ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.987

Л.С. ЕФРЕМОВА, Е.Н. МАХРОВА

О ДИНАМИКЕ МОНОТОННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ n-ОДА

1. Вопросам сосуществования периодов периодических точек, положительности топологической энтропии непрерывных отображений конечных графов посвящены статьи [1]–[5]. В [6] изучена динамика простейших отображений дендритов, допускающих не только конечное, но и счетное множество точек разветвления. Приведены примеры, иллюстрирующие различия в энтропийных свойствах непрерывных отображений дендритов со счетным множеством точек разветвления и непрерывных отображений их ретрактов — конечных деревьев.

Данная работа является продолжением [6]. Мы рассматриваем здесь основные аспекты динамики монотонных отображений элементарного представителя класса дендритов — n-ода.

2. Приведем необходимые определения и сформулируем основные результаты статьи.

Определение 1. Пусть C — комплексная плоскость, n — произвольное натуральное число. n-одом называется множество $X = \{z \in C : z = |z|e^{i\frac{2\pi}{n}(j-1)},\ 0 \le |z| \le 1,\ j = 1, 2, \dots, n,\ i$ — мнимая единица$\}$.

X имеет единственную точку разветвления 0, и открытое в X множество $X \setminus \{0\}$, состоит из n компонент, называемых компонентами n-ода. Условимся согласовывать нумерацию компонент с угловой координатой их точек и обозначать через X_j ту компоненту n-ода, угловая координата произвольной точки которой равна $\frac{2\pi}{n}(j-1)$, $1 \le j \le n$.

Замыкание $\overline{X_j}$ произвольной компоненты X_j, $1 \le j \le n$, называется ветвью n-ода.

Под дугой в X будем понимать множество, гомеоморфное промежутку на прямой. Одноточечное множество отнесем к классу дуг, считая его вырожденной дугой. Символом $\gamma(x, y)$ будем обозначать дугу с концами в точках x и y, содержащую эти точки. При любом $1 \le j \le n$ существует такая точка $e_j \in X_j$, что $\overline{X_j} = \gamma(0, e_j)$. Точки e_j, $1 \le j \le n$, называются концевыми точками n-ода.

Определение 2 ([6]). Отображение $f : X \to X$ назовем простейшим, если f непрерывно и полный прообраз любой дуги из $f(X)$ есть дуга в X.

Обозначим $P^0(X)$ множество всех простейших отображений n-ода в себя. Каково бы ни было $f \in P^0(X)$, при любом $m \ge 1$ $f^m \in P^0(X)$. Пример простейшего отображения доставляет поворот n-ода X на угол $2\pi/n$ с неподвижной точкой 0.

Обратим внимание на то, что хотя n-од не является линейно упорядоченным топологическим пространством (с топологией, индуцированной топологией комплексной плоскости), тем не менее корректно определено понятие монотонного отображения n-ода в себя.

Определение 3 ([7], с. 140). Отображение $f : X \to X$ называется монотонным, если f непрерывно и полный прообраз любого связного множества из $f(X)$ есть связное множество.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-1755.

Обозначим $M^0(X)$ множество всех монотонных отображений n-ода X в себя. Для любого $f \in M^0(X)$ и любого $m \geq 1$ $f^m \in M^0(X)$.

Условимся обозначать через $f^{-m}(A)$, $m \geq 1$, m-й полный прообраз произвольного множества $A \subset f(X)$, положим $f^{-0}(A) = A$.

Отметим, что $P^0(X) \subset M^0(X)$, но $P^0(X) \neq M^0(X)$. Действительно, отображение $f : X \to X$ такое, что $f(X)$ — одноточечное множество, является монотонным, но не простейшим.

Приведенные определения позволяют сформулировать основные результаты работы. Так, полное описание структуры монотонных отображений n-ода дает

Теорема А. *Пусть $f \in M^0(X)$. Тогда*

(A1) *если $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0) = \{0\}$, то $f \in P^0(X)$;*

(A2) *если $f(0) = 0$, а $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ есть собственное подмножество X, содержащее более одной точки, то непустое множество $Y = \overline{X \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$ инвариантно, и существует такое $g \in P^0(X)$, что $f_{|Y} = g_{|Y}$, где $(\cdot)_{|Y}$ — сужение отображения $(\cdot)$ на множество Y;*

(A3) *если $f(0) \neq 0$, то найдется не менее $(n-2)$-х компонент n-ода $X_{j_1}, X_{j_2}, \dots, X_{j_s}$, $n-2 \leq s \leq n$ таких, что при любом $1 \leq m \leq s$ $f(\overline{X_{j_m}}) = f(0)$. При этом $f(X)$ есть инвариантная компактная дуга.*

Для описания арифметических соотношений между периодами периодических точек отображения $f \in M^0(X)$потребуется понятие допустимого множества.

Определение 4 ([6]). Конечное упорядоченное множество $K = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, где $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ при $r > 1$, назовем допустимым, если одновременно $k_1 = 1$ и $\sum\limits_{j=2}^{r} k_j \leq n$.

В [6] получена оценка мощности $\operatorname{card} K$ допустимого множества K: $\operatorname{card} K \leq E(\frac{-1+\sqrt{9+8n}}{2})$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа $(\cdot)$.

Теорема В. *Пусть $f \in M^0(X)$. Тогда*

(B1) *если $f(0) = 0$, то существует такое допустимое множество K, что $T(f) = K$, где $T(f)$ — множество периодов периодических точек f;*

(B2) *если $f(0) \neq 0$, то f имеет лишь неподвижные точки и, быть может, периодические точки периода 2.*

Наряду со структурой множества $\operatorname{Per}(f)$ периодических точек опишем структуру ω-предельного множества $\omega(x, f)$ траектории произвольной точки $x \in X$, множества неблуждающих точек $\Omega(f)$ и укажем топологическую энтропию $h(f)$ отображения $f \in M^0(X)$.

Теорема С. *Пусть $f \in M^0(X)$. Тогда*

(C1) $\operatorname{Per}(f)$ — *замкнутое множество*;

(C2) $\omega(x, f)$ — *периодическая орбита для любой точки $x \in X$*;

(C3) $\Omega(f) = \bigcup\limits_{x \in X} \omega(x, f) = \operatorname{Per}(f)$;

(C4) $h(f) = 0$.

3. Перейдем к доказательству основных результатов работы. Для монотонных отображений используем

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО. Если $f \in M^0(X)$, то для произвольных точек $x, y \in X$ справедливо равенство $f(\gamma(x, y)) = \gamma(f(x), f(y))$.

Лемма 1. *Пусть* $f \in M^0(X)$ *и* $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0) = \{0\}$. *Тогда* $f \in P^0(X)$.

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы 1 $f(0) = 0$. Предположим, что $f \notin P^0(X)$. Тогда найдется такая дуга $\gamma(x, y) \subset f(X)$, что компактное связное множество $f^{-1}(\gamma(x, y))$ не является дугой. Используя регулярность X ([7], с. 305), получаем отсюда, что $f^{-1}(\gamma(x, y))$ — n_1-од при $3 \le n_1 \le n$; $0 \in f^{-1}(\gamma(x, y))$, $0 \in \gamma(x, y)$, $\gamma(x, y)$ — невырожденная дуга. Применяя основное свойство монотонных отображений, укажем точки $z \in \gamma(x, y)$, $z \ne 0$; z_1 и z_2, принадлежащие двум различным компонентам n_1-ода $f^{-1}(\gamma(x, y))$, для которых выполнены равенства $f(z_1) = f(z_2) = z$. Так как $f^{-1}(z)$ — связное множество, то $\gamma(z_1, z_2) \subset f^{-1}(z)$, $0 \in \gamma(z_1, z_2)$. Поэтому $f(0) \ne 0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $f \in M^0(X)$ *и* $f(0) = 0$. *Тогда* $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ — *связное множество.*

Доказательство. Утверждение леммы 2 справедливо, если $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0) = \{0\}$. Поэтому будем предполагать, что $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0) \ne \{0\}$. Возьмем произвольно две различные точки $x, y \in \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$. Тогда найдутся натуральные числа $m(x)$ и $m(y)$ такие, что $f^{m(x)}(x) = f^{m(y)}(y) = 0$. Положим $m_0 = max\{m(x), m(y)\}$. Так как $f(0) = 0$, то $x, y \in f^{-m_0}(0)$. Условие $f \in M^0(X)$влечет за собой связность множества $f^{-m_\circ}(0)$ и справедливость включения $\gamma(x, y) \subset f^{-m_0}(0)$. Отсюда следует, что $\gamma(x, y) \subset \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$. Таким образом, множество $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ дугообразно связно. $\square$

Следствие 1. Пусть $f \in M^0(X)$, $f(0) = 0$, $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0) \ne \{0\}$. Тогда

1.1. $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$ — либо компактная невырожденная дуга, либо n_1-од, $3 \le n_1 \le n$;

1.2. если множество $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ не замкнуто, то любая точка из $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)} \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ является концевой точкой континуума $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$, причем $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)} \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ — инвариантное множество.

Информацию о динамике монотонного отображения на множестве концевых точек континуума $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$ содержит

Лемма 3. *Пусть* $f \in M^0(X)$, $f(0) = 0$, $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0) \ne \{0\}$. *Тогда*

3.1. *какова бы ни была концевая точка* e *континуума* $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$, *справедливо либо* $e \in \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$, *либо* $e \in \mathrm{Per}(f) \setminus \{0\}$;

3.2. *если существует концевая точка* e *континуума* $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$, *не являющаяся концевой точкой* X, *то* $e \in \mathrm{Per}(f)$.

Доказательство. 1. Убедимся в справедливости утверждения 3.1. Какова бы ни была концевая точка $e \in \overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$, возможно либо $e \in \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$, либо $e \in \overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)} \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$. Рассмотрим вторую из указанных возможностей. Тогда $e \ne 0$, и в силу следствия 1 траектория

$\{f^m(e)\}_{m\geq 0}$ состоит из конечного числа попарно различных точек. Отсюда получаем, что либо $e \notin \mathrm{Per}(f)$, но при некотором $j \geq 1$ $e_j = f^j(e)$ — периодическая точка f; либо $e \in \mathrm{Per}(f)$. Исключим первую из указанных возможностей. Действительно, в противном случае найдутся различные точки $z_1 = f^{j-1}(e)$ и $z_2 = f^{j+k-1}(e)$ (k — период точки e_j, $k \geq 1$) такие, что $f(z_1) = f(z_2) = e_j$. Тогда $\overline{\gamma(z_1, z_2)} \subset f^{-1}(e_j)$. В силу следствия 1 z_1 и z_2 — различные концевые точки континуума $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$. Поэтому $0 \in \gamma(z_1, z_2)$, и $f(0) \neq 0$. Последнее невозможно. Следовательно, $e \in \mathrm{Per}(f)$.

2. Докажем утверждение 3.2. Если $e = 0$, то утверждение 3.2 справедливо. Пусть $e \neq 0$, тогда $\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)} \neq X$, и найдется компонента U открытого множества $X \setminus \overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$, которая имеет в X единственную граничную точку e. Предположим, что $e \in \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$. Тогда существует $m_0 \geq 1$ такое, что $f^{m_0}(e) = 0$, и при любом $m \geq m_0$ $\overline{f^m(U)}$ — компактная невырожденная дуга, одна из концевых точек которой совпадает с 0. Поэтому при любом $m \geq m_0$ $\overline{(f^m(U))} \bigcap (\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}) = \{0\}$. Используя утверждение 1.1 следствия 1, получаем отсюда, что существует инвариантный континуум $X^* = \overline{\bigcup\limits_{l=1}^{p} X_{j_l}}$, где $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_p}$ — все те компоненты n-ода X, для которых справедливо $X_{j_l} \bigcap (\overline{\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}) = \emptyset$, $X_{j_l} \bigcap (\overline{\bigcup\limits_{m=m_0}^{+\infty} f^m(U)}) \neq \emptyset$ при любом $1 \leq l \leq p$. Отметим, что $\overline{U} \bigcap X^* = \emptyset$. Последнее влечет за собой существование натурального числа s и точек $z \in X^*$, $z \neq 0$; $z_1 \in U$, $z_2 \in X_{j_{l_0}}$ при некотором $1 \leq l_0 \leq p$ таких, что $f^s(z_1) = f^s(z_2) = z$. Отсюда следует равенство $f^s(0) = z$. Таким образом, сделанное предположение неверно, и $e \notin \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$. В силу п. 3.1 $e \in \mathrm{Per}(f)$. $\square$

Следствие 2. Пусть $f \in M^0(X)$, $f(0) = 0$, $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ — собственное подмножество X, содержащее более одной точки. Тогда множество $Y = \overline{X \setminus \bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)}$ не пусто и инвариантно.

Лемма 4. *Пусть $f \in M^0(X)$, $f(0) = 0$, $\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)$ — собственное подмножество X, содержащее более одной точки. Тогда $f_{|Y}$ — простейшее отображение.*

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 1, стоит лишь заметить, что если для некоторой дуги $\gamma(x, y) \subset f(Y)$ континуум $f^{-1}(\gamma(x, y))$ не является дугой, то $f^{-1}(\gamma(x, y)) \bigcap (\bigcup\limits_{m=0}^{+\infty} f^{-m}(0)) = \{0\}$.

Следствие 3. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда существует $g \in P^0(X)$ такое, что $f_{|Y} = g_{|Y}$.

Лемма 1, следствия 2 и 3 доказывают справедливость утверждений (A1) и (A2) теоремы A. Перейдем к доказательству утверждения (A3).

Лемма 5. *Пусть $f \in M^0(X)$, $f(0) \neq 0$. Тогда существует не менее $(n-2)$-х компонент n-ода $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_s}$, $n - 2 \leq s \leq n$, таких, что при любом l, $1 \leq l \leq s$, $f(\overline{X_{j_l}}) = f(0)$. Множество $f(X)$ есть инвариантная дуга.*

Доказательство. 1. Так как X — хаусдорфово пространство, то найдется такая дуга $\gamma(a, b)$, что $f(0) \in \gamma(a, b)$, $a \neq f(0)$, $b \neq f(0)$, $0 \notin \gamma(a, b)$. Используя непрерывность f, укажем окрестность

$U_\delta(0)$ точки 0 так, чтобы $f(U_\delta(0)) \subset \gamma(a,b)$. Предположим, что существует не более $(n-3)$-х компонент $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_l}$, $1 \le l \le n-3$, таких, что $f(\overline{X_{j_m}}) = f(0)$, $1 \le m \le l$. Тогда найдутся различные натуральные числа $1 \le r_1$, $r_2 \le n$, $r_1, r_2 \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$, выделяющие те компоненты X_{r_1} и X_{r_2}, для которых существует $z \in f(U_\delta(0) \bigcap X_{r_1}) \bigcap f(U_\delta(0) \bigcap X_{r_2})$, $z \ne f(0)$; $z \in \gamma(a, f(0))$ или $z \in \gamma(b, f(0))$. Поэтому можно указать точки $z_1 \in U_\delta(0) \bigcap X_{r_1}$ и $z_2 \in U_\delta(0) \bigcap X_{r_2}$, для которых $f(z_1) = f(z_2) = z$. Отсюда следует $\gamma(z_1, z_2) \subset f^{-1}(z)$, и $0 \in f^{-1}(z)$. Последнее невозможно. Таким образом, сделанное предположение неверно.

2. В силу п. 1 $X \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{s} X_{j_m}$ — замкнутая дуга. Положим $\gamma(c,d) = X \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{s} X_{j_m}$. При $s = n$ имеем $c = d = 0$, и утверждение справедливо. Пусть $s = n-2$ или $s = n-1$. Используя основное свойство монотонных отображений, имеем $f(X) = f(\bigcup\limits_{m=1}^{s} X_{j_m} \bigcup \gamma(c,d)) = f(0) \bigcup \gamma(f(c), f(d))$. Так как $f(X)$ — связное множество, то $f(0) \in \gamma(f(c), f(d))$. Таким образом, $f(X)$ — компактная инвариантная дуга. $\square$

Справедливость утверждения (A3) вытекает из леммы 5.

Приведем примеры монотонных отображений, для которых 0 не является неподвижной точкой.

Пример 1. Пусть отображение $f \in M^0(X)$определено равенствами

$$f(z) = \begin{cases} 1/2, & z \in \bigcup\limits_{j=3}^{n} X_j; \\ 1/2 - z, & z \in [0, 1/2]; \\ (2z-1)e^{i2\pi/n}, & z \in (1/2; 1]; \\ 1/2(|z|+1), & z \in X_2. \end{cases}$$

Тогда все точки $\overline{X_1 \bigcup X_2}$, за исключением неподвижной точки $z = 1/4$, являются периодическими точками f периода 2.

Пример 2. Рассмотрим отображение $f \in M^0(X)$, определяемое равенствами

$$f(z) = \begin{cases} 1/2, & z \in \bigcup\limits_{j=3}^{n} X_j; \\ 1/2(z+1), & z \in X_1; \\ 1/2 - |z|, & z \in X_2, \text{ причем } 0 \le |z| \le 1/2, \\ (2|z|-1)e^{i2\pi/n}, & z \in X_2, \text{ причем } 1/2 < |z| \le 1. \end{cases}$$

Тогда f имеет две неподвижные точки $z_0 = 1$ и $z_1 = e^{i2\pi/n}$, а для ω-предельного множества $\omega(z,f)$ траектории произвольной точки $z \in X \setminus \{z_1\}$ справедливо $\omega(z,f) = \{z_0\}$.

Справедливость теорем B и C вытекает из теоремы A и результатов работы [6]. Отметим, что утверждение (C4) теоремы C следует также из [4] и [5].

Литература

1. Alseada L., Llibre J., Misiurewich M. *Periodic orbits of maps of Y* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 313. – P. 475–538.
2. Baldwin St. *An extension of Sarkovskii's theorem to the n-od* // Ergod. Theory and Dynam. Syst. – 1991. – V. 11. – № 2. – P. 249–271.
3. Baldwin St. *Some limitations toward extending Sarkovskii's theorem to connected linearly ordered spaces* // Houston J. Math. – 1991. – V. 17. – № 1. – P. 39–53.

4. Blokh A.M. *The spectral decomposition, periods of cycles and Misiurewicz conjecture for graph maps* // Preprint. – 1990.
5. Llibre J., Misiurewich M. *Horseshoes, entropy and periods for graph maps* // Preprint. – 1991.
6. Efremova L.S., Makhrova E.N. *Strange mappings of dendrites with countable set of ramification points* // Dynamics Days. Seventeenth Annual Informal Workshop, Lyon, France, 10-13 July, 1996. Abstracts. – 1996. – P. 63.
7. Куратовский К. *Топология.* – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 624 с.

Нижегородский государственный университет

Поступила
23.05.1995