)=1,\quad \widetilde{\mathbf{T}}\Psi'(t)=-2\Psi'(t), \tag{2.4}$$

т. е. СОФ $\Psi(t)$ и $\Psi'(t)$ инвариантны относительно модельного оператора (1.4).

3. Учитывая точечные значения для СОФ $U_k(t)$ (см. [6], [7]), легко получить точечные значения

$$\Psi(0)=3^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\equiv 3^{-2/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\quad \Psi'(0)=-3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Таким образом, СОФ $\Psi(t)$, которое будет играть основную роль в построении третьего линейно независимого решения СВДУ (0.1), удовлетворяет задаче

$$\Psi''(t)+t\Psi(t)=1,\quad \Psi(0)=3^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right),\quad \Psi'(0)=-3^{-1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right). \tag{2.5}$$

Существенно особая функция $\Psi(t)$ впервые была введена в ([7], сс. 199, 212), где были изучены ее свойства при $t \to +\infty$. Однако в ([7], с. 198) допущена техническая ошибка при написании значения постоянной a, а следовательно, и начальное значение $\Psi(0)$ определено неправильно. Правильной будет формула $a = \sqrt[3]{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \int\limits_0^{+\infty} U_1(\tau)d\tau$.

Из подпространств (2.1) составим новое пространство безрезонансных решений (ПБР)

$$Y_r = \bigoplus_{k=1}^{3} Y_{rk} \bigoplus X_r. \tag{2.6}$$

Элемент ПБР (2.6) имеет вид

$$y_r(x,t) = \sum_{k=1}^{3} y_{rk}(x,t). \tag{2.7}$$

Здесь

$$y_{rk}(x,t) \equiv [V_{rk}(x)U_k(t) + Q_{rk}(x)U'_k(t)] \in Y_{rk}, \quad k = 1, 2, \tag{2.8}$$

$$y_{r3}(x,t) \equiv F_r(x,t) + \omega_r(x) \equiv [f_r(x)\Psi(t) + g_r(x)\Psi'(t) + \omega_r(x)] \in Y_{r3} \bigoplus X_r. \tag{2.9}$$

Сравнивая описанные ПБР (2.6) с ПБР, введенными в [1], можно сказать следующее. Подпространства Y_{rk}, $k = 1, 2$, введенные в этой работе, не содержат СОФ $W_k(t)$, а вместо них мы имеем СОФ $\Psi(t)$ и ее производную, т. е. подпространства Y_{r3} вообще не было в работе [1].

На первый взгляд кажется, что используемые СОФ являются достаточно сложными функциями, а следовательно, и предложенный метод трудно применить на практике. В действительности введенные нами СОФ не вносят значительных трудностей в предложенный метод из-за следующего.

1. Асимптотика построенного решения с любой степенью точности относительно малого параметра содержит только конечное количество СОФ.

2. Существенно особые функции являются решениями наиболее простых дифференциальных уравнений, насколько это возможно в рамках исследуемого СВДУ.

3. С использованием индивидуальных компьютеров легко построить графики решений этих уравнений и получить числовые значения для используемых СОФ.

Изучим действие расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ (см. (1.6)–(1.8)) на элемент ПБР (2.6), т. е. на элемент (2.7). С учетом тождеств (2.3) и (2.4) получим результат действия расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ на элемент $y_r(x,t) \in Y_r$ в виде тождества

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon y_r(x,t) \equiv \sum_{s=0}^{3} \varepsilon^s \mathbf{R}_s y_r(x,t) \equiv \sum_{s=0}^{3} \varepsilon^s \left\{ \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{sk} y_{rk}(x,t) + \mathbf{R}_{s3} F_r(x,t) \right\} + \mathbf{L}_\varepsilon \omega_r(x), \tag{2.10}$$

где операторы $\mathbf{R}_s$ в их действии на $y_r(x,t) \in Y_r$ можно представить в виде тождеств

$$\mathbf{R}_0 y_r(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} \{\mathbf{D}_1 V_{rk}(x)U_k(t) + \mathbf{D}_2 Q_{rk}(x)U'_k(t)\} + \mathbf{D}_1 f_r(x)\Psi(t) + \mathbf{D}_2 g_r(x)\Psi'(t) +$$

$$+ \mathbf{L}_0\omega_r(x) \equiv \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{0k} y_{rk}(x,t) + \mathbf{R}_{03} F_r(x,t) + \mathbf{L}_0 \omega_r(x), \tag{2.11}$$

$$\mathbf{R}_1 y_r(x,t) \equiv -\left[\mathbf{d} + \varphi(x)\mathbf{m}\right] \left[\sum_{k=1}^{2} Q_{rk}(x)U_k(t) + g_r(x)\Psi(t)\right] +$$

$$+ \mathbf{d} f_r(x) \equiv \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{1k} y_{rk}(x,t) + \mathbf{R}_{13} F_r(x,t), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{R}_2 y_r(x,t) \equiv \mathbf{m}\left\{\sum_{k=1}^{2} V_{rk}(x)U_k'(t) + f_r(x)\Psi'(t) + g_r(x)\right\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{2k} y_{rk}(x,t) + \mathbf{R}_{23} F_r(x,t), \tag{2.13}$$

$$\mathbf{R}_3 y_r(x,t) \equiv \frac{\partial^3 y_r(x,t)}{\partial x^3} \equiv \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial^3 y_{rk}(x,t)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F_r(x,t)}{\partial x^3} + \omega_r'''(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{2} \mathbf{R}_{3k} y_{rk}(x,t) + \mathbf{R}_{33} F_r(x,t) + \omega_r'''(x). \tag{2.14}$$

Здесь по аналогии с [1] введены обозначения

$$\mathbf{D}_1 \equiv \mathbf{L}_0 - [\varphi'(x)]^3 - \varphi(x)\mathbf{d} \equiv -2a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_1(x), \quad \mathbf{D}_2 \equiv -2a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x), \tag{2.15}$$

где

$$\begin{aligned} b_1(x) &\equiv b(x) - [\varphi'(x)]^3 - 3\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x), \\ b_2(x) &\equiv b(x) - 2[\varphi'(x)]^3 - 3\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Из полученных тождеств (2.10)–(2.16) можно сделать следующие *выводы*.

1. Пространства безрезонансных решений (2.6) инвариантны относительно операторов $\mathbf{R}_s$, $s = \overline{0,3}$, а следовательно, и относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$, представимого в виде тождества (2.10).

2. Оператор $\mathbf{R}_0$ является главным оператором расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ в ПБР (2.6).

3. Каждое из подпространств Y_{r1}, Y_{r2} и $Y_{r3} \bigoplus X_r$ инвариантно относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$. Это свойство позволит строить независимо одно от другого решения расширенного уравнения (1.2) в соответствующих подпространствах, а следовательно, и решения изучаемого уравнения (0.1).

4. Расширенное уравнение (1.2) регулярно возмущенно относительно малого параметра $\varepsilon>0$ в ПБР Y_r. Таким образом, нами проведена *регуляризация* СВДУ (0.1).

3. Формализм построения ряда решений расширенного уравнения

На основании сделанных выводов асимптотические решения однородного расширенного уравнения (1.2) строим отдельно в виде рядов

$$y_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r y_{rk}(x,t), \quad k = \overline{1,3}, \tag{3.1}$$

где $y_{rk}(x,t) \in Y_{rk}$, $k = 1,2$, $y_{r3}(x,t) \in Y_{r3} \bigoplus X_r$.

Основной целью данной работы является построение третьего решения расширенного уравнения (1.2), которое будет описано с использованием СОФ $\Psi(t)$ и $\Psi'(t)$. В [1] описана схема построения решений с использованием СОФ $U_k(t)$, $k = 1,2$, и их производных. Поэтому в дальнейшем все то, что касается построения первых двух решений уравнения (0.1), будем проводить схематически.

Учитывая линейную независимость СОФ $U_k(t)$, $\Psi(t)$ и их производных, для определения неизвестных коэффициентов рядов (3.1) (см. (2.7), (2.9)) получим рекуррентные системы уравнений

$$\mathbf{D}_1 V_{rk}(x) = [\mathbf{d} + \varphi(x)\mathbf{m}]Q_{(r-1)k}(x) - V'''_{(r-3)k}(x), \tag{3.2}$$

$$\mathbf{D}_2 Q_{rk}(x) = -\mathbf{m}V_{(r-2)k}(x) - Q'''_{(r-3)}(x) \tag{3.3}$$

и

$$\mathbf{L}_0\omega_r(x) = -\mathbf{d}f_{r-1}(x) - \mathbf{m}g_{r-2}(x) - \omega'''_{r-3}(x), \tag{3.4}$$

$$\mathbf{D}_1 f_r(x) = [\mathbf{d} + \varphi(x)\mathbf{m}]g_{r-1}(x) - f'''_{r-3}(x), \tag{3.5}$$

$$\mathbf{D}_2 g_r(x) = -\mathbf{m}f_{r-2}(x) - g'''_{r-3}(x). \tag{3.6}$$

В этих, как и в последующих формулах, все функции с отрицательными индексами будут тождественно равны нулю.

Как уже было сказано, для упрощения изложения более конкретно опишем процесс построения третьего линейно независимого решения однородного СВДУ (0.1). Будем считать $h(x) \equiv 0$. Дальнейшие исследования решений полученных дифференциальных уравнений (3.2)–(3.6) будут существенно отличаться от аналогичных исследований, проведенных в [1].

Напомним, что согласно постановке задачи, оператор $\mathbf{L}_0$ не позволяет построить общие, достаточно гладкие решения дифференциальных уравнений (3.4). Поэтому будем строить только частные решения этих уравнений.

Таким образом, приступаем к решению серии рекуррентных дифференциальных уравнений (3.4)–(3.6). При $r = 0$ определим частное, достаточно гладкое решение $\omega_0(x) \equiv 0$ и получим однородные дифференциальные уравнения

$$\mathbf{D}_1 f_0(x) = 0, \quad \mathbf{D}_2 g_0(x) = 0. \tag{3.7}$$

Общими решениями дифференциальных уравнений (3.5) и (3.6) будут функции

$$f_0(x) = C\exp\left\{\int_1^x \frac{b_1(x)}{2x\widetilde{a}(x)}dx\right\}, \quad g_0(x) = C\exp\left\{\int_1^x \frac{b_2(x)}{2x\widetilde{a}(x)}dx\right\}. \tag{3.8}$$

Гладкость этих решений на всем отрезке I, включая и точку поворота, существенно зависит от знаков выражений $\frac{b_i(0)}{2\widetilde{a}(0)}$, $i = 1, 2$. Поэтому займемся исследованием содержащихся в (3.8) подинтегральных функций. Учитывая обозначения (0.3) и тождества (2.16), имеем

$$\frac{b_1(0)}{2\widetilde{a}(0)} = \frac{b(0) - [\varphi'(0)]^3}{2\widetilde{a}(0)} = \frac{1}{2}[\rho - 1] = \rho_1, \quad \frac{b_2(0)}{2\widetilde{a}(0)} = \frac{b(0) - 2[\varphi'(0)]^3}{2\widetilde{a}(0)} = \frac{1}{2}\rho - 1 = \rho_2.$$

Поскольку в исследуемом случае $\rho \in N$, то возможны два случая.

Случай 1. Пусть $\rho = 2n$ — четное число, $n \in N$. Тогда $\rho_1 = n - \frac{1}{2}$ не является натуральным числом, а $\rho_2 = n - 1$ — натуральное число или $\rho_2 = 0$ при $\rho = 2$.

Если $\rho_1 = n - \frac{1}{2}$ — достаточно большое число, то для построения асимптотики линейно независимого решения с определенной степенью точности относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ можно было бы использовать решения дифференциальных уравнений (3.5). Однако, поскольку в этом случае число $\frac{1}{2}\rho - 1 = \rho_2$ является целым неотрицательным числом, то, используя общие решения дифференциальных уравнений (3.6) и частные решения дифференциальных уравнений (3.5), мы построим равномерно пригодную асимптотику линейно независимого решения СВДУ (0.1) с любой степенью точности относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$.

Случай 2. Пусть $\rho = 2n - 1$ — нечетное число, $n \in N$. Тогда $\rho_1 = n - 1$ — целое неотрицательное число, а $\rho_2 = n - \frac{3}{2}$ не является натуральным числом. В этом случае для построения равномерно пригодной асимптотики линейно независимого решения СВДУ (0.1) с любой степенью точности относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ на всем отрезке I будем использовать частные решения неоднородных дифференциальных уравнений (3.6) и общие решения дифференциальных уравнений (3.5), т. е. наоборот по сравнению с предыдущим случаем.

Для определенности будем предполагать, что $\rho = 2n$, т. е. $\rho_2 = n - 1$ — натуральное число. Тогда согласно случаю 1 частными и достаточно гладкими решениями уравнений (3.4) и (3.5) будут $\omega_0(x) \equiv f_0(x) \equiv 0$, а

$$g_r(x) = C_{r3} \exp\left\{\int_1^x \frac{b_2(x)}{2x\widetilde{a}(x)}dx\right\} \equiv C_{r3}x^{\rho_2}\widetilde{g}(x), \quad r = 0, \tag{3.9}$$

где $\widetilde{g}(x)$ — достаточно гладкая функция при $x \in I$, причем $\widetilde{g}(0) \neq 0$. Не нарушая общности, можно взять $C_{r3} = 1$, $r = \overline{0, +\infty}$.

При $r = 1$ снова имеем $\omega_1(x) \equiv 0$ и получим дифференциальные уравнения

$$\mathbf{D}_1 f_1(x) = [\mathbf{d} + \varphi(x)\mathbf{m}]g_0(x) \equiv G_1(x), \tag{3.10}$$

$$\mathbf{D}_2 g_r(x) = 0. \tag{3.11}$$

Согласно предложенному алгоритму определим частное, достаточно гладкое решение дифференциального уравнения (3.10), удовлетворяющее условию $|f(0)| < \infty$. Легко проверить, что

$$f_1(0) = \frac{G_1(0)}{b_1(0)} = \frac{3\widetilde{a}(0)\rho_2\widetilde{\alpha}_0(0)}{b(0) - \widetilde{a}(0)}x^{\rho_2 - 1}\Big|_{x=0},$$

т. е. $f_1(0) = 0$ при $\rho_2 \geq 2$ и $f_1(0) \neq 0$ при $\rho_2 = 1$.

Общее решение дифференциального уравнения (3.11) представимо в виде формулы (3.9) при $r = 1$.

Начиная с $r \geq 2$, получим неоднородные дифференциальные уравнения (3.4) относительно неизвестных функций $\omega_r(x)$. Поскольку точка $x = 0$ является регулярной особой точкой, то всегда можно определить достаточно гладкие решения этих уравнений, удовлетворяющие условию $|\omega_r(0)| < \infty$, $r \geq 0$.

Продолжая далее итерационный процесс, получим достаточно гладкие на всем отрезке $[0, 1]$ функции $\omega_r(x)$, $f_r(x)$ и $g_r(x)$, $r \geq 0$. Тем самым будет определено третье решение расширенного уравнения (1.2) в виде ряда

$$Y_3(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r y_{r3}(x, t) \equiv g_0(x)\Psi'(t) + \varepsilon[f_1(x)\Psi(t) + g_1(x)\Psi'(t)] + \\ + \sum_{r=2}^{+\infty} \varepsilon^r [f_r(x)\Psi(t) + g_r(x)\Psi'(t) + \omega_r(x)]. \tag{3.12}$$

По аналогии с полученным решением (3.12), постепенно решая дифференциальные уравнения (3.2) и (3.3), построим еще два решения расширенного уравнения (1.2), представленные в виде формальных рядов

$$Y_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \Big[V_{rk}(x)U_k(t) + Q_{rk}(x)U_k'(t)\Big] \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r y_{rk}(x, t), \quad k = 1, 2. \tag{3.13}$$

Вывод 5. Таким образом, построены три формальных решения расширенного уравнения (1.2) $Y_k(x, t, \varepsilon)$, $k = \overline{1, 3}$, представленные в виде рядов (3.12) и (3.13).

Линейная независимость функции $U_k(t)$, $k = 1, 2$, $\widetilde{\Psi}(t)$ и их производных будут обеспечивать линейную независимость построенных трех частных решений $Y_k(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)$, $k = \overline{1, 3}$, СВДУ (0.1).

Для построения частного решения неоднородного СВДУ (0.1) можно использовать расширенное уравнение (1.2) и действие расширенного оператора на элемент ПБР (2.6), т. е. полученные тождества (2.11)–(2.14). Однако значительно проще будет строить это решение непосредственно используя только СВДУ (0.1) и не переходить к расширенному уравнению (1.2).

Таким образом, частное решение неоднородного СВДУ (0.1) строим в виде ряда

$$Y_4(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \widetilde{y}_r(x), \quad \widetilde{y}_r(x) \in X_r. \tag{3.14}$$

Подставим (3.14) в СВДУ (0.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Тогда для определения коэффициентов этого ряда получим следующую рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{L}_0\widetilde{y}_0(x)=h(x),\quad \mathbf{L}_0\widetilde{y}_r(x)=0,\quad r=1,2,\quad \mathbf{L}_0\widetilde{y}_r(x)=-\widetilde{y}'''_{r-3}(x),\quad r\geq 3. \tag{3.15}$$

Как известно, поскольку $\rho>0$, не существует достаточно гладких общих решений этих уравнений. Однако достаточно построить только частные решения уравнений (3.15), удовлетворяющие условиям $\widetilde{y}_r(0)<\infty$. А такие решения существуют на всем отрезке $I=[0,1]$, причем $\widetilde{y}_{3r}(x)$ не равны тождественно нулю, а $\widetilde{y}_{1+3r}(x)\equiv\widetilde{y}_{2+3r}(x)\equiv 0$, $r\geq 0$. Здесь $\widetilde{y}_0(0)=\frac{h(0)}{b(0)}$. Следовательно, частное решение неоднородного СВДУ (0.1) разлагается в степенной ряд по степеням $\mu=\varepsilon^3$, что соответствует классической теореме Шлезингера–Биркгоффа–Ноайона, т. к. в СВДУ (0.1) при старшей производной содержится малый параметр в третьей степени.

4. Оценка остаточных членов

Запишем построенные решения (3.12), (3.13) расширенного уравнения (1.2) и частное решение (3.14) уравнения (1) в виде равенств

$$Y_k(x,t,\varepsilon)=Y^*_{pk}(x,t,\varepsilon)+\varepsilon^{p+1}\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon),\quad k=\overline{1,3}, \tag{4.1}$$

$$Y_4(x,\varepsilon)=Y^*_{p4}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{p+1}\xi_{(p+1)4}(x,\varepsilon), \tag{4.2}$$

где

$$Y^*_{pk}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r y_{rk}(x,t),\qquad Y^*_{p4}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^r\widetilde{y}_{r4}(x) \tag{4.3}$$

— частичные суммы, а $\varepsilon^{p+1}\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)$, $k=\overline{1,3}$, и $\varepsilon^{p+1}\xi_{(p+1)4}(x,\varepsilon)$ — остаточные члены соответствующих рядов.

Частичные суммы (4.3) удовлетворяют уравнениям

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon Y^*_{pk}(x,t,\varepsilon)=-\varepsilon^{p+1}\widetilde{\rho}_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon),\quad k=\overline{1,3},\quad \mathbf{L}_\varepsilon Y^*_{p4}(x,\varepsilon)=h(x)-\varepsilon^{p+1}\widetilde{\rho}_{(p+1)4}(x,\varepsilon),$$

у которых правые части с учетом результатов действия операторов $\mathbf{R}_k$ на элементы ПБР Y_r имеют вид

$$\widetilde{\rho}_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon)\equiv A^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)U_k(t)+B^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)U'_k(t),\quad k=1,2, \tag{4.4}$$

$$\widetilde{\rho}_{(p+1)3}(x,t,\varepsilon)\equiv C^*_{(p+1)3}(x,\varepsilon)\Psi(t)+D^*_{(p+1)3}(x,\varepsilon)\Psi'(t)+E^*_{(p+1)3}(x,\varepsilon), \tag{4.5}$$

$$\widetilde{\rho}_{(p+1)4}(x,\varepsilon)\equiv\sum_{s=0}^{2}\varepsilon^s\omega'''_{(p-2+s)}(x)\equiv\theta^*_{(p+1)}(x,\varepsilon),$$

где коэффициенты при СОФ в (4.4), (4.5), $E^*_{(p+1)3}(x,\varepsilon)$ и $\omega^*_{(p+1)}(x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими функциями при $x\in[0,1]$ и многочленами не выше второй степени относительно малого параметра $\varepsilon>0$.

Поскольку точка $x=0$ является стабильной точкой поворота, то функции Эйри $U_k(t)$ и СОФ $\Psi(t)$, $\Psi'(t)$ являются ограниченными функциями для всех $t\geq 0$. А это означает, что все СОФ, содержащиеся в решениях СВДУ (0.1), являются ограниченными функциями для всех $x\in[0,\frac{\varphi(1)}{\varepsilon}]$, кроме СОФ $U'_k(t)$, $k=1,2$, которое на бесконечности имеет порядок $O(\varepsilon^{-1/4})$.

Таким образом, построенные формальные решения (3.12), (3.13) расширенного уравнения (1.2) и частное решение (3.14) являются формальными асимптотическими решениями этого уравнения, а сужения этих рядов являются формальными асимптотическими решениями СВДУ (0.1) ([8], с. 52).

Покажем, что построенные решения являются асимптотическими решениями. Для этой цели подставим равенства (4.1), (4.2) в расширенное уравнение (1.2). Тогда для определения остаточных членов получим уравнения

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon) = \widetilde{\rho}_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon), \quad k=\overline{1,3}, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{L}_\varepsilon \xi_{(p+1)4}(x,\varepsilon) = \widetilde{\rho}_{(p+1)4}(x,\varepsilon). \tag{4.7}$$

Будем обозначать через $X_{r\varepsilon}$ пространства бесконечно дифференцируемых функций по переменной $x \in [0,1]$ и аналитически зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$. Правые части уравнений (4.6) принадлежат соответственно подпространствам Y_{rk}, $k=1,2$, и $Y_{r3} \bigoplus X_{r\varepsilon}$. Каждое из этих пространств инвариантно относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$. Правая часть уравнения (4.7) принадлежит подпространству $X_{r\varepsilon}$, и это подпространство инвариантно относительно оператора $\mathbf{L}_\varepsilon$. Поэтому решения уравнений (4.6) и (4.7) тоже ищем соответственно в этих подпространствах, т. е. в виде

$$\xi_{(p+1)k}(x,t,\varepsilon) \equiv V^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)U_k(t) + Q^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)U'_k(t), \quad k=1,2, \tag{4.8}$$

$$\xi_{(p+1)3}(x,t,\varepsilon) \equiv f^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)\Psi(t) + g^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)\Psi'(t) + \omega^*_{(p+1)}(x,\varepsilon), \tag{4.9}$$

$$\xi_{(p+1)4}(x,\varepsilon) \equiv y^*_{(p+1)}(x,\varepsilon). \tag{4.10}$$

Подставим (4.8)–(4.10) соответственно в дифференциальные уравнения (4.6) и (4.7). Тогда, приравняв коэффициенты при одинаковых СОФ, получим следующие серии обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (2.11)–(2.14)):

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_1 V^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon) - \varepsilon[\mathbf{d}+\varphi(x)\mathbf{m}]Q^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 \frac{dQ^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)}{dx^3} = A^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon),\\ \mathbf{D}_2 Q^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{m} V^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 \frac{dQ^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)}{dx^3} = B^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon),\end{gathered} \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{D}_1 f^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) - \varepsilon[\mathbf{d}+\varphi(x)\mathbf{m}]g^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 \frac{df^*_{(p+1)}(x,\varepsilon)}{dx^3} = C^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon),\\ \mathbf{D}_2 g^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 \mathbf{m} f^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 \frac{dg^*_{(p+1)}(x,\varepsilon)}{dx^3} = D^*_{(p+1)}(x,\varepsilon),\end{gathered} \tag{4.12}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_0 \omega^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{d} f^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 g^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 \frac{d^3\omega^*_{(p+1)}(x,\varepsilon)}{dx^3} = E^*_{(p+1)}(x,\varepsilon),\\ \left[\mathbf{L}_0 y^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 \frac{d^3}{dx^3}\right] y^*_{(p+1)}(x,\varepsilon) = \theta^*_{(p+1)}(x,\varepsilon).\end{gathered} \tag{4.13}$$

Получены дифферециальные уравнения и системы дифферециальных уравнений с малым параметром для определения неизвестных функций

$$M^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon) = \{V^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon), Q^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon),\ k=1,2,$$
$$f^*_{(p+1)}(x,\varepsilon), g^*_{(p+1)}(x,\varepsilon), \omega^*_{(p+1)}(x,\varepsilon), y^*_{(p+1)}(x,\varepsilon)\}$$

в подпространстве $X_{r\varepsilon}$.

По аналогии с [1] имеем следующие утверждения:

1) область определения всех возмущенных и вырожденных операторов этих уравнений совпадают с пространством X_ε;

2) каждый вырожденный оператор имеет обратный оператор для всех $x \in [0,1]$ в нужном нам подпространстве. Здесь учтено требование существования только частных решений некоторых дифференциальных уравнений из (4.11)–(4.13).

Следовательно, дифференциальные уравнения (4.11)-(4.13) являются регулярно возмущенными в пространстве X_ε. Тогда их решения в этом пространстве представимы в виде рядов

$M^*_{(p+1)k}(x,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{+\infty}\varepsilon^s M^*_{(p+1)ks}(x)$, причем $|M^*_{(p+1)k}(x)|\le K_{(p+1)k}$, где постоянные $K_{(p+1)k}$ не зависят от $x\in I$ и малого параметра $\varepsilon>0$. Таким образом, дифференциальные уравнения (4.11)–(4.13) в простанствах $X_{r\varepsilon}$ имеют равномерно ограниченные решения по переменной $x\in I$ для всех достаточно малых значений малого параметра $\varepsilon>0$.

Теперь для решений расширенного уравнения (1.2) получим следующие асимптотические равенства при $k=1,2$:

$$Y_k(x,t,\varepsilon)=U_k(t)\left[\sum_{s=0}^{p}\varepsilon^s V_{sk}(x)+O(\varepsilon^{p+1})\right]+U'_k(t)\left[\sum_{s=0}^{p}\varepsilon^s[Q_{sk}(x)+O(\varepsilon^{p+1})\right], \tag{4.14}$$

$$Y_3(x,t,\varepsilon)=\Psi(t)\left[\sum_{s=0}^{p}\varepsilon^s f_s(x)+O(\varepsilon^{p+1})\right]+\Psi'(t)\left[\sum_{s=0}^{p}\varepsilon^s[g_s(x)+O(\varepsilon^{p+1})\right], \tag{4.15}$$

$$Y_4(x,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{p}\varepsilon^s y_s(x)+O(\varepsilon^{p+1}). \tag{4.16}$$

Из ограниченности СОФ имеем

$$\begin{gathered}\|\xi_{k(p+1)}(x,t,\varepsilon)\|\le A_{(p+1)}\varepsilon^{\frac{-1}{4}},\quad p\ge 1,\quad k=1,2,\quad \|\xi_{3(p+1)}(x,t,\varepsilon)\|\le A_{(p+1)},\quad p\ge 0,\\ \|\xi_{k1}(x,t,\varepsilon)\|\le A_1,\quad k=\overline{1,3},\quad \|\xi_{4(p+1)}(x,\varepsilon)\|\le A_{4(p+1)},\quad p\ge 0,\end{gathered} \tag{4.17}$$

где постоянные $\mathrm{A}_{(p+1)}$ и A_1 не зависят от $x\in[0,1]$ и малого параметра $\varepsilon>0$. Проведя сужение при $t=\Phi(x,\varepsilon)$ в построенных решениях и соответствующих оценках, получим формулы

$$Y_k(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\sum_{r=0}^{P}\varepsilon^r Y_{rk}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon^{p+1}\xi_{k(p+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon),\quad k=\overline{1,3}, \tag{4.18}$$

и оценки

$$\begin{gathered}\|\xi_{k(p+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\|\le \mathrm{A}_{p+1}\varepsilon^{\frac{-1}{4}},\quad p\ge 1,\quad k=1,2;\quad \|\xi_{3(p+1)}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\|\le \mathrm{A}_{p+1},\quad p\ge 0;\\ \|\xi_{k1}(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)\|\le \mathrm{A}_1,\quad k=\overline{1,3};\quad \|\xi_{4(p+1)}(x,\varepsilon)\|\le \mathrm{A}_{p+1},\quad p\ge 0,\end{gathered} \tag{4.19}$$

где постоянные A_{p+1} и A_1 не зависят от $x\in[0;1]$ и малого параметра $\varepsilon>0$. Используя свойства СОФ на бесконечности, оценки (4.17) и (4.19), легко установить справедливость предельного равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0}Y(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sum_{i=1}^{3}Y_i(x,\Phi(x,\varepsilon),\varepsilon)+Y_4(x,\varepsilon)\right]=\widetilde{y}_0(x)\equiv\omega(x) \tag{4.20}$$

на любом компакте отрезка I, не содержащем точку $x=0$, где $\omega(x)$ — частное решение вырожденного уравнения $\mathbf{L}_0\omega(x)=h(x)$. Таким образом, получена

Теорема. *Пусть для СВДУ* (0.1) а) *имеют место условия* 1^0 *и* 2^0;
б) $\frac{b(x)}{a(x)}=\frac{\rho}{x}+\alpha(x)$, *где* $\rho=2n$, $n\in N$.
Тогда при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon>0$:

1) *в ПБР* Y_r *описанным методом можно построить три решения однородного расширенного уравнения* (1.2), *представимые в виде формул* (3.12), (3.13), (4.1);
2) *сужения этих решений при* $t=\Phi(x,\varepsilon)$, *т. е. ряды* (4.18) *являются асимптотическими решениями однородного СВДУ* (0.1);
3) *частное решение неоднородного СВДУ* (0.1) *представимо в виде асимптотического ряда* (3.14);
4) *для решений расширенного уравнения* (1.2) *имеют место асимптотические равенства* (4.14)–(4.16);

5) *для остаточных членов рядов* (4.1) *и* (4.2) *имеют место оценки* (4.17), (4.19), *т. е. эти ряды являются асимптотическими рядами решений СВДУ* (0.1);
6) *на любом компакте отрезка* I, *не содержащем точки* $x = 0$, *имеет место предельное равенство* (4.20).

Замечание 2. Без особой трудности аналогичные результаты можно получить в случае, когда $\rho = 2n + 1$, $n \in N$.

Литература

1. Бобочко В.Н. *Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений. I* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 3–14.
2. Бобочко В.Н. *Уравнение типа Орра–Зоммерфельда с двумя точками поворота* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1559–1570.
3. Бобочко В.Н. *Внутренняя точка поворота в теории сингулярных возмущений* // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
4. Бобочко В.Н. *Система дифференциальных уравнений с нестабильной точкой поворота.* – Ред. журн. "Изв. вузов. Математика". – Казань, 1997. – 23 с. – Деп. в ВИНИТИ 07.02.97, № 366-В97.
5. Бобочко В.Н. *Краевая задача для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с недиагонализируемым предельным оператором* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 4. – С. 14–23.
6. Дородницын А.А. *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН. – 1952. – Т. 7. – № 6. – С. 3–96.
7. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
8. Langer R. *On the asymptotic forms of ordinary linear differential equations of the third order in a region containing a turning point* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 80. – P. 93–123.

Киевский национальный
государственный университет

Поступила
27.12.1999