ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 514.763

М.В. СМОЛЬНИКОВА

ОБОБЩЕННО РЕКУРРЕНТНОЕ СИММЕТРИЧЕСКОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ

В данной работе рассматриваются обобщенно рекуррентные симметрические тензорные поля второй валентности на римановых многообразиях знакоопределенной секционной кривизны и в евклидовом пространстве. Полученные результаты применяются к геометрии обобщенно рекуррентных и обобщенно конциркулярно рекуррентных римановых многообразий [1].

Результаты статьи были анонсированы в [2].

1. Введение

Рассмотрим n-мерное ($n \geq 2$) риманово многообразие (M, g) со связностью Леви-Чивита $\bigtriangledown$. Подобно тому, как введенное К. Яно [3] торсообразующее векторное поле $\xi \in C^\infty TM : \bigtriangledown\xi = \lambda g + \eta \otimes \xi$ для $\lambda \in C^\infty M$ и $\eta \in C^\infty T^*M$ обобщает понятие рекуррентного векторного поля $\bigtriangledown\xi = \eta \otimes \xi$, так и рассматриваемое в данной работе *обобщенно рекуррентное симметрическое тензорное поле* $\varphi \in C^\infty S^2 M$:

$$\bigtriangledown\varphi = \lambda \otimes g + \eta \otimes \varphi \tag{1.1}$$

для $\lambda, \eta \in C^\infty T^*M$ обобщает хорошо известное понятие рекуррентного тензорного поля $\bigtriangledown\varphi = \eta \otimes \varphi$.

Отметим, что если на (M, g) существует рекуррентное тензорное поле $\varphi \in C^\infty S^2 M$, то на (M, g) существует обобщенно рекуррентное тензорное поле $\psi \in C^\infty S^2 M$, в качестве которого можно выбрать тензорное поле $\psi = \varphi - \frac{1}{n}(\operatorname{trace}_g \varphi)g$. Так, в частности, если тензор Ric является рекуррентным, то тензор Эйнштейна $G = \operatorname{Ric} - \frac{1}{n}Skg$, где $Sk = \operatorname{trace}_g \operatorname{Ric}$, будет обобщенно рекуррентным.

2. Обобщенно рекуррентное тензорное поле на многообразии знакоопределенной секционной кривизны

В локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ на (M, g) из компонент $\varphi_{ij} = \varphi(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ обобщенно рекуррентного симметрического тензорного поля φ с помощью оператора ковариантного дифференцирования $\bigtriangledown_i$ в направлении векторного поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$ построим векторное поле X с компонентами $X^i = (\bigtriangledown_k \varphi^{il})\varphi_l^k - (\bigtriangledown_l \varphi^{lk})\varphi_k^i$.

Если воспользоваться уравнениями (1.1), которые в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ имеют вид $\bigtriangledown_k \varphi = \lambda_k g_{ij} + \eta_k \varphi_{ij}$, то нетрудно установить, что $\operatorname{div} X = \bigtriangledown_i X^i \equiv 0$.

С другой стороны, используя тождество Риччи

$$\bigtriangledown_k \bigtriangledown_l \varphi_{ij} - \bigtriangledown_l \bigtriangledown_k \varphi_{ij} = -\varphi_{pj} R^p_{ikl} - \varphi_{ip} R^p_{jkl},$$

где R^m_{ikl} — компоненты тензора кривизны R связности $\bigtriangledown$, находим, что

$$\operatorname{div} X = R_{ij}\varphi^{ik}\varphi^j_k - R_{ijkl}\varphi^{ik}\varphi^{jl},$$

где $R_{ij} = R^m_{imj}$ — компоненты тензора Риччи.

Если в произвольной точке $x \in M$ положить $\varphi(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ для соответствующего ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства $T_x M$, то, проведя соответствующие преобразования и переобозначения, получим

$$R'_{ij}\varphi^{ik}\varphi^j_k - R'_{kijl}\varphi^{kj}\varphi^{il} = R'_{ij}\lambda_i\lambda_j\delta^{ik}\delta^j_l - R'_{kijl}\lambda_i\lambda_j\delta^{il}\delta^{jk} =$$
$$= R'_{kijl}\lambda_i\lambda_j(\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{il}\delta^{jk}) = R'_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

а в результате

$$R'_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0, \tag{2.1}$$

где $R'_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$.

Допустим, что секционная кривизна риманова многообразия (M, g) знакоопределена, т. е., в частности, $R'_{ijij} = R(e_i, e_j, e_i, e_j) > 0$ или $R'_{ijij} = R(e_i, e_j, e_i, e_j) < 0$, тогда из (2.1) следует

Теорема 1. *Если секционная кривизна риманова многообразия (M, g) знакоопределена, то обобщенно рекуррентное симметрическое тензорное поле $\varphi \in C^\infty S^2 M$ будет пропорционально метрическому тензору g, т. е. $\varphi = \lambda g$ для $\lambda \in C^\infty M$.*

3. Обобщенно рекуррентное и конциркулярно рекуррентное многообразия

Назовем (M, g) *обобщенно Риччи-рекуррентным* (ср. с [4]), если его тензор Риччи Ric удовлетворяет уравнениям (1.1), т. е. $\nabla_k R_{ij} = \lambda_k g_{ij} + \eta_k R_{ij}$.

Если многообразие (M, g) имеет знакоопределенную секционную кривизну, т. е. выполняются условия теоремы 1, то $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ и, следовательно, обобщенно Риччи-рекуррентное многообразие (M, g) является многообразием Эйнштейна [5]. Таким образом, справедливо

Следствие 1. Обобщенно Риччи-рекуррентное риманово многообразие (M, g) знакоопределенной секционной кривизны является Эйнштейновым.

Риманово многообразие (M, g) называется обобщенно рекуррентным [1], если его тензор кривизны R удовлетворяет уравнению

$$\nabla_m R^h_{ijk} = \mu_m R^h_{ijk} + \lambda_m[\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_i g_{jk}] \tag{3.1}$$

для некоторых $\lambda, \mu \in C^\infty T^*$M. В уравнениях (3.1) произведем свертку по h и j, тогда получим равенство $\nabla_m R_{ik} = \mu_m R_{ik} + (n-1)\lambda_m g_{ik}$, которое соответствует нашему определению обобщенно рекуррентного тензорного поля для $\eta_k = (n-1)\mu_k$. Значит, тензор Риччи Ric является обобщенно рекуррентным симметрическим тензорным полем.

Обобщенно конциркулярно рекуррентным многообразием называется [1] риманово многообразие (M, g), чей тензор конциркулярной кривизны

$$Q^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{Sk}{n(n-1)}[\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_i g_{jk}]$$

подчиняется уравнению $\nabla_m Q^h_{ijk} = \mu_m Q^h_{ijk} + \lambda_m[\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_i g_{jk}]$.

Вследствие этого тензор Эйнштейна $G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{n} Skg$ этого многообразия подчиняется уравнениям $\nabla_m G_{ij} = \mu_m G_{ij} + (n-1)\lambda_m g_{ij}$, а значит, G является обобщенно рекуррентным тензорным полем.

В [1] доказывается теорема, согласно которой обобщенно рекуррентное или обобщенно конциркулярно рекуррентное многообразие может быть либо рекуррентным римановым многообразием [6], либо многообразием Эйнштейна, т. е. таким многообразием (M, g), где $G \equiv 0$. В согласии с теоремой 1 получаем

Следствие 2. Обобщенно рекуррентное или обобщенно конциркулярно рекуррентное риманово многообразие знакоопределенной секционной кривизны является многообразием Эйнштейна.

4. Обобщенно рекуррентное тензорное поле в евклидовом пространстве

Рассмотрим обобщенно рекуррентное симметрическое тензорное поле φ в евклидовом пространстве E^n с ортогональной системой координат $x^1, \dots, x^n$. Тогда уравнения (1.1) предстанут в виде

$$\partial_k \varphi_{ij} = \lambda_k \delta_{ij} + \eta_k \varphi_{ij}. \qquad (4.1)$$

Поскольку $\partial_l \partial_k \varphi_{ij} = \partial_k \partial_l \varphi_{ij}$, то из (4.1) выводим

$$\partial_l \partial_k \varphi_{ij} = (\partial_l \lambda_k + \lambda_l \eta_k)\delta_{ij} + (\partial_l \eta_k + \eta_k \eta_l)\varphi_{ij}. \qquad (4.2)$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\partial_k \partial_l \varphi_{ij} = (\partial_k \lambda_l + \lambda_k \eta_l)\delta_{ij} + (\partial_k \eta_l + \eta_l \eta_k)\varphi_{ij}. \qquad (4.3)$$

Найдем разность (4.2) и (4.3) и опять воспользуемся свойством $\partial_l \partial_k \varphi_{ij} = \partial_k \partial_l \varphi_{ij}$, тогда

$$(\partial_l \lambda_k - \partial_k \lambda_l + \lambda_l \eta_k - \lambda_k \eta_l)\delta_{ij} + (\partial_l \eta_k - \partial_k \eta_l)\varphi_{ij} = 0. \qquad (4.4)$$

В обозначениях $\lambda_{lk} = \partial_l \lambda_k - \partial_k \lambda_l + \lambda_l \eta_k - \lambda_k \eta_l$, $\eta_{lk} = \partial_l \eta_k - \partial_k \eta_l$ уравнения (4.4) примут вид

$$\lambda_{lk}\delta_{ij} + \eta_{lk}\varphi_{ij} = 0. \qquad (4.5)$$

Произведя свертку в (4.5) по i и j, получим $\lambda_{lk} n + \eta_{lk} \operatorname{trace}_g(\varphi_{ij}) = 0$. Полагаем $a = \frac{1}{n} \operatorname{trace}_g(\varphi)$, тогда $\lambda_{lk} = -a\eta_{lk}$, и, значит, (4.5) перейдет в уравнения

$$-a\eta_{lk}\delta_{ij} + \eta_{lk}\varphi_{ij} = 0$$

или

$$\eta_{lk}(\varphi_{ij} - a\delta_{ij}) = 0. \qquad (4.6)$$

Поскольку тензор φ_{ij} в общем случае не может быть равен $a\delta_{ij}$ в каждой точке пространства E^n, то уравнения (4.6) будут справедливы в случае $\eta_{lk} = 0$ или, что равносильно, для $\partial_l \eta_k = \partial_k \eta_l$, а значит, $\eta_k = \partial_k \eta$ — градиент для произвольной гладкой функции η.

Рассмотрим тензорное поле $\widetilde{\varphi}_{ij} = \lambda \varphi_{ij}$, причем выберем λ так, чтобы в уравнениях (4.1) для $\widetilde{\varphi}_{ij}$ выполнялись равенства $\widetilde{\eta}_k = 0$. Найдем условия на функцию λ. Имеем

$$\partial_k \widetilde{\varphi}_{ij} = \partial_k(\lambda \varphi_{ij}) = (\partial_k \lambda)\varphi_{ij} + \lambda \partial_k \varphi_{ij} = (\partial_k \lambda)\varphi_{ij} + \lambda(\lambda_k \delta_{ij} + \eta_k \varphi_{ij}) = \lambda \lambda_k \delta_{ij} + (\partial_k \lambda + \lambda \eta_k)\varphi_{ij}.$$

В обозначениях $\widetilde{\lambda}_k = \lambda \lambda_k$ и $\widetilde{\eta}_k = \frac{\partial_k \lambda}{\lambda} + \eta_k$ уравнения, аналогичные (4.1), примут вид

$$\partial_k \widetilde{\varphi}_{ij} = \widetilde{\lambda}_k \delta_{ij} + \widetilde{\eta}_k \widetilde{\varphi}_{ij}.$$

Поскольку согласно предположению $\widetilde{\eta}_k = \frac{\partial_k \lambda}{\lambda} + \eta_k = 0$, то $\partial_k \widetilde{\varphi}_{ij} = \widetilde{\lambda}_k \delta_{ij}$. При этом функция λ будет удовлетворять уравнениям $\ln \lambda = -\eta + \mathrm{const}$ и $\widetilde{\lambda}_{lk} = \partial_l \widetilde{\lambda}_k - \partial_k \widetilde{\lambda}_l$, $\widetilde{\eta}_{lk} = 0$. Тогда $\widetilde{\lambda}_{lk} = 0$ или $\partial_l \widetilde{\lambda}_k = \partial_k \widetilde{\lambda}_l$, т. е. $\widetilde{\lambda}_k = \partial_k \gamma$, где γ — некоторая гладкая функция.

Составим дифференциал $d\widetilde{\varphi}_{ij} = d\gamma \delta_{ij}$, тогда $\widetilde{\varphi}_{ij} = \gamma \delta_{ij} + C_{ij}$, где $C_{ij} = \mathrm{const}$. Учитывая способ построения тензорного поля $\widetilde{\varphi}_{ij}$, получим

$$\varphi_{ij} = f_1 \delta_{ij} + f_2 C_{ij},$$

где f_1, f_2 — гладкие функции и C_{ij} — постоянные. Тем самым доказана

Теорема 2. *Обобщенно рекуррентное симметрическое тензорное поле φ типа $(2, 0)$ имеет в ортогональной системе координат $x^1, \dots, x^n$ евклидова пространства E^n строение $\varphi_{ij} = f_1 \delta_{ij} + f_2 C_{ij}$ для произвольных гладких функций f_1, f_2 и постоянных C_{ij}.*

Литература

1. Maralabhavi Y.B., Rathnamma M. *Generalized recurrent and concircular recurrent manifolds* // Indian J. Pure appl. Math. – 1999. – V. 30. – № 11. – P. 1167–1171.
2. Смольникова М.В. *Об одном свойстве римановых многообразий знакоопределенной секционной кривизны* // XI Международн. летняя школа-семинар по современным проблемам теоретической и математической физики. Тез. докл. – Казань: Хэтер, 1999. – С. 62.
3. Yano K. *On torse-forming directions in Riemannian space* // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1944. – V. 20. – P. 340–345.
4. Patterson E.M. *Some theorems on Ricci-recurrent spaces* // J. London Math. Soc. – 1969. – V. 27. – P. 287–295.
5. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* – М.: Мир, 1990. – 384 с.
6. Roter W. *Some indefinite metrics and covariant derivatives of their curvature tensors* // Colloquium Math. – 1991. – V. LXII. – P. 283–287.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступила
09.10.2000