ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 514.76

Е.А. ПОЛЬКИНА

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ ДЛЯ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Известный геометр Альфред Грей при исследовании почти эрмитовых многообразий сформулировал принцип, согласно которому ключом к пониманию дифференциально-геометрических свойств таких многообразий являются так называемые тождества кривизны, которым удовлетворяет тензор Римана–Кристоффеля почти эрмитовых многообразий. Много работ было посвящено геометрическим следствиям этих тождеств, а также их аналогам для почти контактных метрических структур. В продолжение этой тематики в данной работе рассмотрены некоторые свойства кривизны локально конциркулярных квази-сасакиевых многообразий и почти контактных метрических многообразий.

Пусть M^{2n+1} — гладкое многообразие; $\mathrm{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M; ∇ — риманова связность метрики g на M; $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ — ее тензор Римана–Кристоффеля; d — оператор внешнего дифференцирования. Напомним ([1], с. 446), что *почти контактной метрической* (короче, AC-) *структурой* на многообразии M^{2n+1} называется четверка (η,ξ,Φ,g) тензорных полей на этом многообразии, где η — 1-форма на M, называемая контактной формой структуры; ξ — векторное поле, называемое характеристическим; Φ — поле тензора типа $(1;1)$, называемое структурным эндоморфизмом модуля $X(M)$; $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова структура на M. При этом

$$1)\ \eta(\xi)=1;\quad 2)\ \eta\circ\Phi=0;\quad 3)\ \Phi(\xi)=0;\quad 4)\ \Phi^2=-\,\mathrm{id}+\eta\otimes\xi;$$
$$5)\ \langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\quad X,Y\in X(M).$$

Многообразие с фиксированной на нем AC-структурой называют AC-многообразием. В $C^\infty(M)$-модуле $\mathrm{X}(M)$ гладких векторных полей на таком многообразии, внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathrm{l}=-\Phi^2$ и $\mathrm{m}=\eta\otimes\xi=\mathrm{id}+\Phi^2$ на распределения $\mathrm{L}=\mathrm{I}m\,\Phi$ и $\mathrm{M}=\ker\Phi$ размерностей $2n$ и 1 соответственно, причем $\mathrm{X}(M)=\mathrm{L}\oplus\mathrm{M}$, $\mathrm{L}\cap\mathrm{M}=\{0\}$. Более того, комплексификация модуля $\mathrm{X}(M)$, именно $\mathrm{X}^C(M)=\mathbf{C}\otimes\mathrm{X}(M)$ распадается в прямую сумму собственных распределений эндоморфизма Φ^C: $\mathrm{X}^C(M)=D_\Phi^{\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^0$, причем $D_\Phi^0=\mathrm{M}$. Проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут соответственно эндоморфизмы $\pi=-\frac12(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi)$, $\overline{\pi}=\frac12(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi)$ и $\mathrm{m}=\mathrm{id}+\Phi^2$.

Доказано ([1], с. 447), что к $(2n+1)$-мерному AC-многообразию, как метрическому f-многообразию дефекта 1, внутренним образом присоединяется G-структура, структурной группой которой является группа Ли $U(n)\times\{e\}$. Тотальное пространство этой G-структуры состоит из модифицированных A-реперов, т. е. комплексных реперов вида

$$(p,\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{\hat1},\dots,\varepsilon_{\hat n}),$$

где $\varepsilon_0=\xi_p$, $\varepsilon_a=\sqrt2\pi(e_a)$, $\varepsilon_{\hat a}=\sqrt2\overline{\pi}(e_a)$, $a=1,\dots,n$, $(e_1,\dots,e_n)$ — базис пространства L_p, как $\mathbf{C}$-модуля, $p\in M$.

AC-структура называется *нормальной*, если тензор Нейенхейса $N_\Phi(X,Y)=\frac14([\Phi X,\Phi Y]+\Phi^2[X,Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y])$ ее структурного эндоморфизма Φ удовлетворяет тождеству $2N_\Phi+d\eta\otimes\xi=0$. Нормальная почти контактная метрическая структура называется *квази-сасакиевой* (короче, QS-) *структурой* если ее фундаментальная форма $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ замкнута.

AC-многообразие M с AC-структурой $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ называется *локально конформно квази-сасакиевым* (короче, $lcQS$-) *многообразием* ([2], с. 26), если в некоторой окрестности U каждой точки из M существует конформное преобразование метрики g, переводящее структуру S в квази-сасакиеву структуру $\widehat{S} = (\widehat{\eta}, \widehat{\xi}, \Phi, \widehat{g})$, где

$$1)\ \widehat{\eta} = e^{-\sigma}\eta|_U; \quad 2)\ \widehat{\xi} = e^{\sigma}\xi|_U; \quad 3)\ \widehat{g} = e^{-2\sigma}g|_U; \tag{1}$$

$\sigma \in C^\infty(U)$ — локально определенная гладкая функция на многообразии M, называемая *определяющей* функцией конформного преобразования. Несложно показать, что ее внешний дифференциал $d\sigma$ корректно определяет замкнутую глобальную 1-форму ζ на M, сужение которой на U совпадает с $d\sigma$. С учетом (1) условие квази-сасакиевости преобразованной структуры можно записать в виде

$$\begin{aligned} &1)\ \ d\Omega = 2\zeta \wedge \Omega,\\ &2)\ \ N = \frac{1}{2}(\zeta \wedge \eta - d\eta) \otimes \xi. \end{aligned}$$

Расписывая эти соотношения на пространстве присоединенной G-структуры, непосредственным подсчетом показываем ([3], с. 11), что первая группа структурных уравнений $lcQS$-структуры имеет вид

$$\begin{aligned} &1)\ \ d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + 2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c \omega^c \wedge \omega_b + (\sigma_0\delta^a_b + C^a_b)\omega \wedge \omega^b;\\ &2)\ \ d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + 2\sigma_{[a}\delta^c_{b]}\omega_c \wedge \omega^b + (\sigma_0\delta^b_a - C^b_a)\omega \wedge \omega_b;\\ &3)\ \ \ d\omega = 2C^a_b\omega^b \wedge \omega_a + \sigma_a\omega^a \wedge \omega + \sigma^a\omega_a \wedge \omega, \end{aligned}$$

где $\{\sigma_i\}$ — компоненты формы ζ, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$d\sigma_a + \sigma_b\omega^b_a = \sigma_{ab}\omega^b + \sigma_a{}^b\omega_b + \sigma_{a0}\omega, \tag{2}$$

$\{\sigma_{ij}\}$ — подходящая система функций на пространстве присоединенной G-структуры; $\{\omega^i\}$ — компоненты формы смещения; $\{\omega^i_j\}$ — компоненты формы римановой связности метрики g; $C^a_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(\Phi^0_{\hat{a},b} + \Phi^0_{b,\hat{a}})$; $\{\Phi^i_{j,k}\}$ — компоненты ковариантного дифференциала структурного оператора в римановой связности. Здесь и далее индексы i, j, k пробегают значения от 0 до $2n$, индексы a, b, c, d — значения от 1 до n, $\widehat{a} = a + n$, $\omega_a = \omega^{\widehat{a}}$, $\sigma^a = \sigma_{\widehat{a}}$, $\omega = \omega^0$.

Известно также ([4], с. 54), что в классе конформных преобразований метрики естественно выделяются преобразования, сохраняющие геодезические окружности (т. е. кривые, у которых первая кривизна постоянна, а остальные кривизны равны нулю), это так называемые *конциркулярные* преобразования. Они характеризуются тем, что их определяющая функция σ (функция перехода от локально конциркулярных квази-сасакиевых структур к QS-структурам) является решением дифференциального уравнения Яно:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i\sigma_j + \beta g_{ij}, \tag{3}$$

где $\{\sigma_i\}$ — компоненты формы ζ, $\{\sigma_{i,j}\}$ — компоненты ее ковариантного дифференциала, $\beta = \beta(\sigma) \in C^\infty(M)$.

1. Кривизна локально конциркулярно квази-сасакиевых многообразий. Контактными аналогами известных тождеств Альфреда Грея R_2 и R_3 кривизны почти эрмитовых многообразий являются тождества кривизны CR_2 и CR_3 для AC-многообразий:

$$\begin{aligned} CR_2 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle &= \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\rangle +\\ &+ \langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi W\rangle + \langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi^2 W\rangle;\\ CR_3 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle &= \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W\rangle. \end{aligned}$$

Известно ([1], с. 356), что на пространстве присоединенной G-структуры эти тождества эквивалентны следующим соотношениям:

$$CR_2 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = R_{abcd} = 0; \quad CR_3 \Leftrightarrow R_{\hat{a}bcd} = 0.$$

Доказано ([3], с. 31), что для $lcQS$-многообразий классы CR_2 и CR_3 совпадают, а также

Предложение ([3], с. 32). *$lcQS$-многообразие является CR_2- и CR_3-многообразием тогда и только тогда, когда компоненты формы $d\sigma$ на пространстве присоединенной G-структуры удовлетворяют уравнениям $\sigma_{ab} = -\sigma_a\sigma_b$.*

Заметим что, т. к. для QS-структур $\sigma = 0$, то любое QS-многообразие удовлетворяет тождествам кривизны CR_2 и CR_3.

Покажем, что если $lcQS$-многообразие является локально конциркулярно квази-сасакиевым многообразием, то на нем будут выполняться тождества кривизны CR_2 и CR_3.

Действительно, с одной стороны, поскольку 1-форма ζ — тензор типа $(1;0)$, компоненты $\{\sigma_{i,j}\}$ ее ковариантного дифференциала в связности $\bigtriangledown$ удовлетворяют соотношениям ([1], с. 233) $d\sigma_i + \sigma_j\omega_i^j = \sigma_{i,j}\omega^j$. В частности, при $i = a$ получаем

$$d\sigma_a + \sigma_b\omega_a^b + \sigma_{\hat{b}}\omega_a^{\hat{b}} + \sigma_0\omega_a^0 = \sigma_{a,b}\omega^b + \sigma_{a,\hat{b}}\omega^{\hat{b}} + \sigma_{a,0}\omega,$$

откуда с учетом (2)

$$\sigma_{ab}\omega^b + \sigma_a{}^b\omega_b + \sigma_{a0}\omega + \sigma_{\hat{b}}\omega_a^{\hat{b}} + \sigma_0\omega_a^0 = \sigma_{a,b}\omega^b + \sigma_{a,\hat{b}}\omega^{\hat{b}} + \sigma_{a,0}\omega. \tag{4}$$

Далее, с учетом равенств, полученных при выводе структурных уравнений $lcQS$-структур ([3], с. 22)

$$\omega_a^{\hat{b}} = -B_{ab}{}^c\omega_c, \quad \omega_a^0 = -\sigma_a\omega + (B_a^b - C_a^b)\omega_b,$$

равенство (4) принимает вид

$$\sigma_{ab}\omega^b + \sigma_a{}^b\omega_b + \sigma_{a0}\omega - \sigma^h B_{ha}{}^b\omega_b - \sigma_0(B_a^b - C_a^b)\omega_b - \sigma_0\sigma_a\omega = \sigma_{a,b}\omega^b + \sigma_{a,\hat{b}}\omega^{\hat{b}} + \sigma_{a,0}\omega.$$

Откуда в силу линейной независимости базисных форм для $lcQS$-структур и, в частности, для локально конциркулярно квази-сасакиевых структур следует тождество

$$\sigma_{ab} = \sigma_{a,b}. \tag{5}$$

С другой стороны, рассмотрим переход от QS-структур к локально конциркулярным квази-сасакиевым структурам. Это преобразование является обратным к исходному конциркулярному преобразованию, поэтому его определяющей функцией будет функция $-\sigma$. С учетом этого на пространстве присоединенной G-структуры уравнение (3) принимает вид

$$\sigma_{a,b} = -\sigma_a\sigma_b.$$

Сравнивая это равенство с (5), получаем, что на локально конциркулярных квази-сасакиевых многообразиях верно тождество

$$\sigma_{ab} = -\sigma_a\sigma_b,$$

которое согласно предложению является условием принадлежности многообразия классам CR_2 и CR_3. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Локально конциркулярно квази-сасакиево многообразие является многообразием класса CR_2 и CR_3.*

2. Проективная инвариантность тождеств CR_2 и CR_3 AC-многообразий. Перейдем теперь к AC-многообразиям общего вида и рассмотрим тензор P проективной кривизны, который на пространстве главного расслоения реперов AC-многообразия M^{2n+1} задается соотношениями ([5], с. 80)

$$P_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2n}(r_{ik}g_{jl} - r_{jk}g_{il}), \tag{6}$$

где $\{g_{ij}\}$ — компоненты метрического тензора, $\{r_{ij}\}$ — компоненты тензора Риччи; $\{R_{ijkl}\}$ — компоненты тензора Римана–Кристоффеля. Легко показать, что тензор P обладает свойствами симметрии тензора Римана–Кристоффеля тогда и только тогда, когда М — многообразие Эйнштейна, что и будем предполагать.

Расписывая соотношения (6) на пространстве присоединенной G-структуры с учетом того, что на этом пространстве $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$ ([1], с. 448), в частности, получаем $P_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}bcd} + \frac{1}{2n}(r_{\hat{a}c}g_{bd} - r_{bc}g_{\hat{a}d})$, $P_{abcd} = R_{abcd} + \frac{1}{2n}(r_{ac}g_{bd} - r_{bc}g_{ad})$. И так как в силу эйнштейновости многообразия M $r_{bc} = \varepsilon g_{bc}$, то

$$P_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}bcd}, \quad P_{abcd} = R_{abcd}. \tag{7}$$

Из этих равенств очевидно следует, что если тензор P удовлетворяет проективным аналогам тождеств CR_2 и CR_3 — тождествам CP_2 и CP_3:

$$CP_2 : \langle P(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle P(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\rangle +$$
$$+ \langle P(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi W\rangle + \langle P(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi^2 W\rangle;$$
$$CP_3 : \langle P(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \langle P(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W\rangle,$$

то, как и для тензора Римана-Кристоффеля ([1], с. 356), нетрудно показать, что эти тождества на пространстве присоединенной G-структуры AC-многообразий равносильны соответственно соотношениям

$$CP_2 \Leftrightarrow P_{\hat{a}bcd} = P_{abcd} = 0, \quad CP_3 \Leftrightarrow P_{\hat{a}bcd} = 0.$$

Откуда с учетом (7) доказана

Теорема 2. *Тождества CR_2 и CR_3 для AC-многообразий Эйнштейна имеют проективно-инвариантный смысл.*

Литература

1. Кириченко В.Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
2. Баклашова Н.С. *Некоторые свойства кривизны $lcQS$-многообразий* // Научн. тр. МПГУ. Сер. Естественные науки. Сб. статей. - М.: ГНО Изд-во “Прометей” МПГУ, 2006. – С. 25–30.
3. Баклашова Н.С. *Структурные уравнения $LCQS$-структур и их приложения.* – Моск. пед. гос. ун-т. – М., 2005. – 34 с. Деп. в ВИНИТИ 01.07.05, № 935-В2005.
4. Кириченко В.Ф., Власова Л.И. *Концикулярная геометрия приближенно келеровых многообразий* // Матем. сб. – 2002. – Т. 193. – № 5. – С. 53–76.
5. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.

Московский педагогический государственный университет

Поступила 14.12.2006