ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 514.76

НГУЕН ЗОАН ТУАН

О КЛАССЕ ТРИ-ТКАНЕЙ ТИПА $W(4,4,2)$ С ПОСТОЯННЫМИ КОМПОНЕНТАМИ ОСНОВНОГО ТЕНЗОРА

1. По определению, три-тканью типа $W(P,P,Q)$, где $P > Q$, называется тройное слоение дифференцируемого многообразия M размерности $n = P+Q$ с помощью трех семейств S_1, S_2, S_3 поверхностей размерности соответственно P, P, Q таких, что через каждую точку $x \in M$ проходит ровно по одной поверхности V_1, V_2, V_3 каждого семейства, причем x есть единственная точка пересечения поверхностей V_1 и V_3, также как и поверхностей V_2 и V_3.

В [1] рассмотрены общие три-ткани типа $W(p,q,r)$, в [2] — три-ткани типа $W(n-1,n-1,1)$. Это специальный случай три-тканей типа $W(P,P,Q)$, $P > Q$.

Рассмотрим над M многообразие реперов $\{x, e_i, \overline{e}_i, e_\alpha\}$, $i = \overline{1,Q}$, $\alpha = \overline{Q+1,\dots,Q+P}$, в котором e_i касаются поверхности первого семейства, $\overline{e}_i$ касаются поверхности второго семейства, $e_i + \overline{e}_i$ касаются поверхности третьего семейства, а e_α касаются поверхностей как первого, так и второго семейств, проходящих через точку x. Множество M' таких реперов образует G-структуру на M, где G — подгруппа полной линейной группы, состоящая из матриц вида (см. [3])

$$(U_K^J) = \begin{pmatrix} U_\alpha^\beta & 0 & 0 \\ U_i^\beta & U_i^k & 0 \\ -U_i^\beta & 0 & U_i^k \end{pmatrix}$$

$J, K = 1,\dots,n = P+Q$; $i,k = 1,\dots,Q$; $\alpha,\beta = Q+1,\dots,Q+P$, $\det(U_\alpha^\beta) \neq 0$, $\det(U_i^k) \neq 0$.

Каждому реперу $\{x, e_i, \overline{e}_i, e_\alpha\}$ соответствует корепер сопряженных линейных форм ω^i, $\overline{\omega}^i$, ω^α. Эти формы назовем базисными, а их линейные комбинации — главными формами.

Семейства S_1, S_2, S_3 могут быть заданы с помощью вполне интегрируемых систем уравнений Пфаффа

$$\begin{aligned} &\overline{\omega}^i = 0 && \text{(уравнения поверхности семейства } S_1\text{)};\\ &\omega^i = 0 && \text{(уравнения поверхности семейства } S_2\text{)};\\ &\omega^i - \overline{\omega}^i = 0,\ \ \omega^\alpha = 0 && \text{(уравнения поверхности семейства } S_3\text{)}. \end{aligned}$$

Условия их полной интегрируемости образуют основные структурные уравнения три-ткани, приводимые к виду (см. [3])

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega_k^i \wedge \omega^k + A_{lk}^i \omega^l \wedge \omega^k + A_{\alpha k}^i \omega^\alpha \wedge \omega^k,\\ d\overline{\omega}^i &= \omega_k^i \wedge \overline{\omega}^k + A_{lk}^i \overline{\omega}^l \wedge \overline{\omega}^k + A_{\alpha k}^i \omega^\alpha \wedge \overline{\omega}^k,\\ d\omega^\alpha &= \omega_k^\alpha \wedge (\omega^k - \overline{\omega}^k) + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A_{lk}^i + A_{kl}^i = 0$.

В [3] доказано, что величины $\{A_{\alpha k}^i\}$ образуют тензор, называемый основным тензором ткани $W(P,P,Q)$. В [4] рассмотрен специальный класс три-тканей типа $W(P,P,Q)$, $P > Q$, у которых тензоры $\{A_{\alpha k}^i\}$ во всех точках эквивалентны между собой, т. е. компоненты основного тензора $\{A_{\alpha k}^i\}$ постоянны на некотором подрасслоении $\widetilde{M}'$ расслоения реперов M'. Это подрасслоение $\widetilde{M}'$

есть g_0-структура, где $g_0 \subseteq G$. Согласно ([4], с. 86) g_0-структура определена на слоях третьего семейства, заданных уравнениями $\omega^i - \overline{\omega}^i = 0$, $\omega^\alpha = 0$.

В данной статье рассматривается один класс три-тканей типа $W(4,4,2)$ с постоянными компонентами основного тензора, у которых группа $g_0 \subseteq GL(2)$ является аффинной. Поэтому на слоях третьего семейства такой ткани определена аффинная структура.

2. Рассмотрим три-ткань $W(4,4,2)$ со следующими структурными уравнениями:

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1 + \omega_2^1 \wedge \omega^2 + f\omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^2 = \omega_1^2 \wedge \omega^1 + \omega_2^2 \wedge \omega^2 + \varphi_1^2 \wedge \omega^1 + \varphi_2^2 \wedge \omega^2, \\ d\overline{\omega}^1 = \omega_1^1 \wedge \overline{\omega}^1 + \omega_2^1 \wedge \overline{\omega}^2 + f\overline{\omega}^1 \wedge \overline{\omega}^2, \\ d\overline{\omega}^2 = \omega_1^2 \wedge \overline{\omega}^1 + \omega_2^2 \wedge \overline{\omega}^2 - \varphi_1^2 \wedge \overline{\omega}^1 - \varphi_2^2 \wedge \overline{\omega}^2, \\ d\varphi_1^2 = \varphi_{12}^{21} \wedge \varphi_1^2 + \varphi_{12}^{22} \wedge \varphi_2^2 + \omega_{11}^2 \wedge (\omega^1 - \overline{\omega}^1) + \omega_{12}^2 \wedge (\omega^2 - \overline{\omega}^2), \\ d\varphi_2^2 = \varphi_{22}^{21} \wedge \varphi_1^2 + \varphi_{22}^{22} \wedge \varphi_2^2 + \omega_{21}^2 \wedge (\omega^1 - \overline{\omega}^1) + \omega_{22}^2 \wedge (\omega^2 - \overline{\omega}^2). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь φ_1^2, φ_2^2, ω^i, $\overline{\omega}^i$ $(i = 1,2)$ суть базисные формы; f есть некоторая функция на подрасслоении расслоения M'.

Продолжая внешние дифференциальные уравнения (2) и используя обобщенную лемму Картана, заметим, что формы ω_2^1 и $df + f\omega_2^2$ являются главными формами, причем ω_2^1 выражается только через ω^1, ω^2, $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$, т. е. $\omega_2^1 = B_1\omega^1 + B_2\omega^2 + \overline{B}_1\overline{\omega}^1 + \overline{B}_2\overline{\omega}^2$. Если f — константа, то ω_2^2 — главная форма.

В случае $f = 0$ уравнения (2) имеют вид

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1 + B_1\omega^1 \wedge \omega^2 + \overline{B}_1\overline{\omega}^1 \wedge \omega^2 + \overline{B}_2\overline{\omega}^2 \wedge \omega^2, \\ d\omega^2 = \omega_1^2 \wedge \omega^1 + \omega_2^2 \wedge \omega^2 + \varphi_1^2 \wedge \omega^1 + \varphi_2^2 \wedge \omega^2, \\ d\overline{\omega}^1 = \omega_1^1 \wedge \overline{\omega}^1 + B_1\omega^1 \wedge \overline{\omega}^2 + B_2\omega^2 \wedge \overline{\omega}^2 + \overline{B}_1\overline{\omega}^1 \wedge \overline{\omega}^2, \\ d\overline{\omega}^2 = \omega_1^2 \wedge \overline{\omega}^1 + \omega_2^2 \wedge \overline{\omega}^2 + \varphi_1^2 \wedge \overline{\omega}^1 + \varphi_2^2 \wedge \overline{\omega}^2, \\ d\varphi_1^2 = \varphi_{12}^{21} \wedge \varphi_1^2 + \varphi_{12}^{22} \wedge \varphi_2^2 + \omega_{11}^2 \wedge (\omega^1 - \overline{\omega}^1) + \omega_{12}^2 \wedge (\omega^2 - \overline{\omega}^2), \\ d\varphi_2^2 = \varphi_{22}^{21} \wedge \varphi_1^2 + \varphi_{22}^{22} \wedge \varphi_2^2 + \omega_{21}^2 \wedge (\omega^1 - \overline{\omega}^1) + \omega_{22}^2 \wedge (\omega^2 - \overline{\omega}^2). \end{cases} \tag{3}$$

Продолжая систему (3), получим $B_1 = B_2 = \overline{B}_1 = \overline{B}_2 = 0$, т. е. $\omega_2^1 = 0$. Тогда первое и третье уравнения системы (3) примут вид $d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1$, $d\overline{\omega}^1 = \omega_1^1 \wedge \overline{\omega}^1$. Отсюда следует, что $d\omega_1^1 = K\omega^1 \wedge \overline{\omega}^1$. Дифференцируя внешним образом уравнения системы (3), заметим, что формы ω_{12}^2, ω_{22}^2, ω_{11}^2, ω_{21}^2, φ_{22}^{21}, φ_{22}^{22} являются главными. Итак, уравнения (3) имеют вид

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega_1^1 \wedge \omega^1, \\ d\omega^2 &= (\omega_1^2 + \varphi_1^2) \wedge \omega^1 + (\omega_2^2 + \varphi_2^2) \wedge \omega^2, \\ d\overline{\omega}^1 &= \omega_1^1 \wedge \overline{\omega}^1, \\ d\overline{\omega}^2 &= (\omega_1^2 - \varphi_1^2) \wedge \overline{\omega}^1 + (\omega_2^2 - \varphi_2^2) \wedge \overline{\omega}^2, \\ d\omega_1^1 &= K\omega^1 \wedge \overline{\omega}^1, \\ d\varphi_1^2 &= (\omega_2^2 - \omega_1^1) \wedge \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \wedge \omega_1^2 + \cdots, \\ d\varphi_2^2 &= \ldots, \\ d\omega_1^2 &= (\omega_2^2 - \omega_1^1) \wedge \omega_1^2 + \cdots, \\ d\omega_2^2 &= \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь многоточия обозначают, что пропущены некоторые билинейные комбинации базисных форм.

3. Рассмотрим один специальный случай системы (4)

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1, \\ d\omega^2 = (\omega_1^2 + \varphi_1^2) \wedge \omega^1 + (\omega_2^2 + \varphi_2^2) \wedge \omega^2, \\ d\omega_1^1 = 0, \\ d(\omega_1^2 + \varphi_1^2) = (\omega_2^2 + \varphi_2^2 - \omega_1^1) \wedge (\omega_1^2 + \varphi_1^2) + \lambda\omega^1 \wedge \omega^2, \\ d(\omega_2^2 + \varphi_2^2) = \gamma\omega^1 \wedge \omega^2; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} d\overline{\omega}^1 = \omega_1^1 \wedge \overline{\omega}^1, \\ d\overline{\omega}^2 = (\omega_1^2 - \varphi_1^2) \wedge \overline{\omega}^1 + (\omega_2^2 - \varphi_2^2) \wedge \overline{\omega}^2, \\ d\omega_1^1 = 0, \\ d(\omega_1^2 - \varphi_1^2) = (\omega_2^2 - \varphi_2^2 - \omega_1^1) \wedge (\omega_1^2 - \varphi_1^2) + \lambda\overline{\omega}^1 \wedge \omega^2, \\ d(\omega_2^2 - \varphi_2^2) = \gamma\overline{\omega}^1 \wedge \overline{\omega}^2. \end{cases} \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом выражения $d(\omega_2^2 + \varphi_2^2)$ и $d(\omega_2^2 - \varphi_2^2)$, с учетом линейной независимости системы $\{\omega^1, \omega^2, \overline{\omega}^1, \overline{\omega}^2, \varphi_2^2\}$ получим $\gamma = 0$. Дифференцируя внешним образом выражения $d(\omega_1^2 + \varphi_1^2)$ и $d(\omega_1^2 - \varphi_1^2)$, получим

$$(d\lambda + 2\lambda\omega_1^1) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad (d\lambda + 2\lambda\omega_1^1) \wedge \overline{\omega}^1 \wedge \overline{\omega}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$d\lambda + 2\lambda\omega_1^1 = 0. \tag{7}$$

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Тогда уравнения (5) и (6) имеют вид

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1, \\ d\omega^2 = (\omega_1^2 + \varphi_1^2) \wedge \omega^1 + (\omega_2^2 + \varphi_2^2) \wedge \omega^2, \\ d\omega_1^1 = 0, \\ d(\omega_1^2 + \varphi_1^2) = (\omega_2^2 + \varphi_2^2 - \omega_1^1) \wedge (\omega_1^2 + \varphi_1^2), \\ d(\omega_2^2 + \varphi_2^2) = 0; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} d\overline{\omega}^1 = \omega_1^1 \wedge \overline{\omega}^1, \\ d\overline{\omega}^2 = (\omega_1^2 - \varphi_1^2) \wedge \overline{\omega}^1 + (\omega_2^2 - \varphi_2^2) \wedge \overline{\omega}^2, \\ d\omega_1^1 = 0, \\ d(\omega_1^2 - \varphi_1^2) = (\omega_2^2 - \varphi_2^2 - \omega_1^1) \wedge (\omega_1^2 - \varphi_1^2), \\ d(\omega_2^2 - \varphi_2^2) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Докажем, что уравнения (8) и (9) имеют вид структурных уравнений подгруппы группы $GL(2)$, заданной следующими деривационными уравнениями:

$$dr = -\Omega^1 e_1 - \Omega^2 e_2, \quad de_1 = -\Omega_1^1 e_1 - \Omega_1^2 e_2, \quad de_2 = -\Omega_2^2 e_2. \tag{10}$$

Инвариантные формы этой подгруппы удовлетворяют структурным уравнениям

$$\begin{cases} d\Omega^1 = \Omega_1^1 \wedge \Omega^1, \\ d\Omega^2 = \Omega_1^2 \wedge \Omega^1 + \Omega_2^2 \wedge \Omega^2, \\ d\Omega_1^1 = 0, \\ d\Omega_1^2 = \Omega_1^2 \wedge \Omega_1^1 + \Omega_2^2 \wedge \Omega_1^2, \\ d\Omega_2^2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Для поверхностей с базисными формами ω_1, ω_2 имеем $\Omega^1 = \omega^1$, $\Omega^2 = \omega^2$, инвариантные формы этой подгруппы есть $\Omega_1^1 = \omega_1^1$, $\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \varphi_1^2$, $\Omega_2^2 = \omega_2^2 + \varphi_2^2$. Аналогично, для поверхностей с базисными формами $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, имеем $\Omega^1 = \overline{\omega}^1$, $\Omega^2 = \overline{\omega}^2$, $\Omega_1^1 = \omega_1^1$, $\Omega_1^2 = \omega_1^2 - \varphi_1^2$, $\Omega_2^2 = \omega_2^2 - \varphi_2^2$.

Таким образом, группа со структурными уравнениями (10), (11) является подгруппой группы $GL(2)$, которая выделяется вполне интегрируемым уравнением $\Omega_2^1 = 0$.

На двумерных слоях третьего семейства, заданного системой $\omega^1 = \overline{\omega}^1$, $\omega^2 = \overline{\omega}^2$, $\varphi_1^2 = \varphi_2^2 = 0$, уравнения (8), (9) имеют вид (11), где $\Omega^1 = \omega^1 = \overline{\omega}^1$, $\Omega^2 = \omega^2 = \overline{\omega}^2$, $\Omega_1^2 = \omega_1^2$, $\Omega_1^1 = \omega_1^1$, $\Omega_2^2 = \omega_2^2$, и определяют подгруппу g_0 группы $GL(2)$.

Интегрируя систему (10), найдем, что подгруппа g_0 имеет вид

$$x' = x + C, \quad y' = Ax + By + D, \tag{12}$$

где A, B, C, D — постоянные (см. [5]). Итак, доказана

Теорема. *В случае* $\lambda = 0$ *структурные уравнения* (8) *и* (9) *определяют подгруппу* g_0 *группы* $GL(2)$*, заданную системой* (10)*. На двумерных слоях третьего семейства определена аффинная структура.*

Литература

1. Акивис М.А., Гольберг В.В. *О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР. – 1973. – Т. 4. – С. 179–204.
2. Апресян Ю.А. *О многомерных три-тканях, образованных двумя семействами гиперповерхностей и одним семейством кривых* // Изв. вузов. Математика. – 1977. – № 4. – С. 132–135.
3. Нгуен Зоан Туан. *О многомерных три-тканях типа* $W(P,P,Q)$ // Геометрия погружен. многообразий. – М.: МГПИ, 1986. – С. 101–112.
4. Нгуен Зоан Туан. *Некоторые подклассы три-ткани типа* $W(P,P,Q)$ *с постоянными компонентами основного тензора* // Ткани и квазигруппы. – Калинин, 1987. – С. 82–87.
5. Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* – Казань: Изд-во КГУ, 1962. – 210 с.

Ханойский пединститут № 1
(*Вьетнам*)

Поступили
первый вариант 22.01.1996
окончательный вариант 27.01.1997