И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 519.853

А.А. АНДРИАНОВА, Я.И. ЗАБОТИН

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ МИНИМИЗАЦИИ В ПАРАМЕТРИЗОВАННОМ МЕТОДЕ ЦЕНТРОВ

Получение решения задачи математического программирования с заданной точностью за конечное число итерационных шагов с практической точки зрения является актуальной вычислительной проблемой. В разработке алгоритмов, позволяющих решить эту проблему в методе центров [1], [2], условно можно выделить два основных подхода. Первый подход заключается в разработке алгоритмов, использующих специальные критерии остановки, условия которых выполняются через конечное число итераций и гарантируют достижение заданной точности. В рамках этого подхода разработаны алгоритмы с двусторонним приближением к минимуму [3], с неполной минимизацией функции максимума [4], с аппроксимацией допустимого множества [5], [6].

Исследования в рамках второго подхода заключались во введении управляющих параметров, позволяющих получить требуемую точность за заранее определенное число итераций. Теоретически в [7]–[9] было показано, что параметризация вспомогательной функции максимума может позволить найти приближенное с заданной точностью решение за один процесс минимизации вспомогательной функции.

Данная статья посвящена разработке алгоритмов в параметризованном методе центров с аппроксимацией множества допустимых решений в рамках второго подхода.

Пусть $H = \{1, 2, \dots, m\}$, функции $f(x)$, $f_i(x)$, $i \in H$, определены в n-мерном евклидовом пространстве R_n, $g(x) = \max\{f_i(x),\ i \in H\}$, $D = \{x : x \in R_n,\ g(x) \le 0\}$, $D' = \{x : x \in R_n,\ g(x) < 0\}$.

Условие А. Задача

$$\min\{f(x),\ x \in D\} \tag{1}$$

удовлетворяет условию А, если она имеет решение, функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в R_n, $D' \ne \emptyset$ и $\overline{D'} = D$.

Введем следующие обозначения: $f^* = \min\{f(x),\ x \in D\}$, $Y = \operatorname{Arg\,min}\{f(x),\ x \in R_n\}$, $X^*_\sigma = \{x : x \in D,\ f(x) \le f^* + \sigma\}$, где $\sigma \ge 0$. Очевидно, X^*_0 является множеством точных решений задачи (1).

Требуется по заданному $\varepsilon > 0$ найти точку из множества X^*_ε.

Лемма 1. *Если задача* (1) *удовлетворяет условию* А *и для заданной константы* $\sigma > 0$ *множество* X^*_σ *является ограниченным, то* $\min\{g(x),\ x \in X^*_\sigma\} < 0$.

Доказательство. Пусть $x^* \in X^*_0$. Так как $f(x^*) < f^* + \sigma$ при $\sigma > 0$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ найдется такая окрестность ω точки x^*, что $f(x) < f^* + \sigma$ для всех $x \in \omega$. Тогда $\omega \cap D \subset X^*_\sigma$. Кроме того, в силу условия $\overline{D'} = D$ в ω найдется точка $y \in D'$. Из двух последних предложений следует утверждение $y \in \omega \cap D' \subset \omega \cap D \subset X^*_\sigma$ и $g(y) < 0$. □

Для фиксированных значений параметров t, γ, ρ положим

$$\begin{aligned} F(x,t,\gamma,\rho) &= \max\{f(x)-t,\ \rho g(x)-\gamma\}, \\ Z(t,\gamma,\rho) &= \operatorname{Arg}\min\{F(x,t,\gamma,\rho),\ x\in R_n\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены и непрерывны в R_n, для константы $\varepsilon > 0$ множество X_ε^* является ограниченным, параметры $\rho > 0$, γ, t зафиксированы таким образом, что*

$$\rho\min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon \le f^* + \gamma - t \le 0. \tag{2}$$

Тогда $Z(t,\gamma,\rho) \subset X_\varepsilon^*$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно точку $x^* \in X_0^*$. Тогда имеем, во-первых, $\rho g(x^*) - \gamma \le -\gamma$, во-вторых, согласно условиям теоремы $f(x^*) - t \le -\gamma$. Поэтому $F(x^*,t,\gamma,\rho) = \max\{f(x^*)-t,\ \rho g(x^*)-\gamma\} \le -\gamma$. Отсюда для любой точки $z \in Z(t,\gamma,\rho)$ имеют место неравенства $\rho g(z) - \gamma \le F(z,t,\gamma,\rho) \le F(x^*,t,\gamma,\rho) \le -\gamma$, откуда $g(z) \le 0$. Таким образом, $Z(t,\gamma,\rho) \subset D$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $Q \cap Z(t,\gamma,\rho) = \emptyset$, где $Q = D \setminus X_\varepsilon^*$.

Согласно определению множества X_ε^* для любой точки $y \in X_\varepsilon^*$ выполняется неравенство $f(y) \le f^* + \varepsilon$, а для любой точки $x \in Q$ имеет место $f(x) > f^* + \varepsilon$. Поэтому справедливо двойное неравенство

$$f(x) - t > f^* + \varepsilon - t \ge f(y) - t \quad \forall x \in Q, \quad \forall y \in X_\varepsilon^*. \tag{3}$$

Множество X_ε^* является замкнутым по определению и ограниченным согласно условиям теоремы. Непрерывная функция $g(x)$ достигает на нем своего минимального значения, т. е. существует точка $\overline{y} \in X_\varepsilon^*$ такая, что $g(\overline{y}) = \min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\}$. В силу (2) имеем $f^* + \gamma - t \ge \rho\min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon$, поэтому для точки $\overline{y}$ согласно первому соотношению из (3) получим цепочку неравенств $f(x) - t > f^* + \varepsilon - t \ge \rho\min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\} - \gamma = \rho g(\overline{y}) - \gamma$ для всех $x \in Q$. Отсюда в силу (3) и из определения функции максимума имеем

$$F(x,t,\gamma,\rho) \ge f(x) - t > \max\{f(\overline{y}) - t,\ \rho g(\overline{y}) - \gamma\} = F(\overline{y},t,\gamma,\rho) \quad \forall x \in Q. \tag{4}$$

Предположим теперь, что существует точка $z \in Z(t,\gamma,\rho) \cap Q$. Тогда согласно (4) для этой точки выполняется неравенство $F(z,t,\gamma,\rho) > F(\overline{y},t,\gamma,\rho)$, которое противоречит тому, что $z \in Z(t,\gamma,\rho)$. Поэтому $Z(t,\gamma,\rho) \cap Q = \emptyset$, что, как отмечалось, достаточно для доказательства теоремы. $\square$

Из условий теоремы 1 естественным образом вытекают оценки параметра ρ, позволяющие при различной фиксации значений параметра t и определенных правилах фиксации значений параметра γ получить решение с точностью $\varepsilon > 0$ путем минимизации функции типа $F(x,t,\gamma,\rho)$.

Следствие 1. Пусть задача (1) удовлетворяет условию А, $\varepsilon > 0$, X_ε^* — ограниченное множество и параметры t, γ зафиксированы так, что $\gamma \ge \delta > 0$, $t \ge f^* + \gamma$. Если параметр $\rho > 0$ зафиксировать таким образом, что

$$\rho \ge \frac{\varepsilon + \delta + f^* - t}{\min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\}}, \tag{5}$$

то $Z(t,\gamma,\rho) \subset X_\varepsilon^*$.

Доказательство. Согласно лемме 1 выполняется неравенство $\min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\} < 0$. Поэтому из (5) следует $\rho\min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\} \le \varepsilon + \delta + f^* - t$. Отсюда, т. к. по условиям следствия $\gamma \ge \delta$, получим неравенство $\gamma \ge \delta \ge t - f^* - \varepsilon + \rho\min\{g(x), x\in X_\varepsilon^*\}$. Кроме того, согласно условиям следствия выполняется $f^* + \gamma - t \le 0$. Следовательно, имеет место двойное неравенство (2). По теореме 1 при такой фиксации параметров $Z(t,\gamma,\rho) \subset X_\varepsilon^*$. $\square$

Замечание. Пусть имеет место случай, когда числитель в правой части дроби из (5) неотрицательный, т. е. $t \le f^* + \delta + \varepsilon$. Это возможно, например, когда значения γ, δ фиксируются так, что $\delta \le \gamma \le \delta + \varepsilon$ и $t = f^* + \gamma$. Тогда дробь в правой части (5) согласно лемме 1 оказывается неположительной и, следовательно, $Z(t, \gamma, \rho) \subset X_\varepsilon^*$ при любом $\rho > 0$.

Следствие 2. Если задача (1) удовлетворяет условию А, $\varepsilon > 0$, X_ε^* — ограниченное множество и параметры $\overline{\rho} > 0$, t, γ зафиксированы так, что

$$t \le f^*, \quad \overline{\rho} \ge \frac{\varepsilon - f^* + t}{\min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\}}, \quad \gamma = \overline{\rho} \min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon, \tag{6}$$

то $Z(t, \gamma, \rho) \subset X_\varepsilon^*$ для любого $\rho \ge \overline{\rho}$.

Доказательство. В силу леммы 1 имеет место неравенство $\min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} < 0$. Отсюда и из второго неравенства (6) получим $\overline{\rho} \min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} \le \varepsilon - f^* + t$, что в силу третьего из соотношений (6) означает

$$f^* + \gamma - t \le 0. \tag{7}$$

Так как $\rho \ge \overline{\rho}$, то равенство из (6) приводит к неравенству $\gamma \ge \rho \min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon$, а учитывая первое условие из (6), получим $f^* + \gamma - t \ge \rho \min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon$, что вместе с (7) означает выполнение условий теоремы 1. Следовательно, $Z(t, \gamma, \rho) \subset X_\varepsilon^*$. $\square$

Замечание. Возможен случай, когда числитель правой части дроби из второго неравенства (6) неотрицателен. Для этого достаточно зафиксировать параметр t так, чтобы выполнялось двойное неравенство $f^* - \varepsilon \le t \le f^*$. Тогда сама дробь окажется неположительной, и ε-решение задачи (1) можно получить как точку абсолютного минимума функции $F(x, t, \gamma, \rho)$ при любом $\rho > 0$ и параметре γ, зафиксированном согласно (6).

Следствия 1 и 2 теоремы 1 указывают способы фиксации управляющих параметров для получения ε-решения при $t \ge f^* + \gamma$ и $t \le f^*$ соответственно. Следующие положения указывают, как получить ε-решение при фиксации значений t и γ таких, что $f^* < t < f^* + \gamma$.

Лемма 2. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в R_n. Если $Y \cap D \ne \emptyset$ и параметры t, γ зафиксированы так, что $\gamma \ge t - f^*$, то $X_0^* \subset Z(t, \gamma, \rho)$ при любом $\rho > 0$, причем $Z(t, \gamma, \rho) \subset Y$.*

Доказательство. Пусть зафиксирован параметр $\rho > 0$. Выберем точку $x^* \in X_0^*$. Поскольку $Y \cap D \ne \emptyset$, имеет место включение $X_0^* \subset Y$. Так как $x^* \in D$ и $\rho > 0$, справедливо неравенство $\rho g(x^*) \le 0$. Поэтому согласно условиям леммы справедливо $f(x^*) - t \ge -\gamma \ge \rho g(x^*) - \gamma$. Следовательно, $F(x^*, t, \gamma, \rho) = f(x^*) - t$. Так как $x^* \in Y$, для любых точек $x \in R_n$ выполняется $f(x^*) \le f(x)$. Отсюда в силу определения функции максимума получим следующую цепочку неравенств $F(x^*, t, \gamma, \rho) = f(x^*) - t \le f(x) - t \le F(x, t, \gamma, \rho)$ для любых $x \in R_n$. Следовательно, $x^* \in Z(t, \gamma, \rho)$. Поскольку точка $x^* \in X_0^*$ была зафиксирована произвольным образом, первая часть утверждения леммы доказана.

Докажем второе утверждение. Для любой точки $z \in Z(t, \gamma, \rho)$ имеет место соотношение $f(z) - t \le F(z, t, \gamma, \rho) \le F(x^*, t, \gamma, \rho) = f(x^*) - t$, а т. к. $x^* \in Y$, все неравенства в последней цепочке выполняются как равенства, т. е. $f(z) = f^*$. Таким образом, $Z(t, \gamma, \rho) \subset Y$. $\square$

Лемма 2 показывает, что если среди допустимых решений задачи (1) есть точки абсолютного минимума функции $f(x)$ и параметры t, γ зафиксированы так, что $t \le f^* + \gamma$, то при любом положительном значении ρ среди точек абсолютного минимума функции $F(x, t, \gamma, \rho)$ существует та, которая является точным решением задачи (1).

Обозначим через M множество функций, определенных в R_n, каждый локальный минимум которых является абсолютным.

Лемма 3. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в R_n, $f \in M$, $\rho > 0$. Если $Y \cap D = \emptyset$ и параметры t, γ зафиксированы так, что $\gamma > t - f^*$, то $Z(t, \gamma, \rho) \cap D = \emptyset$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не имеет места, т. е. существует точка $z \in Z(t,\gamma,\rho) \cap D$. Тогда $g(z) \leq 0$, $f(z) \geq f^*$ и согласно условиям леммы имеет место цепочка неравенств $f(z) - t \geq f^* - t > -\gamma \geq \rho g(z) - \gamma$. В силу непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ существует окрестность ω точки z такая, что $f(x) - t \geq \rho g(x) - \gamma$ для всех точек $x \in \omega$. Поэтому, т. к. $z \in Z(t,\gamma,\rho)$, имеет место $f(z) - t \leq F(z,t,\gamma,\rho) \leq F(x,t,\gamma,\rho) = f(x) - t$ для всех $x \in \omega$. Следовательно, z является точкой локального минимума функции $f(x)$, а поскольку $f \in M$, то $z \in Y$. Однако доказанное противоречит условию $Y \cap D = \emptyset$. Полученное противоречие и завершает доказательство. $\square$

Замечание. Пусть в задаче (1) $f \in M$. Выберем произвольно точку $z \in Z(t,\gamma,\rho)$ при значениях параметров, зафиксированных так, что $0 < \gamma \leq \varepsilon$, $f^* < t < f^* + \gamma$, $\rho > 0$. Пусть $z \notin D$, что справедливо в силу леммы 3, если $Y \cap D = \emptyset$, или в случае, когда $Y \cap D \neq \emptyset$, но $Y \setminus D \neq \emptyset$. Тогда в силу фиксации параметра γ имеем $f^* < t < f^* + \gamma \leq f^* + \varepsilon$. Если же $z \in D$, то $Y \cap D \neq \emptyset$, поскольку в противном случае согласно лемме 3 такую точку получить нельзя. Поэтому в силу леммы 2 точка z является точным решением задачи (1).

Оценки (5) и (6) применять на практике непосредственно нельзя, т. к. они содержат неизвестные величины. Однако при наложении дополнительных условий на исходные данные задачи можно получить оценки неизвестных величин, используемых в (5) и (6), и тем самым получить более грубые, но практически реализуемые варианты этих оценок.

Для получения оценки значения f^* сверху достаточно, например, выбрать точку $\overline{z} \in D$. Тогда $f(\overline{z}) \geq f^*$.

Укажем способ построения оценки снизу величины f^*. Минимизируем функцию $\Psi(x) = \max\{f(x)+d, g(x)\}$, где d — константа, выбранная так, что $f(x)+d \geq g(x)$ для всех $x \in D$. Тогда согласно лемме 1 [3], если точка $y \in \operatorname{Arg\,min}\{\Psi(x),\ x \in R_n\}$ такова, что $y \notin D$, то $f(y) \leq f^*$. В противном случае точка y является точным решением задачи (1).

Числа, оценивающие значение f^* сверху и снизу, будем обозначать $\overline{f}$ и $\underline{f}$ соответственно.

Для построения оценки величины $\min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\}$ потребуется наложить дополнительные условия на данные исходной задачи и доказать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены и непрерывны в R_n, $\varphi \in M$, $G = \{x : x \in R_n,\ \psi(x) \leq 0\} \neq \emptyset$, $Q = \operatorname{Arg\,min}\{\varphi(x),\ x \in G\}$. Если $\min\{\varphi(x),\ x \in G\} \neq \min\{\varphi(x),\ x \in R_n\}$, то $\psi(z) = 0$ для любых $z \in Q$.*

Доказательство. Если для любой точки $x \in G$ имеет место $\psi(x) = 0$, то утверждение леммы тривиально выполняется. Пусть существует точка $x \in G$, для которой $\psi(x) < 0$. Предположим, что утверждение леммы неверно и существует точка $z \in Q$, для которой $\psi(z) < 0$. Тогда G является такой окрестностью точки z, что $\varphi(z) \leq \varphi(x)$ для всех $x \in G$. Следовательно, z является точкой локального минимума функции $\varphi(x)$, а т. к. $\varphi \in M$, то она является и точкой абсолютного минимума. Однако по условиям леммы абсолютный и глобальный минимумы на множестве G функции $\varphi(x)$ не совпадают. $\square$

Лемма 5. *Пусть задача* (1) *удовлетворяет условию* A, $g \in M$, $G_1 = \{x : x \in R_n,\ g(x) \leq 0,\ g_1(x) \leq 0\} \neq \emptyset$, *где $g_1(x)$ — непрерывная в R_n функция, $Q_1 = \operatorname{Arg\,min}\{g(x),\ x \in G_1\}$. Если $\min\{g(x),\ x \in G_1\} \neq \min\{g(x),\ x \in R_n\}$, то $g_1(z) = 0$ для любых $z \in Q_1$.*

Доказательство. Положим $\Phi(x) = \max\{g(x), g_1(x)\}$. Тогда $G_1 = \{x : x \in R_n,\ \Phi(x) \leq 0\}$. Согласно лемме 4 $\Phi(z) = 0$ для всех $z \in Q_1$, т. е.

$$\max\{g(z), g_1(z)\} = 0. \tag{8}$$

Если $g_1(z) = 0$ для любой точки $z \in Q_1$, то утверждение леммы справедливо. Допустим, существует точка $z \in Q_1$ такая, что

$$g_1(z) < 0. \tag{9}$$

Тогда $g(z) = 0$. Так как $\overline{D'} = D$, в окрестности $\omega = \{x : x \in R_n,\ g_1(x) < 0\}$ точки z существует точка $y \in D'$. Отсюда $g(y) < 0$ и в силу $g_1(y) < 0$ имеем $y \in G_1$. Так как $z \in Q_1$, то $g(z) \le g(y) < 0$, что вместе с (9) противоречит (8). $\square$

Условие B. Задача (1) удовлетворяет условию A, функция $f(x)$ является выпуклой на R_n, и функции $f_i(x)$, $i \in H$, являются сильно выпуклыми на R_n с постоянными сильной выпуклости μ_i.

Теорема 2. *Пусть задача* (1) *удовлетворяет условию* B, $\varepsilon > 0$, *множество* X_ε^* *ограничено, функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* L *на множестве* X_ε^* *и* $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \ne \min\{g(x),\ x \in R_n\}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \le -\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2}, \tag{10}$$

где $\mu = \min\{\mu_i,\ i \in H\}$.

Доказательство. По определению множество X_ε^* является замкнутым, а по условиям теоремы — ограниченным множеством. Поэтому непрерывная функция $g(x)$ достигает на нем своего минимального значения, т. е. существует точка $y \in X_\varepsilon^*$, для которой $g(y) = \min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\}$. Из определения сильной выпуклости ([10], с. 181) следует, что функция $g(x)$ является сильно выпуклой с постоянной сильной выпуклости $\mu = \min\{\mu_i,\ i \in H\}$. Так как функция $f(x)$ выпуклая, множество X_ε^* является выпуклым. Известно ([10], с. 182), что в этом случае имеет место неравенство $\mu\|x - y\|^2 \le g(x) - g(y)$ для всех $x \in X_\varepsilon^*$, в том числе и для точки $x^* \in X_0^*$, т. к. согласно определению $X_0^* \subset X_\varepsilon^*$. Далее, поскольку $g(x^*) \le 0$, получим неравенство $\mu\|x^* - y\|^2 \le -g(y)$ или

$$g(y) \le -\mu\|x^* - y\|^2. \tag{11}$$

Так как $\overline{D'} = D$, то множество X_ε^* содержит точку из D'. Тогда $f(y) = f^* + \varepsilon$ согласно определению X_ε^* и в силу леммы 5, а т. к. $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, имеет место $\varepsilon = f^* + \varepsilon - f^* = |f(y) - f(x^*)| \le L\|y - x^*\|$ или $\|x^* - y\| \ge \frac{\varepsilon}{L}$. Отсюда и из (11) получим $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} = g(y) \le -\mu\|x^* - y\|^2 \le -\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2}$. $\square$

Исходя из дополнительной информации о задаче, получим практически реализуемые аналоги оценок (5) и (6).

Теорема 3. *Пусть задача* (1) *удовлетворяет условию* B, $\varepsilon > 0$, *множество* X_ε^* *ограничено, функция* $f(x)$ *удовлетворяет на* X_ε^* *условию Липшица с константой* L *и* $\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \ne \min\{g(x), x \in R_n\}$. *Если параметры* $\rho > 0$, t, γ *зафиксированы таким образом, что*

$$\gamma \ge \delta > 0, \quad t \ge f^* + \gamma, \quad \rho \ge -\frac{L^2(\varepsilon + \delta + \underline{f} - t)}{\mu\varepsilon^2}, \tag{12}$$

где $\mu = \min\{\mu_i,\ i \in H\}$, *то* $Z(t, \gamma, \rho) \subset X_\varepsilon^*$.

Доказательство. Умножим третье неравенство (12) на величину $-\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2} < 0$. Отсюда и из оценки $\underline{f} \le f^*$ получим цепочку неравенств $-\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2}\rho \le \varepsilon + \delta + \underline{f} - t \le \varepsilon + \delta + f^* - t$. Принимая к тому же во внимание (10) и условие $\rho > 0$, получим $\rho\min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\} \le -\rho\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2} \le \varepsilon + \delta + f^* - t$, что, в свою очередь, в силу леммы 1 приводит к неравенству (5), которое вместе с соотношениями (12) согласно следствию 1 к теореме 1 означает, что $Z(t, \gamma, \rho) \subset X_\varepsilon^*$. $\square$

Теорема 4. *Пусть задача* (1) *удовлетворяет условию* B, $\varepsilon > 0$, *множество* X_ε^* *ограничено, функция* $f(x)$ *удовлетворяет на* X_ε^* *условию Липшица с константой* L *и* $\min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x),\ x \in R_n\}$. *Если параметры* $\rho' > 0$, t, γ *зафиксированы таким образом, что*

$$t \leq f^*, \quad \rho' \geq -\frac{L^2(\varepsilon - \overline{f} + t)}{\mu\varepsilon^2}, \quad \gamma = -\rho'\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2} - \varepsilon, \tag{13}$$

где $\mu = \min\{\mu_i,\ i \in H\}$, *то* $Z(t,\gamma,\rho) \subset X_\varepsilon^*$ *для любых* $\rho \geq \rho'$.

Доказательство. Пусть

$$\eta = -\frac{\rho'\mu\varepsilon^2}{L^2 \min\{g(x), x \in X_\varepsilon^*\}}. \tag{14}$$

В силу леммы 1 выполняется $\eta > 0$. С другой стороны, в силу (10) имеет место неравенство $-\frac{\mu\varepsilon^2}{L^2 \min\{g(x),\ x\in X_\varepsilon^*\}} \leq 1$, из которого, т. к. $\rho' > 0$, следует

$$0 < \eta \leq \rho'. \tag{15}$$

Из (14) с учетом второго из неравенств (13) получим соотношение

$$-\frac{\eta L^2 \min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\}}{\mu\varepsilon^2} = \rho' \geq -\frac{L^2(\varepsilon - \overline{f} + t)}{\mu\varepsilon^2},$$

откуда $\eta \min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} \leq \varepsilon - \overline{f} + t$. А так как $\overline{f} \geq f^*$, то в силу леммы 1

$$\eta \geq \frac{\varepsilon - f^* + t}{\min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\}}. \tag{16}$$

Подставляя ρ' в третье из соотношений (13), получим $\gamma = \eta \min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} - \varepsilon$, что согласно следствию 2 к теореме 1 вместе с (16) и первым неравенством из (13) означает, что $Z(t,\gamma,\rho) \subset X_\varepsilon^*$ для любых $\rho \geq \eta$, в том числе согласно (15) для всех $\rho \geq \rho'$. $\square$

Правила фиксации параметров, определенные теоремами 3 и 4, являются практически реализуемыми и позволяют получить ε-решение задачи (1) с помощью одного процесса минимизации функции вида $F(x,t,\gamma,\rho)$. Однако значение параметра ρ, используемое при этом, может оказаться достаточно большим, что может привести к овражному характеру минимизируемой функции $F(x,t,\gamma,\rho)$ и трудностям при ее минимизации. Следующие алгоритмы позволяют уменьшить влияние больших значений параметра ρ и получить ε-решение задачи (1) не более чем за заданное заранее количество N процессов минимизации вспомогательной функции вида $F(x,t,\gamma,\rho)$. Каждый такой процесс будем называть большой итерацией.

Алгоритм 1. Зафиксируем произвольно точку $x_0 \in D$, требуемую точность $\varepsilon > 0$, число $\delta \in (0;\varepsilon]$, $N > 0$ — число больших итераций, за которое должно быть получено ε-решение задачи (1), $\rho_{-1} = 0$. Полагаем $k = 0$.

1. Вычисляются значения $C_k = -\frac{L^2(\varepsilon+\delta+\underline{f}-f(x_k))}{\mu\varepsilon^2}$, $\rho_k = \max\{\frac{k+1}{N}C_k,\ \rho_{k-1}\}$.
2. Фиксируется число $\gamma_k \in [\delta;\varepsilon]$.
3. Выбирается точка $x_{k+1} \in Z(f(x_k),\gamma_k,\rho_k)$.
4. Если $k = N-1$ и $x_{k+1} \in D$, то $x_{k+1} \in X_\varepsilon^*$.
5. Если $x_{k+1} \notin D$, то $x_k \in X_\varepsilon^*$, иначе переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

Теорема 5. *Пусть задача* (1) *удовлетворяет условию* B, *множество* X_ε^* *ограничено, функция* $f(x)$ *удовлетворяет на* X_ε^* *условию Липшица с константой* L *и* $\min\{g(x),\ x \in X_\varepsilon^*\} \neq \min\{g(x),\ x \in R_n\}$, $\mu = \min\{\mu_i,\ i \in H\}$. *Тогда условия п.* 4 *или п.* 5 *алгоритма* 1 *выполнятся при некотором* $k \leq N-1$ *и будет получено* ε-*решение задачи* (1).

Доказательство. Пусть для некоторого номера $k \leq N-1$ выполняются условия п. 5 алгоритма 1, т. е. $x_{k+1} \notin D$. Тогда $x_k \in D$, поскольку условия п. 5 алгоритма выполняются впервые для номера k. Поэтому согласно утверждению 4 леммы 1 [5] и $\gamma_k \leq \varepsilon$ имеем $f(x_k) - f^* \leq \gamma_k \leq \varepsilon$. Отсюда следует, что $x_k \in X^*_\varepsilon$.

Пусть теперь $x_{k+1} \in D$ для всех номеров $k \leq N-1$. Тогда для номера $k = N-1$ имеем $\rho_k = \max\{C_k,\ \rho_{k-1}\} \geq C_k$. Отсюда в силу определения значения C_k и согласно теореме 3 следует, что $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. $\square$

Замечание. Известно, что при решении задачи (1) методом внутренних центров строится последовательность точек $\{x_k\}$, для которой для любых k имеет место $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$. Если рассматривать C_k как функцию от $f(x_k)$, то такая функция является возрастающей. Следовательно, $C_{k+1} \leq C_k$ для любого номера k. Таким образом, нет необходимости увеличивать значение параметра ρ_k до значения C_0, что позволяет на практике избежать трудностей, связанных с овражным характером функции $F(x, f(x_k), \gamma_k, \rho_k)$.

Алгоритм 2. Зафиксируем произвольно точку $x_0 \notin D$, для которой $f(x_0) \leq f^*$, требуемую точность $\varepsilon > 0$, число $\delta \in (0;\varepsilon]$, $N > 0$ — число больших итераций, гарантирующее получение ε-решения задачи (1), $\rho_{-1} = 0$. Полагаем $k = 0$.

1. Вычисляются значения $C_k = -\frac{L^2(\varepsilon - \overline{f} + f(x_k))}{\mu\varepsilon^2}$, $\rho_k = \max\{\frac{k+1}{N}C_k,\ \rho_{k-1}\}$.
2. Фиксируется число $\gamma_k = \varepsilon + \frac{\mu\varepsilon^2}{L^2}\rho_k$.
3. Выбирается точка $x_{k+1} \in Z(f(x_k), -\gamma_k, \rho_k)$.
4. Если $x_{k+1} \in D$, то $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$, иначе — переход к п. 1 при k, замененном на $k+1$.

Теорема 6. *Пусть задача* (1) *удовлетворяет условию* B, $Y \cap D = \emptyset$, *множество* X^*_ε *ограничено, функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица на* X^*_ε *с константой* L *и* $\min\{g(x),\ x \in X^*_\varepsilon\} \neq \min\{g(x),\ x \in R_n\}$, $\mu = \min\{\mu_i,\ i \in H\}$. *Тогда при некотором* $k \leq N-1$ *выполнятся условия п. 4 алгоритма 2 и будет получено* ε*-решение задачи* (1).

Доказательство. Если для любого $k < N-1$ условия п. 4 не выполняются, то для номера $k = N-1$ имеет место $\rho_k = \max\{C_k,\ \rho_{k-1}\} \geq C_k$, что в силу теоремы 4 означает, что $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$, причем для этого номера выполняются условия п. 4 алгоритма 2, поскольку $X^*_\varepsilon \subset D$.

Предположим теперь, что для некоторого номера $k < N-1$ имели место условия п. 4 алгоритма 2, т. е. $x_{k+1} \in D$. Докажем, что $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$.

Имеет место неравенство

$$-\gamma_k \leq f(x_k) - f^*. \tag{17}$$

Действительно, допустим, что справедливо противное. Тогда, т. к. $Y \cap D = \emptyset$, то

$$Z(f(x_k), -\gamma_k, \rho_k) \cap D = \emptyset$$

согласно лемме 3, что невозможно в силу выбора точки $x_{k+1} \in Z(f(x_k), -\gamma_k, \rho_k)$ такой, что $x_{k+1} \in D$.

Предположим, что $f^* - \gamma_k - f(x_k) < \rho_k \min\{g(x),\ x \in X^*_\varepsilon\} - \varepsilon$. Тогда в силу (10) и правила фиксации параметра γ_k из п. 2 алгоритма 2 имеем $f^* - f(x_k) < \gamma_k - \varepsilon + \rho_k \min\{g(x),\ x \in X^*_\varepsilon\} \leq \gamma_k - \varepsilon - \rho_k \frac{\mu\varepsilon^2}{L^2} = 0$. Таким образом, $f(x_k) > f^*$, но, с другой стороны, согласно лемме 1 [5], т. к. $x_k \notin D$, имеем $f(x_k) \leq f^*$. Получено противоречие. Поэтому $f^* - \gamma_k - f(x_k) \geq \rho_k \min\{g(x),\ x \in X^*_\varepsilon\} - \varepsilon$. Данное неравенство вместе с (17) в силу теоремы 1 означает, что $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. $\square$

Замечание. Известно, что при решении задачи (1) методом внешних центров строится последовательность точек $\{x_k\}$, для которой для любых k имеет место $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$. Величину C_k можно рассматривать как функцию от аргумента $f(x_k)$. Эта функция является убывающей. Следовательно, $C_{k+1} \leq C_k$ для любого номера k. Поэтому, как и в замечании к алгоритму 1, отметим, что можно избежать вычислительных трудностей при минимизации функции $F(x, f(x_k), -\gamma_k, \rho_k)$, поскольку нет необходимости увеличения значения параметра ρ_k до C_0.

За N больших итераций, проделанных по алгоритмам 1 и 2, будет гарантировано получение ε-решения задачи (1). Однако оба алгоритма имеют критерии остановки (п. 5 алгоритма 1 и п. 4 алгоритма 2), позволяющие прекратить вычислительный процесс на большой итерации, по номеру меньшей N. Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что остановка процесса вычислений по алгоритмам 1 и 2 чаще происходила по выполнению условий указанных критериев, нежели по выполнению всех N больших итераций.

Литература

1. Huard P. *Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centres* // Non. Progr. – 1967. – P. 207–219.
2. Гроссман К., Каплан А.А. *Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации.* – Новосибирск: Наука, 1981. – 183 с.
3. Заботин Я.И., Даньшин И.Н. *Алгоритмы с комбинированием, параметризацией и двусторонним приближением в методе центров* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С. 40–48.
4. Заботин Я.И., Даньшин И.Н. *Алгоритмы в методе центров с неполной минимизацией вспомогательной функции максимума* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 53–59.
5. Заботин Я.И., Андрианова А.А. *Алгоритмы в методе центров с аппроксимацией множества допустимых решений* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 41–45.
6. Андрианова А.А. *Конечные алгоритмы в методе центров с аппроксимацией допустимого множества.* – Казанск. ун-т. – Казань, 2002. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 06.05.02, № 791-В2002.
7. Заботин Я.И. *Минимаксный метод решения задачи математического программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 36–43.
8. Заботин Я.И., Князев Е.А. *Алгоритмы с адаптацией в параметризованном методе центров* // Исследов. по прикл. матем. – Казань, 1987. – № 14. – С. 9–15.
9. Князев Е.А. *Алгоритмы с адаптацией в методе центров*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 134 с.
10. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – Москва: Наука, 1988. – 552 с.

Казанский государственный университет

Поступила 27.08.2002