ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 512.57

С.Н. ТРОНИН

О РЕТРАКТАХ И РЕТРАКЦИЯХ СВОБОДНЫХ МОДУЛЕЙ НАД ГРАДУИРОВАННЫМИ КОЛЬЦАМИ

Вопрос о том, являются ли все проективные модули (или все конечно порожденные проективные) над данным кольцом свободными или расширенными, решается положительно лишь для относительно небольшого класса колец. В 1976 году в данной области был достигнут существенный прогресс: Д. Квиллен и А.А. Суслин одновременно и независимо друг от друга доказали, что свободными являются все проективные модули над алгебрами многочленов над полями, решив тем самым известную проблему Ж.-П. Серра. Впоследствии рядом авторов были получены аналогичные результаты для проективных модулей над кольцами, в том или ином смысле более общими, чем алгебры многочленов над полями. Например, В.А. Артамонов решил соответствующую задачу для колец квантовых многочленов. Современное состояние исследований в этом направлении подробно описано в обзоре [1], где приведен обширный список литературы. Нередкой является ситуация, когда удается доказать, что все проективные модули достаточно больших рангов над данным кольцом свободны (или расширены), но для проективных модулей малых рангов (например, ранга один) это уже не так.

В данной статье обсуждаются вопросы более специального характера: о нахождении явного вида изоморфизмов между данным проективным модулем и свободным (или расширенным) модулем, а также о том, как для явно заданного проективного модуля эффективно определить, является ли он свободным (или расширенным). Конечно порожденный проективный модуль, по определению, есть прямое слагаемое свободного модуля, и поэтому наиболее общим способом его явного задания является задание идемпотентной матрицы, соответствующей проекции на прямое слагаемое. Показано, что для модулей над градуированными кольцами расширенность можно установить, зная лишь последовательность степеней ненулевых однородных компонент данной идемпотентной матрицы (теорема 1), или при условии обращения в нуль некоторых блоков положительных однородных компонент той же матрицы (теорема 2). При этом имеется и способ явного построения требуемого изоморфизма. Утверждения такого рода выводятся как следствия из результатов работы автора [2], где рассматривалась ситуация настолько общая, что "алгебрами", для которых справедливы результаты [2], могут быть не только линейные мультиоператорные алгебры, но и модули над некоторым классом колец.

В данной работе используются основные конструкции, определения и обозначения из [2]. Внесены лишь незначительные поправки для большего соответствия общепринятым кольцевым и модульным обозначениям. Так, использованное в [2] обозначение вида f^1 (что для многочлена соответствует однородной компоненте первой степени) заменено здесь на f^0, т. к. оно будет соответствовать нулевой компоненте градуировки кольца. Соответствующим образом сдвигаются на единицу и другие индексы.

Напомним некоторые факты из [2]. Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{M}$ – некоторые категории, $Sets$ — категория множеств, и пусть дана диаграмма функторов, коммутативная с точностью до естественных изоморфизмов:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{R} & \xrightarrow{U} & \mathfrak{M} & \xrightarrow{D} & \mathfrak{R}\,. \\
 & \nwarrow_{Fr_{\mathfrak{R}}} & \uparrow_{Fr_{\mathfrak{M}}} & \nearrow_{Fr_{\mathfrak{R}}} & \\
 & & Sets & &
\end{array} \qquad (1)
$$

Достаточно предполагать только наличие естественного изоморфизма $\alpha : U \cdot D \cdot Fr_{\mathfrak{M}} \xrightarrow{\cong} Fr_{\mathfrak{M}}$. Неформально говоря, $Fr_{\mathfrak{M}}(X) = Fr(X)$ — "свободный" объект в $\mathfrak{M}$ с "базисом" X. Под его ретракцией понимается пара морфизмов $\vartheta : P \to Fr(X)$, $\pi : Fr(X) \to P$, со свойством $\pi\vartheta = 1_P$. Рассмотрим следующие морфизмы:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\varphi(\pi,\vartheta): & P & \xrightarrow{\vartheta} & Fr(X) & \xrightarrow{\alpha^{-1}(X)} & UDFr(X) & \xrightarrow{UD(\pi)} & UD(P) \\
\psi(\pi,\vartheta): & UD(P) & \xrightarrow{UD(\vartheta)} & UDFr(X) & \xrightarrow{\alpha(X)} & Fr(X) & \xrightarrow{\pi} & P.
\end{array}
$$

Далее будет использоваться обозначение ${}^0P = U(D(P))$. Эта конструкция изучалась в ряде работ автора: [3]–[6]. Заметим, что результат работы [6] фактически до сих пор не улучшен (см. [7]). В [2] было показано, что все достаточно "хорошие" гомоморфизмы вида $P \to {}^0P$ имеют вид $\varphi(\pi',\vartheta')$, а все достаточно "хорошие" гомоморфизмы вида ${}^0P \to P$ имеют вид $\psi(\pi'',\vartheta'')$. Любой изоморфизм между P и ${}^0P$ можно домножить на автоморфизм вида $U(\sigma)$ так, чтобы в результате получился гомоморфизм $\varphi(\pi,\vartheta)$ или $\psi(\pi,\vartheta)$.

В данной работе рассматривается ситуация, соответствующая примеру 3 из [2]. Пусть дано кольцо (ассоциативное, с единицей) $K = R \oplus I$, где R — подкольцо с той же единицей, что и у K, а I — идеал K. Пусть $\mathfrak{R}$ есть категория левых R-модулей, $\mathfrak{M}$ — категория левых K-модулей. Функторы $Fr_{\mathfrak{M}}$ и $Fr_{\mathfrak{R}}$ из диаграммы (1) в данном случае есть функторы взятия свободных модулей. Свободный левый K-модуль $Fr(X) = Fr_{\mathfrak{M}}(X)$ с фиксированным базисом X будем представлять в виде $Fr(X) = Fr(X)^0 \oplus Fr(X)^\bullet$, где $Fr(X)^0$ есть R-подмодуль, порожденный множеством X, $Fr(X)^\bullet = IFr(X)$. Положим $U(M) = K \otimes_R M$, $D(N) = R \otimes_K N \cong N/IN$. Напомним, что K-модуль P называется *расширенным с* R, если $P \cong U(M)$ для некоторого M. Таким образом, ${}^0P = K \otimes_R (R \otimes_K P)$, и P является расширенным тогда и только тогда, когда $P \cong {}^0P$. Соответствие $P \mapsto {}^0P$ есть функтор, действие которого на гомоморфизме $\lambda : P \to Q$ обозначается ${}^0\lambda : {}^0P \to {}^0Q$. Через $\alpha(X)$ обозначим изоморфизм между ${}^0Fr(X)$ и $Fr(X)$, отображающий элементы базиса вида $1 \otimes 1 \otimes x$ в $x \in X \in Fr(X)$. Таким образом, все составные части диаграммы (1) определены, и существуют гомоморфизмы $\varphi(\pi,\vartheta)$, $\psi(\pi,\vartheta)$.

Левый проективный K-модуль P определяется парой гомоморфизмов $\pi : Fr(X) \to P$, $\vartheta : P \to Fr(X)$, таких, что $\pi \cdot \vartheta = 1_P$. Соответствующая идемпотентная матрица f состоит из строк, компоненты которых — коэффициенты при элементах базиса X у элементов $f_i = \vartheta(\pi(x_i))$, $x_i \in X$. Матрица f записывается в виде $f = f^0 + f^\bullet$, где f^0 состоит из компонент, принадлежащих R, а $f^\bullet$ — из компонент, принадлежащих I. Положим ${}^*\pi = {}^0\pi\alpha(X)^{-1} : Fr(X) \longrightarrow {}^0P$, ${}^*\vartheta = \alpha(X)({}^0\vartheta) : {}^0P \longrightarrow Fr(X)$. Тогда $({}^*\pi)({}^*\vartheta)$ — тождественный эндоморфизм ${}^0P$, а матрицей $({}^*\vartheta)({}^*\pi)$ является f^0. При этом $\varphi(\pi,\vartheta) = ({}^*\pi)\vartheta$, $\psi(\pi,\vartheta) = \pi({}^*\vartheta)$.

Лемму 1 из [2] в случае, когда рассматриваются модули, можно дополнить следующим образом.

Лемма 1. *Имеет место коммутативная диаграмма:*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Fr(X) & \xrightarrow{{}^*\pi} & {}^0P & \xrightarrow{{}^*\vartheta} & Fr(X) & \xrightarrow{\pi} & P & \xrightarrow{\vartheta} & Fr(X) \\
\downarrow{\tau} & & \downarrow{\psi} & & \downarrow{\sigma} & & \downarrow{\varphi} & & \downarrow{\tau} \\
Fr(X) & \xrightarrow{\pi} & P & \xrightarrow{\vartheta} & Fr(X) & \xrightarrow{{}^*\pi} & {}^0P & \xrightarrow{{}^0\vartheta} & Fr(X),
\end{array}
$$

где $\varphi = \varphi(\pi, \vartheta)$, $\psi = \psi(\pi, \vartheta)$, σ — гомоморфизм с матрицей $1+f^\bullet$, τ — гомоморфизм с матрицей $1 - f^\bullet$. Если φ — инъекция и существует σ^{-1}, то существует и $\varphi^{-1} = \pi \cdot \sigma^{-1} \cdot {}^*\vartheta$. Если ψ — инъекция и существует τ^{-1}, то существует и $\psi^{-1} = {}^*\pi \cdot \tau^{-1} \cdot \vartheta$. Если $\varphi = \psi^{-1}$, то σ и τ обратимы.

Доказательство. Коммутативность всех квадратов, кроме крайнего правого, доказана для случая произвольных линейных мультиоператорных алгебр в [2]. Так как π — сюръекция, то достаточно проверить, что $\tau\vartheta\pi = ({}^*\vartheta)\varphi\pi = ({}^*\vartheta)({}^*\pi)\vartheta$, что сводится к проверке равенства матриц $(1 - f^\bullet)f = f^0 f$. Из идемпотентности $f = f^0 + f^\bullet$ и идемпотентности f^0 вытекает тождество

$$f^\bullet = f^0 f^\bullet + f^\bullet f^0 + f^\bullet f^\bullet,$$

которое равносильно доказываемому равенству. Остальные утверждения леммы очевидны. □

Лемма 2. 1) *Если f есть матрица $\vartheta\pi$, $\psi = \psi(\pi, \vartheta)$, $\varphi = \varphi(\pi, \vartheta)$, то условие $\psi = \varphi^{-1}$ равносильно соотношению $f^0 f^\bullet f^0 = 0$.*

2) *Пусть для идемпотентной матрицы f задано разбиение на блоки одних и тех же размеров (причем диагональные блоки квадратны)*

$$f^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^\bullet = \begin{pmatrix} f^\bullet_{1\,1} & f^\bullet_{1\,2} \\ f^\bullet_{2\,1} & f^\bullet_{2\,2} \end{pmatrix}.$$

Равенство $\varphi(\pi, \vartheta) = \psi(\pi, \vartheta)^{-1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $f^\bullet_{11} = 0$.

Доказательство. Проверяется условие из следствия 3 работы [2], в котором утверждается, что $\psi(\pi, \vartheta) = \varphi(\pi, \vartheta)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\overline{e}e\overline{e} = \overline{e}$, где $e = \vartheta\pi$, $\overline{e} = ({}^*\vartheta)({}^*\pi)$. В исследуемой ситуации, переходя к матрицам, получаем $f^0 f^\bullet f^0 = 0$.

Пункт 2) следует из 1). □

Далее будем предполагать кольцо K градуированным: $K = K^0 \oplus K^1 \oplus \dots \oplus K^n \oplus \cdots$, $K^n K^m \subseteq K^{n+m}$, $R = K^0$, $I = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} K^n$. Кольцо квадратных матриц над K также является градуированным: n-я компонента градуировки состоит из матриц с элементами из K^n. Будем записывать матрицу f в виде суммы однородных слагаемых, $f = f^0 + f^1 + \dots + f^n$. Здесь $f^\bullet = f^1 + \dots + f^n$.

Теорема 1. *Пусть ненулевые однородные компоненты идемпотентной матрицы f имеют степени $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$. Предположим, что выполнено следующее условие: для каждого m имеют место неравенства $k_m \neq k_i + k_j$ при всех $0 < i, j < m$ (i, j не обязательно различны). Тогда $\varphi(\pi, \vartheta) = \psi(\pi, \vartheta)^{-1}$, т. е. P является расширенным модулем.*

Доказательство. Ввиду идемпотентности f

$$f^{k_m} = f^0 f^{k_m} + \sum_{l=1}^{k_m - 1} f^l f^{k_m - l} + f^{k_m} f^0.$$

При выполнении условий теоремы $f^l f^t = 0$ при $l + t = k_m$, $l > 0$, $t > 0$. Таким образом, $f^{k_m} = f^0 f^{k_m} + f^{k_m} f^0$, что влечет выполнение условий леммы 2 ввиду идемпотентности f^0. □

Последовательности целых чисел, возникающие в формулировке теоремы, допускают достаточно простое описание. Назовем для определенности антифибоначчиевой любую возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$, конечную или бесконечную, такую, что для любых $i, j < m$ имеет место $n_m \neq n_i + n_j$. По каждому натуральному $d \geq 1$ однозначно строится бесконечная антифибоначчиева последовательность $AF(d) = (n_1, n_2, \dots)$ с $n_1 = d$, получающаяся с помощью следующего индуктивного процесса: если $n_1, \dots, n_{m-1}$ уже построены, то n_m есть наименьшее среди всех чисел, больших n_{m-1}, и не равных ни одному из $n_i + n_j$, $i, j < m$. Случай $i = j$ при этом не исключается.

Лемма 3. *$AF(d)$ является периодической последовательностью, периоды которой имеют длину d и устроены следующим образом: $n_{dm+t} = d + t - 1 + (3d-1)m$, $1 \le t \le d$. Здесь m — параметр, $m = 0, 1, 2, \dots$*

Доказательство. Покажем сначала, что последовательность, описанная в лемме, является антифибоначчиевой. Допустим противное, т. е. что $n_{dm+t} = n_{di+k} + n_{dj+l}$, где $n_{di+k} = d + k - 1 + (3d-1)i$, $n_{dj+l} = d + l - 1 + (3d-1)j$. Отсюда имеем равенство $d - 1 + k + l - t = (3d-1)(m - i - j)$. Однако из $1 \le k, l, t \le d$ следует, что $-d + 1 < k + l - t < 2d$, что приводит к строгим неравенствам $0 < d - 1 + k + l - t < 3d - 1$. Делимости на $3d-1$ нет, что и доказывает требуемое утверждение.

Теперь покажем, что любое число, не являющееся членом данной последовательности, есть сумма двух членов последовательности. Рассмотрим произвольное q, $2d - 1 + (3d-1)m < q < d + (3d-1)(m+1)$. В случае, если $2d - 1 + (3d-1)m < q \le 3d - 2 + (3d-1)m$, будем иметь $q = 2d - 1 + s + (3d-1)m$, $1 \le s \le d-1$, и тогда $q = (d + (3d-1)\cdot 0) + (d + (s-1) + (3d-1)m)$. В случае, когда $(3d-1)(m+1) \le q < d + (3d-1)(m+1)$, записываем q в виде $q = s + (3d-1)(m+1)$, $1 \le s \le d-1$, и тогда $q = (2d - 1 + (3d-1)\cdot 0) + (d + s + (3d-1)m)$. $\square$

Заметим, что $AF(1)$ — это множество всех нечетных чисел. Любая конечная подпоследовательность антифибоначчиевой последовательности также будет антифибоначчиевой. В частности, если f — идемпотентная матрица, то условие теоремы 1 выполнено в следующих случаях: $f = f^0 + f^k$, $k > 0$, $f = f^0 + f^1 + f^k$, $k > 2$, $f = f^0 + f^k + f^{k+1} + \dots + f^{2k-1}$, $k > 1$, $f = f^0 + \sum\limits_{k=0}^{m} f^{2k+1}$, $f = f^0 + \sum\limits_{k=0}^{m} f^{4k+2}$.

Здесь имеется сходство с результатами работы [5]. Можно предположить, что и то, и другое есть следствие какого-то более общего факта.

Лемма 4. *Утверждение п. 2) леммы 2 в градуированном случае можно дополнить следующим образом: имеет место равенство $(f^\bullet_{2\,2})(f^\bullet_{2\,2}) = 0$.*

Доказательство. Из идемпотентности $f = \begin{pmatrix} 1 & f^\bullet_{1\,2} \\ f^\bullet_{2\,1} & f^\bullet_{2\,2} \end{pmatrix}$ следует $f^\bullet_{1\,2} f^\bullet_{2\,1} = 0$, $f^\bullet_{2\,2} f^\bullet_{2\,1} = 0$, $f^\bullet_{1\,2} f^\bullet_{2\,2} = 0$, $f^\bullet_{2\,2} = f^\bullet_{2\,1} f^\bullet_{1\,2} + f^\bullet_{2\,2} f^\bullet_{2\,2}$. Отсюда $f^\bullet_{2\,2} f^\bullet_{2\,2} = f^\bullet_{2\,2} f^\bullet_{2\,2} f^\bullet_{2\,2}$, т. е. $u = f^\bullet_{2\,2} f^\bullet_{2\,2}$ — идемпотентная матрица. В градуированном же случае из идемпотентности $u = u^2 + u^3 + \cdots$ следует $u = 0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть для однородных компонент идемпотентной матрицы $f = f^0 + f^1 + f^2 + \dots + f^m$ задано разбиение на блоки одних и тех же размеров (причем диагональные блоки квадратны) $f_k = \begin{pmatrix} f^k_{1\,1} & f^k_{1\,2} \\ f^k_{2\,1} & f^k_{2\,2} \end{pmatrix}$ такое, что $f^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Тогда $\varphi(\pi, \vartheta) = \psi(\pi, \vartheta)^{-1}$ в том и только том случае, когда $f^k_{1\,1}$ для всех $k > 0$.

Доказательство. Это также следует из леммы 2, так как при описанном в условии f^0 имеет место равенство $f^0 f^k f^0 = \begin{pmatrix} f^k_{1\,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста данной работы.

Литература

1. Артамонов В.А. *Квантовая проблема Серра* // УМН. – 1998. – Т. 53. – № 4. – С. 3–76.
2. Тронин С.Н. *Ретракты и ретракции свободных алгебр* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 1. – С. 67–78.
3. Тронин С.Н. *О системах образующих проективных алгебр* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 5. – С. 63–72.
4. Тронин С.Н. *Об одной конструкции в теории проективных алгебр* // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35. – № 5. – С. 647–652.

5. Тронин С.Н. *О ретракциях колец многочленов* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 2. – С. 84–85.
6. Тронин С.Н. *О коммутативных ассоциативных проективных алгебрах ранга* 2 *над совершенным полем* // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41. – № 6. – С. 776–780.
7. Picavet G. *Algebraically flat or projective algebras* // J. Pure Appl. Algebra. – 2002. – V. 174. – № 2. – P. 163–185.

Казанский государственный университет

Поступила 19.09.2005